苏联十年制学校数学教材

代数和分析初步

九年级

李文锦 译

人民教育出版社

代数和分析初步

九 年 级

李 文 锦 译

人民教育出版社

1980·北京

内 容 提 要

本书根据苏联十年制学校数学教材《代数和分析初步》(A·H·柯尔莫戈洛夫主编)1978年版译出。全书共分六章：数学归纳法原理，组合分析初步，实数、无穷数列和它的极限，函数的极限和导数，导数的应用，三角函数及其图象和导数。

九年级数学教材共两册，一册是《代数和分析初步》，一册是《几何》。全学年代数和分析初步每周3课时，几何每周2课时。

本书是为研究国外中小学数学教学改革情况而出版的，可供中学数学教学研究人员、师范院校数学系师生以及中学数学教师参考。

苏联十年制学校数学教材
代数和分析初步
九 年 级
李 文 锦 译
*
人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
人民教育出版社印刷厂印装
*
开本 787×1092 1/32 印张 9.5 字数 198,000
1980年4月第1版 1980年8月第1次印刷
印数 1—38,000
书号 7012·0120 定价 0.70 元
(限国内发行)

目　　录

第一章　数学归纳法原理

§1. 数学归纳法原理及其应用

1. 完全归纳法和不完全归纳法的概念

从若干个特殊事例得出某种一般的结论的推理方法叫做归纳法．例如，当变量 n 取 1, 2, 3, …等不同的数值时，连加奇数 $1, 3, 5, 7, \cdots, 2n-1$，得*：

$$1=1=1^2;$$

$$1+3=4=2^2;$$

$$1+3+5=9=3^2;$$

$$1+3+5+7=16=4^2;$$

$$1+3+5+7+9=25=5^2.$$

从上面所举的例子，不难看出，前几个奇数的和等于加数的个数的平方．很自然会想到这样的结论：这个性质对任意多个加数都成立．我们的推测(假设)可以叙述如下："对于所有自然数 n，等式

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

成立"．

由此可见，所讨论的五个事例"启发了"我们作出假设．而

* 在第一行里有"由一个加数构成的和"．把由一个加数构成的和包括在"和"这个词里，这样理解"和"，在数学中有时有用．

这个假设，将在后面证明是正确的。

再研究一个例子．用自然数 1，2，3，4，5 代替二次三项式

$$P(x)=x^2+x+41$$

中的 x，得到

$$P(1)=43,\ P(2)=47,\ P(3)=53,\ P(4)=61,$$
$$P(5)=71.$$

已知三项式的所有得到的值都是质数．再用数 0，-1，-2，-3，-4 代替 x，得 $P(0)=41$，$P(-1)=41$，$P(-2)=43$，$P(-3)=47$，$P(-4)=53$．对于变量 x 取所给定的值，已知三项式的值也都是质数．

于是，产生假设：对于变量 x 的任意整数值，三项式 $P(x)$ 的值都是质数．然而，这个假设是错误的，因为

$$P(41)=41^2+41+41=41\times43.$$

因此，同样的推理方法，在某种情况下得到正确的结论（第一个例子），而在另一种情况下却得到错误的结论（第二个例子）．因为，按照这种推理方法，不分析一切可能的情况，而只分析一部分情况就下结论，所以这种方法叫做不完全归纳法．

我们看到，不完全归纳法不能得到完全可靠的结论，但是它可以用来提出假设．这个假设随后可以证明或者推翻．

如果结论是在分析了所有情况的基础上做出的，那么，这样的推理方法就叫做完全归纳法．显然，当情况的数目有限（而且不是“很大”）时，我们采用这种方法．

举几个应用完全归纳法的例子．

例1. 证明：满足不等式 $2 \leqslant n \leqslant 15$ 的每一个自然数 n，或者是质数，或者可以表示为不多于三个质数的乘积.

为了证明它，我们考虑从2到15的每一个自然数. 其中数2、3、5、7、11、13是质数；数4、6、9、10、14、15可以表示为两个质数的乘积；数8和12可以表示为三个质数的乘积.

例2. 证明：不等式

$$|a+b| \leqslant |a|+|b| \tag{1}$$

对任意 a 和 b 都成立.

为了证明它，需要回忆在各种不同的情况下和的绝对值是怎样确定的，并验证每种情况，不等式(1)的正确性.

1) 数 a 和 b 同号(两个都是正数或者两个都是负数). 在这种情况下,

$$|a+b|=|a|+|b|,$$

即(不严格的)不等式(1)成立.

2) 数 a 和 b 异号(一个是正数，而另一个是负数). 这时，和的绝对值等于两个数的绝对值的差(当然应该从两个差 $|a|-|b|$，$|b|-|a|$ 中选择非负的那个). 因为两数的绝对值都是正的，所以它们的差小于它们的和. 因此，在第二种情况下，有

$$|a+b|<|a|+|b|,$$

即不等式(1)也成立.

3) 如果其中有一个数等于零，那么，不等式(1)的两边都等于另一个数的绝对值(不论第二个数是不是零). 因此，不等式(1)也成立.

我们分析了一切可能的情况，并验证了每种情况，不等

式(1)都成立。

习　题

1. 证明：每一个大于 2、小于 40 的偶数 n 都可以表示为两个质数的和*.

2. 参看八年级的代数课本，是怎样证明当 $a>0$ 且 $x\in Z$ 时，有 $a^x>0$ 的命题的．可以说是用完全归纳法证明的吗？

2. 数学归纳法原理

现在我们重新考虑等式

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2. \tag{1}$$

为了简单起见，用 $A(n)$ 表示对于自然数 n 的等式(1)．于是，$A(1)$、$A(2)$、$A(3)$、$A(4)$、$A(5)$ 成立，表示当 $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$, $n=5$ 时，等式(1)成立(这一点在第一小节开头就已经表明).

因为命题 $A(5)$ 成立：$1+3+5+7+9=5^2$，所以

$$\begin{aligned}1+3+5+7+9+11&=5^2+11=5^2+2\times5+1\\&=(5+1)^2=6^2,\end{aligned}$$

就是说，命题 $A(6)$ 成立.

这样就证明了，由命题 $A(5)$ 成立，可以得出命题 $A(6)$ 成立.

用符号 $\Longrightarrow$ 代替"可以推出"，语句"由 $A(5)$ 可以推出

---

* 对于大于 2 的任意偶数，这个命题是不是也成立，数学家至今还不清楚.（这个问题就是哥德巴赫猜想.——译者注）

$A(6)$"便简写成：$A(5) \Longrightarrow A(6)$.

我们来证明：$A(k) \Longrightarrow A(k+1)$. 这就是说，由等式

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$$

可以得出

$$1+3+5+\cdots+(2k+1)=(k+1)^2.$$

事实上，

$$\begin{aligned} & 1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1) \\ = & (1+3+5+\cdots+(2k-1))+(2k+1) \\ = & k^2+2k+1=(k+1)^2. \end{aligned}$$

现在已经看到：由 $A(6)$可以得出 $A(7)$.

同样，由 $A(7)$可以得出 $A(8)$，由$A(8)$可以得出 $A(9)$，依此类推. 显然，用这种方法可以推断到任何自然数n，并且对这个数证明命题 $A(n)$ 成立. 换句话说，命题 $A(n)$ (已知 $n=1$ 时它成立，且对于任意 k，由$A(k)$成立可以得出 $A(k+1)$ 成立)对于任何自然数 n 显然都成立. 但是，在上述一切直观的、令人信服的论述中，我们涉及到一个新的数学原理，它通常叫做数学归纳法原理.

我们来叙述这个原理：

如果命题 $A(n)$ (其中 n 是自然数)对于 $n=1$ 成立，而且由对于 $n=k$(k 是任意自然数)命题成立，可以推出对于下一个数 $n=k+1$ 命题成立，那么命题 $A(n)$对于任意自然数都成立.

数学归纳法原理是自然数算术公理之一，它在数学中有广泛的应用. 以这个原理为根据的证明方法，叫做数学归纳法.

数学归纳法证明由两部分组成：第一部分，证明(验证)命题 $A(1)$成立；第二部分，假设命题 $A(n)$对于 $n=k$ 正确，并证明 $A(n)$对于 $n=k+1$ 正确，即证明 $A(k)\Longrightarrow A(k+1)$.

如果两部分都证明完毕，那么根据数学归纳法原理，命题 $A(n)$对于 n 取任意自然数都成立.

现在我们可以确认：等式(1)对于 n 取任意自然数都成立，因为 $n=1$ 时它成立，而且由 $A(k)$可以得出 $A(k+1)$.

例 1. 对于 n 取任意自然数值，计算和

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

用 S_n 表示这个和. 为了推测 S_n 具有怎样的公式，先计算这个和的前几个值：$S_1, S_2, S_3, S_4, \cdots$. 研究这些数后，提出假设，然后用数学归纳法对它加以证明.

$$S_1=\frac{1}{1\times3}=\frac{1}{3};$$

$$S_2=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}=S_1+\frac{1}{3\times5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times5}=\frac{2}{5};$$

$$S_3=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}=S_2+\frac{1}{5\times7}$$
$$=\frac{2}{5}+\frac{1}{5\times7}=\frac{3}{7};$$

$$S_4=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\frac{1}{7\times9}=S_3+\frac{1}{7\times9}$$
$$=\frac{3}{7}+\frac{1}{7\times9}=\frac{4}{9}.$$

研究这些和之后，我们发现，它们的分子就是所要求的和的序号，分母就是最后一个加数的分母的第二个因数.

于是，提出假设

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}. \tag{2}$$

利用数学归纳法证明等式(2)成立。

用 $A(n)$ 表示关于自然数 n 的等式(2)。

1. $A(1)$成立，因为 $S_1=\frac{1}{3}=\frac{1}{2\times1+1}$.

2. 我们来证明 $A(k)\Longrightarrow A(k+1)$:

$$\begin{aligned}S_{k+1}&=S_k+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\\&=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}\\&=\frac{k+1}{2(k+1)+1}.\end{aligned}$$

数学归纳法证明的两部分已完成，就是说，等式(2)证毕，于是

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

对于任意自然数 n 都成立。

例 2. 求证：对于任意自然数 n，表达式 n^3+5n 的值可以被 6 整除。

用 $A(n)$表示命题："$x_n=n^3+5n$ 可以被 6 整除"。

因为 $x_1=1+5=6$，所以当 $n=1$ 时 x_n 可以被 6 整除，即 $A(1)$成立。我们来证明：$A(k)\Longrightarrow A(k+1)$，即由"$x_k$ 可以被 6 整除"，可以推出"x_{k+1} 可以被 6 整除"。

事实上，

$$x_{k+1}=(k+1)^3+5(k+1)=k^3+3k^2+3k+1+5k+5$$
$$=(k^3+5k)+3k(k+1)+6=x_k+3k(k+1)+6.$$

我们看到，x_{k+1}是由三项组成的．由于$A(k)$成立，这个和的第一项x_k可以被6整除；因为乘积$k(k+1)$是偶数，第二项也可以被6整除(说明为什么?)．因此，组成x_{k+1}的三项都可以被6整除．这意味着x_{k+1}也可以被6整除．命题证明完毕．

例3．求证：当$h>-1$时，不等式

$$(1+h)^n\geqslant 1+nh \tag{3}$$

对于任意正整数n都成立*．

1．当$n=1$时，有$1+h=1+h$，即关系“$>$”或“$=$”成立．这就是说，命题$A(1)$成立．

2．现在证明：$A(k)\Longrightarrow A(k+1)$．

不等式$(1+h)^k\geqslant 1+kh$的两边乘以$1+h$．由条件$h>-1$，得$1+h>0$，因此不等号方向不变．于是，有

$$(1+h)^{k+1}\geqslant(1+kh)(1+h)=1+kh+h+kh^2.$$

因为最后一项$kh^2\geqslant 0$，所以可以略去，得

$$(1+h)^{k+1}\geqslant 1+(k+1)h.$$

数学归纳法证明的两部分已完成，因此伯努利不等式成立．

现在我们熟悉了论证一般结论的三种方法，其中前两种方法，在数学范围之外，也有广泛的应用．

---

* 不等式(3)叫做伯努利不等式，是为了纪念著名的瑞士数学家伯努利(1654—1705)而命名的．

1. **完全归纳法**是从有限个可能的特殊情况中每一种情况进行考察的基础上推出一般结论的方法. 这是完全可靠的推理方法.

2. **不完全归纳法**是从相当多的情况进行考察的基础上仅能得出似乎正确的结论的方法. 在数学中, 不完全归纳法只是用来提出假设, 而这个假设需要接着加以证明或者推翻.

3. **数学归纳法**是证明对于每一个自然数都成立的一般命题——具有以下形式的命题: "对于每一个自然数 n, $A(n)$ 成立"——的特殊方法. 这种方法和完全归纳法一样, 得出完全可靠的结论.

习　题

3. 利用数学归纳法证明, 对于任意自然数 n, 下列等式成立:

a) $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

б) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4. 序列 (a_n) 是等差数列. 用数学归纳法证明:

$$a_n=a_1+(n-1)d \text{ 和 } S_n=\frac{(2a_1+d(n-1))n}{2}.$$

5. 序列 (b_n) 是等比数列. 用数学归纳法证明:

$$b_n=b_1q^{n-1} \text{ 和 } S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1},\quad (q\neq 1).$$

6. 求和:

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

7. 用数学归纳法证明，对于任意自然数 n，下列等式成立：

a) $1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$；

б) $1\times 4+2\times 7+3\times 10+\cdots+n(3n+1)=n(n+1)^2$.

8. 证明：对于任意自然数 n，表达式 n^3+11n 的值是 6 的整倍数.

9. 证明：对于任意自然数 n，表达式 7^n-1 的值是 6 的整倍数.

3*. 数学归纳法原理的推广

含有变量 n 的命题 $A(n)$，对于 n 取某些自然数值，有时不成立或者没有意义. 但是，可以证明，对于 n 取从 m 开始的任意自然数，命题 $A(n)$ 成立. 另一方面，有时不仅可以证明命题 $A(n)$ 对于自然数值 n 成立，而且还可以证明，命题 $A(n)$ 对于整数 n，例如从零或者从某一个负整数值开始的任意整数值也成立. 对于类似的情况，数学归纳法可以做如下的推广.

如果命题 $A(n)$（其中 n 是整数），对于 $n=m$ 成立，而且由对于 $n=k$（其中 k 是大于或者等于 m 的任意整数）命题成立，可以推出对于下一个数 $n=k+1$ 命题成立，那么命题 $A(n)$ 对任意整数值 $n\geqslant m$ 都成立.

例. 求出一切使不等式 $2^n>n^2$ 成立的自然数 n.

当 $n=1$ 时，这个不等式成立，但是，当 $n=2, 3, 4$ 时，相应地得到：$2^2=2^2$，$2^3<3^2$，$2^4=4^2$. 然而，当 n 取大于 4 的整数时，给出的不等式成立. 我们来证明这个论断.

如果 $n=5$，那么 $2^5>5^2$. 我们来证明：当 $k\geqslant 5$ 时，可以