GAODENG SHUXUE

高等数学

方法与提高

吴晓平　李卫军　主编

科学出版社
www.sciencep.com

高等数学方法与提高

吴晓平　李卫军　主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书为高等数学课程辅助教材，与现今较为通用的《高等数学》(同济版)等教材相配套，每章由内容提要框图、学习目的和要求、疑难解析、例题选讲、综合与提高、练习与测试等六部分组成，书末附有习题参考答案。

本书结构新颖，针对教学改革、课时变化等新形势，既照顾大学数学课程学习要求，又考虑学生考研需要，同时兼顾网络教学、成人教育、自学考试等教学形式的特殊性，是一本较为理想的高等数学辅助教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学方法与提高/吴晓平等主编. —北京:科学出版社，2003
ISBN 7-03-012287-9

Ⅰ. 高… Ⅱ. 吴… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第087826号

责任编辑:张颖兵/责任校对:王望荣
责任印制:高 嵘/封面设计:李 静

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码 100717
http://www.sciencep.com
武汉大学出版社印刷总厂印刷
科学出版社出版 各地新华书店经销
*
2003年10月第 一 版 开本:850×1168 1/32
2003年10月第一次印刷 印张:17 1/4
印数:1—3000 字数:457 000

定价:21.60元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

《高等数学方法与提高》编委会

主　编　吴晓平　李卫军

编　委　（以姓氏笔画为序）

王公宝　王胜兵　任耀峰　刘子瑞

李卫军　时统业　吴晓平　何汉林

张志华　胡伟文　徐忠昌　戴明强

前　　言

高等数学是理工科大学生的一门重要基础理论课。为帮助学生学好高等数学，许多数学教育工作者编著了各种辅导和参考书籍。特别是随着近年来高校教学改革力度的加大、大学数学教学课时的削减、成人教育及自学考试的普及、大学生考研热的掀起，各类辅导参考书有如雨后春笋般地脱颖而出，争奇斗妍。为了能提供一本既能集中各类相关参考书中的优点，又能与当今教学时数及教学基本要求比较吻合、篇幅适中的辅助教材，我们组织编写了这本《高等数学方法与提高》，对有志于斯学者，我们权作毛遂向大家推荐这本书，也许您能在此借得一丝灵光，点燃求知的圣火去探索数学知识的宝藏。

在本书编写的过程中我们注意与现今较通用的《高等数学》(同济版)等教材相配套，以便于初学者同步学习。我们同时也考虑到了学过《高等数学》需要复习报考研究生或参加数学竞赛者的需求，而编写这方面的有关内容。本书各章由内容提要框图、学习目的和要求、疑难解析、例题选讲、综合与提高、练习与测试等六部分组成，它们具有以下特点：

(1) "内容提要框图"以框图的形式，简明扼要的给出了各章内容概要及相互关系，便于学习小结和复习记忆；

(2) "学习目的和要求"使读者明确各章内容的具体要求、学习的要点与难点；

(3) "疑难解析"以问答的形式帮助读者澄清概念，归纳方法，纠正易犯的错误；

(4) "例题选讲"具有启发性和典型性，读者可通过这一部分的学习做到举一反三、触类旁通；

(5) "综合与提高"部分收录了最近十年全部的研究生入学试

题，部分题型不全的，本书予以了补充。这一部分的题目有一定的难度，读者通过这一部分的学习，在解题思路、方法和技巧的掌握上能有所提高；

(6)“练习与测试”题量适中、难度恰当，供读者检查各章内容的掌握程度。

此外，在附录中有习题答案与提示。

本书由吴晓平、李卫军任主编，各章编写人员如下：李卫军（第一章）、时统业（第二章）、吴晓平（第三章）、张志华（第四章）、胡伟文（第五章）、王胜兵（第六章）、何汉林（第七章）、王公宝（第八章）、徐忠昌（第九章）、戴明强（第十章）、任耀峰（第十一章）、刘子瑞（第十二章），最后由吴晓平、李卫军统稿、定稿。

限于水平见识，书中出现不当或错误之处在所难免，恳请读者不吝指正。

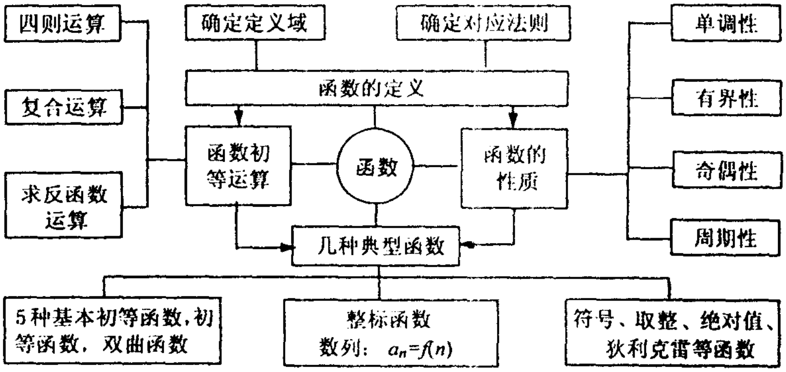
编　者

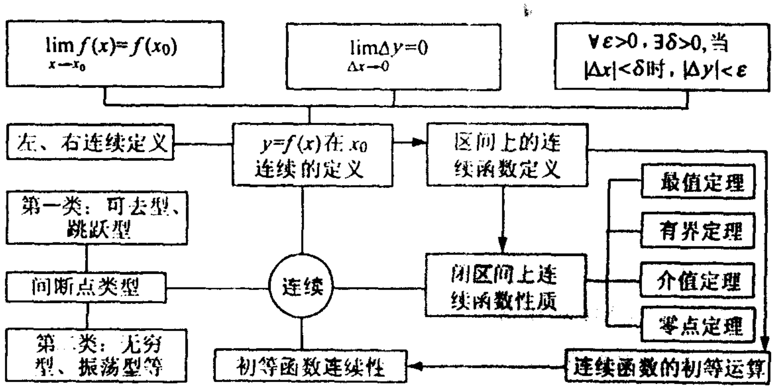
2003 年 8 月

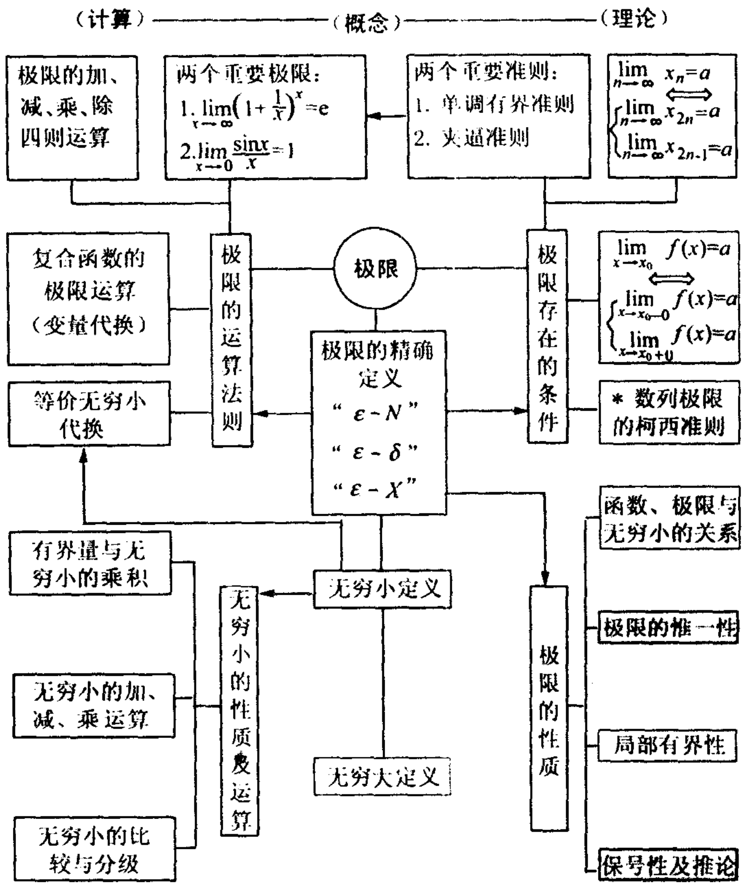
目 录

第一章　函数与极限

一、内容提要框图







二、学习目的和要求

1. 深刻理解函数的概念，了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性，掌握基本初等函数的属性与图形.

2. 掌握反函数、隐函数、复合函数、初等函数及分段函数的概念.

3. 理解一元函数极限、左右极限的概念，掌握极限的惟一性、

有界性及保号性定理,掌握极限存在的充要条件.

4. 理解无穷小和无穷大的概念,了解无穷小的性质,掌握无穷小与无穷大的关系、无穷小与函数极限的关系.

5. 熟练掌握极限计算的各种方法,掌握两个重要极限及其应用.

6. 理解函数的连续性概念,了解间断点的类型,掌握闭区间上连续函数的最值定理和介值定理.

本章重点 函数、极限与连续的概念;极限与无穷小的性质;闭区间上连续函数的性质;两个重要极限;极限的各种计算方法.

本章难点 极限的精确定义.

三、疑难解析

问 1.1 如何理解函数概念?

答 函数有 3 个基本要素:定义域、对应法则和值域.定义域与对应法则完全确定了函数的值域,因此也可以说函数只有定义域与对应法则两个基本要素.当两个函数的定义域和对应法则相同时,这两个函数就是相同的.

例如:$y=f(x)$与$u=f(t)$表示同一个函数.一个函数由定义域与对应法则完全确定,至于用什么字母表示则是非本质的.这样,我们在$y=f(x)$的反函数$x=\varphi(y)$中,互换x,y的位置得$y=\varphi(x)$. $y=\varphi(x)$本质上仍然是$y=f(x)$的反函数.

函数并不仅限于用数学式子表示,凡是能表达自变量与因变量之间对应关系的任何方式都可以表示函数,比如表格法、图形法和文字叙述法等等.即使是用数学式子表示,也是多种多样的,比如分段表示法、参数表示法和方程表示法等等.

函数是高等数学研究的主要对象.

问 1.2 如何理解函数的有界性?

答 函数的有界性与所考虑的自变量的范围有关,如$f(x)=1/x$在(1,2)内有界,但在(0,1)内却无界.判断一个函数$f(x)$在所

给区间 I 上有界的要点，是要找到一个正数 M，使得对于所有 $x\in I$，都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立.

通常，满足上述不等式的 M 有无穷多个，我们只需具体找出其中一个即可断定 $f(x)$ 在 I 上有界，至于所找出的 M 是否为使不等式成立的“最小”的那一个，或上述不等式中是否带等号则是无关紧要的，问题的本质是要指出具有上述性质的正数 M 的存在性，这就需要具体找出一个具有上述性质的正数 M.

我们也可以这样来证明 $f(x)$ 在 I 上有界：

找出两个数 $m,M(m<M)$，使得对所有 $x\in I$，都有

$$m\leqslant f(x)\leqslant M$$

成立. 具有此种性质的 m 与 M 分别称为 $f(x)$ 在 I 上的下界与上界.

当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加（减少）时，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的下（上）、上（下）界可分别选为 $f(a)$ 与 $f(b)$.

问 1.3 周期函数的定义域是否一定是整个数轴？一个周期函数一定就有最小正周期吗？

答 周期函数的定义域一定是一个无界数集，但不一定就是整个数轴，例如

$$y=\sqrt{\cos x-1}$$

以 2π 为周期，其定义域是由一些孤立的点

$$x=2k\pi,\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

所构成.

应该注意的是，并不是每个周期函数都有最小正周期，例如狄利克雷函数

$$y=f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 是有理数时}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数时}\end{cases}$$

读者可以验证任意非零有理数都是它的周期.

问 1.4 两个单调增加函数的乘积一定是单调增加函数吗？

答 不一定. 例如

$$f(x)=e^{2x},\qquad g(x)=-e^{-x}$$

都在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加，但

$$f(x) \cdot g(x) = -e^x$$

却在$(-\infty,+\infty)$上单调减少.

问1.5 分段函数一定不是初等函数吗?

答 有的分段函数可能是初等函数.例如

$$y=f(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

就是初等函数,因为它与$y=\sqrt{x^2}$是同一个函数.

问1.6 什么是必要条件、充分条件及充要条件?

答 我们先从命题谈起.所谓命题是指每一个具有真假可言的语句,如:"甲具有……性质","若A,则B".一个命题可能是正确的,即真的;也可能是错误的,即假的.在数学中,把重要的真命题称为定理.

要肯定一个命题为真,应给出证明;要肯定一个命题为假,通常的办法是举出反例.证明真命题及构造反例说明假命题,是数学中论证命题的两个很重要方法.

当给出一个命题后(称为原命题),有所谓该命题的否命题、逆命题与逆否命题.形式如下:

原命题:"有A,则有B";

否命题:"非A,则非B";

逆命题:"有B,则有A";

逆否命题:"非B,则非A".

4个命题中,原命题与逆否命题同时为真或假;否命题与逆命题同时为真或假.换句话说,原命题与逆否命题等价;否命题与逆命题等价.例如:

原命题:"若$a=3$,则$a^2=9$"真;

否命题:"若$a\neq 3$,则$a^2\neq 9$"假($(-3)^2=9$);

逆命题:"若$a^2=9$,则$a=3$"假($a=\pm 3$);

逆否命题:"若$a^2\neq 9$,则$a\neq 3$"真.

我们看到原命题与逆否命题同时为真.正是由于原命题与逆否命题等价的缘故,在证明有些数学定理时,我们不去证明原命题为

真，而是证明它的逆否命题为真，这样也就证得了原命题为真.

下面我们再来谈必要条件与充分条件. 设A与B是两个命题，若A成立时B必成立，则称A是B成立的充分条件，称B是A成立的必要条件. 这里有一个"主次"问题或"角度"问题. 站在命题A的角度看，由A成立能导出B成立，表明命题A蕴含了B，B成立是A成立所必须具备的条件. 这时把命题B当做条件，这个条件对于A成立是必要的；若站在命题B的角度看，由A成立能导出B成立，表明在A成立的条件或前提下，已足够让B成立，这时把A当做条件，这个条件对于B成立是充分的.

例如，对以下3个命题：

命题A："这个四边形是正方形"；

命题B："这个四边形是矩形"；

命题C："这个四边形的两组对边平行".

若站在命题B的角度看问题，则命题A与C都视为条件. 命题A是命题B成立的充分条件而非必要条件；命题C是命题B成立的必要条件而非充分条件.

当命题A既是B成立的必要条件又是充分条件时，称A是B成立的充分必要条件，简称充要条件，此时又称这两个命题等价.

在学习数学定理时，一定要注意分清哪些是必要条件，哪些是充分条件，切勿将必要条件当做充分条件使用或将充分条件当做必要条件使用.

问1.7 什么是反证法？

答 反证法是通过否定结论的反面来肯定结论的正确性，即假定结论不成立（肯定结论的反面），通过正确的逻辑推理而导出矛盾，由此矛盾便否定了假设，即否定了结论的反面. 既然结论的反面已被否定，那么由排中律，结论自然就是正确的了.

通常导出的矛盾有如下几种：与题设条件相矛盾；与已经证明了的定理命题相矛盾；与常理相矛盾（如$1=2$之类的矛盾）.

总之，只要是用正确的推导得出矛盾，证明便告成功. 反证法是我们应该掌握的数学方法，高等数学中许多定理是用反证法予

以证明的.

问 1.8 如何理解极限概念?

答 极限概念是高等数学中最基本与最重要的概念,在微积分中几乎所有的基本概念(如连续、导数等)都是用极限来定义的.因此,很好地理解极限概念是学好高等数学的一个关键,同时也是从初等数学迈入高等数学的一个重要阶梯.下面我们着重分析数列极限的定义,期望能帮助读者弄清楚极限定义的思想与方法.

数列极限的直观概念:设

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

为一个数列,如果随着n的无限增大(记为$n\to\infty$)x_n无限地接近某常数a,我们就说a是数列$\{x_n\}$的极限(或数列$\{x_n\}$收敛于a),记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad 或 \quad x_n\to a(n\to\infty)$$

例如:$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$以 0 为极限;$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$以 1 为极限.

更直观一点,数列$\{x_n\}$的极限a就是数列$\{x_n\}$的变化趋势.此种定义,充其量只是一种"定性"的描述,存在着严重的直观痕迹.仅凭上述直观的定义,如果有人说数列

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$$

的极限是 1.0001,那么我们是无法争辩清楚的,因为此人可以说,凭着他的直观,数列$\frac{n}{n+1}$的变化趋势就是 1.0001.为克服直观带来的弊病,就需要从数量关系上来定义数列的极限,把"定性"改造成"定量"的描述.下面我们一步步去掉直观的痕迹,使极限定义"精确化".

"随着n的无限增大,x_n无限地接近常数a"这等价于说:"随着n的无限增大,x_n与a的距离可随意小,即$|x_n-a|$可随意小."那么怎样才能体现$|x_n-a|$可随意小呢?我们可采用如下比较的方法.

指定一个很小的正数ε_1(譬如$\varepsilon_1=10^{-3}$),$|x_n-a|$能变得比ε_1

还要小(只要 n 充分大);

再指定一个更小的正数 ε_2(譬如 $\varepsilon_2=10^{-4}$),$|x_n-a|$ 能变得比 ε_2 更小(只要 n 大到一定的程度).

……

每指定一个正数 ε,$|x_n-a|$ 能变得小于 ε(只要 n 大到一定程度).

这样,"随着 n 的无限增大,x_n 变得无限地接近常数 a"可改进为"对于事先任意指定的正数 ε,随着 n 的无限增大,$|x_n-a|$ 就能小于 ε"或"对于事先任意指定的正数 ε,只要 n 大到一定的程度,就恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$".

"只要 n 大到一定的程度"还是一种"定性"的说法."一定的程度"是什么程度?无非是指 n 大于某个项数 N 之后这样一个程度.因此,"只要 n 大到一定的程度"这句话可以"定量"地写成"总存在某个项数 N,当 $n>N$ 时"或"总存在某个自然数 N,当 $n>N$ 时".

由上面的逐步分析,我们最终得到了用两个不等式描述的数列极限的精确定义:如果对于事先任意指定的正数 ε,总存在自然数 N,当 $n>N$ 时,就恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立,则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限.

上述定义,可用简明的 ε-N 语言描述:

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0$,总 $\exists\ N\in\mathbf{N}$,使得 $n>N$ 时,恒有

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

定义中有 3 个要素:

① 正数 ε;

② N 及 $n>N$;

③ 不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$.

定义中的 ε 是一个用来度量 $|x_n-a|$ 大小的距离指标,它具有二重性:任意性与相对固定性.为了刻画 x_n 能与 a 任意接近,ε 必须是任意指定的正数,而不能是诸如 10^{-100} 等等某个具体的很小的正数,因为当 $|x_n-a|<10^{-100}$ 时还不能断定 $|x_n-a|$ 能否小于 10^{-1000}.ε 虽然可以任意给定,但一经给定就相对固定下来,作为一