JIAO CAI

全国高等师范专科学校教材

解析几何与线性代数

（供物理专业用）

王东达　沈景清　编

东北师范大学出版社

全国高等师范专科学校教材

解析几何与线性代数

王东达　沈景清　编

东北师范大学出版社

全国高等师范专科学校教材

解析几何与线性代数

JIEXIJIHE YU XIANXINGDAISHU

王东达　沈景清　编

责任编辑：杨述春　　封面设计：王　帆　　责任校对：李树珍

东北师范大学出版社出版　　吉林省新华书店发行

（长春市斯大林大街110号）　　长春大学印刷厂制版

（邮政编码：130024）　　长春大学印刷厂印刷

开本：850×1168毫米 1/32　　1990年7月第1版

印张：5.875　　1990年7月第1次印刷

字数：151千　　印数：0 001—4 000册

ISBN 7-5602-0392-2/O·43　　（压膜）定价：1.65元

出版说明

党的十一届三中全会以来，师范专科教育有了很大的发展，但是，作为师专教学三大基本建设之一的师专教材建设，却始终没有得到很好的解决。近几年来，有的地区和学校为了改变这种状况，也零星地编写了一些师专教材，可是，不成套，有的学科甚至编写了几种，质量参差不齐。虽对师专无教材的局面有了部分改变，但终因没有一套全国统一的、高质量的教材而影响了师专的教学质量。

为了进一步发挥师专的办学效益，彻底改变师专没有适合自己特色的教材的局面，国家教育委员会师范教育司在1987年制订了《二年制师范专科学校八个专业教学计划》；继之又约请全国有教学经验的专家、教授编写了这八个专业的《教学大纲》；1988年7月在长春又召开了全国二年制师专教材编写出版规划会议，会上研究制订了《1988—1990年二年制师专八个专业教材编写出版规划》。八个专业是：中文、历史、政治教育、数学、物理、化学、生物和地理。

在国家教委师范司的统一布署，各省、市、自治区教委、高教局的大力帮助和出版社的积极组织下，这套教材聘请了一些长期从事师专教学工作，具有丰富的教学实践经验和较高学术水平的教授或副教授担任各科主编。各科教材由学术造诣比较深、熟悉师专教学情况的专家负责主审。各位主编根据国家教委师范司拟定的《关于编写二年制师专教材的指导思想和基本原则》及各科《教学大纲》的精神，组织编者搜集资料，综合研究，争取编

出一套具有师专自身特色的教材，以适应师专教育的迫切需要。

现在，在各方面的大力支持下，经过主编、主审和各位编写人员的努力和辛勤劳动，这套教材将陆续问世。我们热忱地欢迎师专的广大师生使用它，并在使用过程中，多提宝贵意见，使之不断完善，不断提高，以保证与当代科学和师专教育实践的同步发展。

1990年2月

前　言

本书是依据国家教委制定的《解析几何与线性代数教学大纲》(供物理专业用)并按课堂教学48学时编写的。全书分解析几何、线性代数两个部分。解析几何部分包括：矢量代数初步，平面与空间直线和几种常见的二次曲面。线性代数部分包括：行列式、矩阵、线性方程组和线性变换。

通过本教材的教学，应使学生能够掌握物理专业所必须的空间解析几何和线性代数的基本理论、基本知识和基本方法，具有较熟练的计算能力，并提高分析问题和解决问题的能力。

本书在编写与出版过程中得到各级领导、兄弟院校许多同志的支持与协助。东北师大数学系张海权教授担任本书的主审，并对全书进行仔细的审阅，提出不少宝贵意见，谨在此表示衷心感谢。

由于编者水平有限，书中错误与不当之处在所难免，欢迎广大读者提出批评指正。

编　者

1989年5月

目　录

第一部分　解析几何

第二部分　线性代数

第一部分　解析几何

第1章　矢量代数初步

矢量代数是解析几何课程中的基本内容，是研究自然科学和科学技术的有利工具。本章主要介绍矢量的有关概念，讨论矢量的代数运算。为此首先引进空间直角坐标系。

§1.1　空间直角坐标系

Ⅰ.空间直角坐标系

过空间任意一点O，以O为原点作三条互相垂直的数轴（一般地讲它们的长度单位相同），这三条数轴分别叫做x轴（横轴），y轴（纵轴），z轴（竖轴），统称为坐标轴。它们的正方向符合右手法则，即让右手的食指、中指和姆指互相垂直，当食指、中指分别指着x轴、y轴的正向时，则拇指恰好指着z轴的正向，如图1-1所示。这样的三条坐标轴就构成了一个**空间直角坐标系**，点O叫做**坐标原点**（或原点）。这个坐标系记作$Oxyz$。

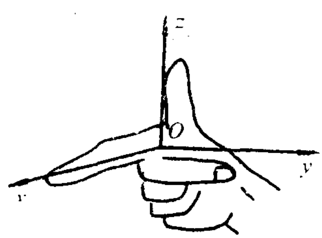


图　1-1

取定空间直角坐标系之后，就可以把空间的点与有序的三实数组之间一一对应起来。

如图 1-2所示，设P为空间任意一点，过P点分别作垂直于x轴，y轴和z轴的平面，设垂足对应的三个实数分别是x_1，y_1，z_1，于是P点决定了一个有序三实数组（x_1，y_1，z_1）；反之，如果我们有了一个三实数组(x_1，y_1，z_1)，过x，y，z轴上的点x_1，y_1，z_1分别作垂直于x，y，z轴的平面，这三个平面必相交空间一点P。因此三实数组（x_1，y_1，z_1）与空间的点一一对应。称（x_1，y_1，z）为**P点的坐标**。简记作$P(x_1,y_1,z_1)$，并称x_1，y_1，z_1分别为P点的横坐标，纵坐标和竖坐标（或P点的坐标分量）。

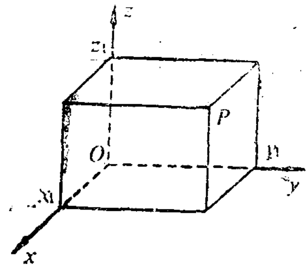


图 1-2

空间直角坐标系中任意两条坐标轴所确定的平面，叫做**坐标面**。例如x轴和y轴确定xOy坐标面(或xy面)，类似地有yOz坐标面（或yz面）和zOx坐标面（或zx面）。这三个坐标面两两互相垂直且将空间分成八个部分，每一部分叫做一个**卦限**。这八个卦限的区域如图 1-3 所示。第Ⅰ卦限内点的坐标分量全是正数，简记成（+，+，+），第Ⅱ卦限内点的坐标为（−，+，+）等等，现列表如下。

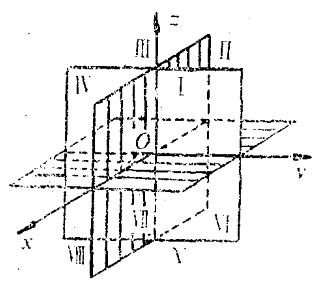


图 1-3

不在坐标面上的点，只需根据它们的坐标符号，就可以确定它们所在的卦限。原点O的坐标显然为(0,0,0)；x轴上的点的纵坐标和竖坐标全为0，所以x轴

坐标 \ 符号 \ 卦限	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

上的点的坐标为$(a,0,0)$形式。类似地，y轴和z轴上的点的坐标分别为$(0,b,0)$和$(0,0,c)$形式。xy面，yz面，zx面上的点的坐标分别为$(a,b,0)$，$(0,b,c)$，$(a,0,c)$形式，其中，a，b，c均为实数。

II．两点间的距离

取定空间直角坐标系后，空间任意两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$和$M_2(x_2,y_2,z_2)$间的距离都可以用它们的坐标表示出来。

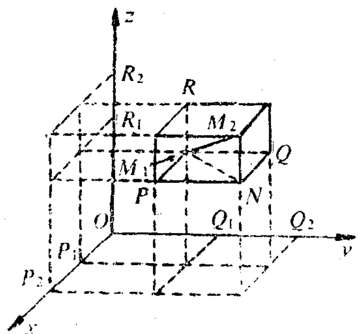


图 1-4

过M_1，M_2各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成一个以M_1M_2为对角线的长方体，如图 1-4 所示。根据勾股定理可知

$$|M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2 = |M_1P|^2 + |M_1Q|^2 + |M_1R|^2$$

由于
$$|M_1P| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|,$$
$$|M_1Q| = |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|,$$
$$|M_1R| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|,$$

所以

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \quad (1)$$

特别，空间任意一点$P(x,y,z)$到原点$O(0,0,0)$的

距离为

$$|OP| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例1. 在空间直角坐标系中，作出下列各点：$A(2, 2, 3)$，$B(-1, 3, 3)$，$C(1, -2, -3)$，$D(0, 0, -3)$．

解. A,B,C,D的位置如图1-5所示．

例2. 求$P_1(1, -1, 0)$和$P_2(-1, 2, 6)$两点之间的距离．

解. 由公式（1）可得

$$|P_1P_2| = \{[(-1)-1]^2 + [2-(-1)]^2 + 6^2\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7.$$

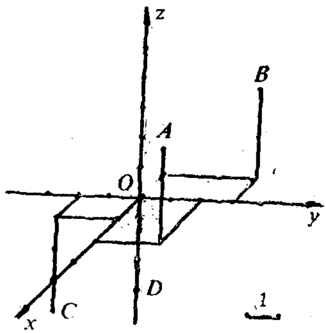


图 1-5

例3. 在z轴上求与点$A(-4, 1, 7)$和$B(3, 5, -2)$等距离的点．

解. 因为z轴上的点的横坐标和纵坐标全为0，所以可设$M(0, 0, z)$，M与A和B等距离．则

$$|MA| = |MB|,$$

即

$$\sqrt{(-4-0)^2 + (1-0)^2 + (7-z)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (5-0)^2 + (-2-z)^2}$$

解得 $z = \dfrac{14}{9}$.

所以点$M\left(0, 0, \dfrac{14}{9}\right)$为所求．

§ 1.2 矢量的几何表示和线性运算

Ⅰ.矢量及其几何表示

人们在日常生活和生产实践中所遇到的量，可以分为两类，其中的一类量，例如，长度、面积、体积、时间、温度、质量等等，只有大小而没有方向，这种量叫做标量（或数量）；另一类量，例如，力、位移、速度、加速度、力矩等等，既有大小又有方向，这种量叫做**矢量（或向量）**.

在几何中，空间的任一矢量都可以用空间的一条有向线段来表示，用有向线段的长度表示矢量的大小，用有向线段的方向表示矢量的方向. 我们把起点为 A 终点为 B 的有向线段所表示的矢量记作 $\overrightarrow{AB}$ 或用一个粗体小写字母如 $\boldsymbol{a}$ 表示，如图1-6所示.

我们把矢量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小叫做它的**长度或模**，记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|$.

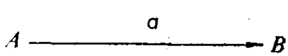


图 1-6

不管两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的起点如何，只要它们是同方向等长度的就说它们是**相等的矢量**，并记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 这种矢量叫做**自由矢量**. 因此，自由矢量是由它的长度和方向唯一确定的矢量. 由于平移不改变矢量的大小和方向，所以自由矢量可以在空间任意平行移动. 平移不改变它的相等性，因此我们常把自由矢量的起点移到原点上.

基于以上的事实，我们定义

若矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反，则说 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ **平行（或共线）**，记作 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.

若矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的方向垂直时，则说 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

Ⅱ. 矢量的线性运算

力学实验表明，作用于同一质点的两个力的合力恰好符合平行四边形法则。对于速度、加速度也有相同的结论。由此，我们引进矢量的加法定义。

定义1. 设$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$是任意两个不共线的矢量，把它们的起点移到原点O，以$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$为邻边作平行四边形，由O点作出的对角线矢量即为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和，记作$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$。其如图1-7所示。

这种求矢量和的方法叫做**平行四边形法则**。

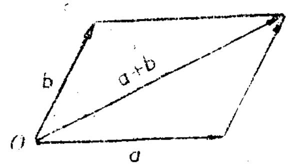


图 1-7

对任意的两个矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，我们可按下列方法求它们的和。

定义2. 平移矢量$\boldsymbol{b}$，使$\boldsymbol{b}$的起点和$\boldsymbol{a}$的终点重合，那么由$\boldsymbol{a}$的起点到$\boldsymbol{b}$的终点的矢量就是$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和。其如图 1-8 所示。

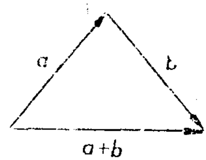


图 1-8

这种求矢量和的方法叫做**三角形法则**。

对不共线的两个矢量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$，按平行四边形法则或按三角形法则求和，实质上是一致的，这可由图 1-7 看出。

三角形法则的推广：n个矢量$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$的和$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$，可用以下方法求出：把$\boldsymbol{a}_2$的起点移到$\boldsymbol{a}_1$的终点，再把$\boldsymbol{a}_3$的起点移到$\boldsymbol{a}_2$的终点，…，最后把$\boldsymbol{a}_n$的起点移到$\boldsymbol{a}_{n-1}$的终点上，从$\boldsymbol{a}_1$的起点到$\boldsymbol{a}_n$的终点的矢量就是$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$。

这种求矢量和的方法叫做 **n边形法则**。

关于矢量的加法，有如下的算律：

1)　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ （**交换律**）；

2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ （结合律）；

我们把模为零的矢量，叫做**零矢量**，记作$\mathbf{0}$．它是起点和终点重合的矢量，它的方向是不确定的或任意的．由三角形法则有

3) $\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$

把与矢量$\boldsymbol{a}$模相等而方向相反的矢量，叫做$\boldsymbol{a}$的**相反矢量**（**或负矢量**），记作$-\boldsymbol{a}$．由三角形法则有

4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$．

关于交换律和结合律，可分别由平行四边形法则和n边形法则得到．如图1-9及图1-10所示．

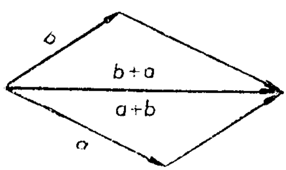


图 1-9

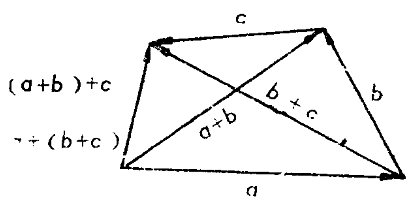


图 1-10

同数的减法一样，矢量的减法也定义为矢量的加法的逆运算．

定义3． 若矢量$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$的和为$\boldsymbol{a}$，则称$\boldsymbol{c}$为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的差，记作$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，即$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$．

由图1-11可以看出

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$．

所以，通常把矢量的减法运算转化为矢量的加法进行运算．

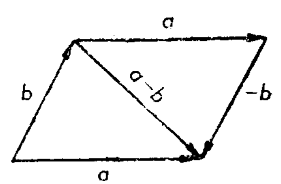


图 1-11

下面我们引进**数与矢量的乘法定义**．

定义4． 实数λ与矢量$\boldsymbol{a}$的乘

积$\lambda\boldsymbol{a}$或$\boldsymbol{a}\lambda$是一个矢量，它的模为$|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$。当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$方向相同；当$\lambda<0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$方向相反。其如图 1-12 所示。

由定义4可推得

$\boldsymbol{b} \parallel \boldsymbol{a} \Longleftrightarrow \boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$.

$(-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$.

$\lambda\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \Longleftrightarrow \lambda = 0$或$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

我们把模为 1 的矢量叫做**单位矢量**。把与 $\boldsymbol{a}$同向的单位矢量记作$\boldsymbol{a}^0$，叫做$\boldsymbol{a}$的单位矢量。

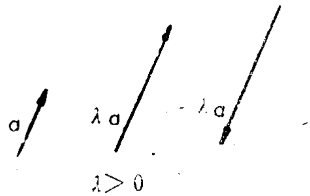


图 1-12

当 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$时，由定义4可得

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0 \quad 或 \quad \boldsymbol{a}^0 = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

数与矢量的乘法有如下的算律：

1）$\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$　（结合律）；

2）$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$　（分配律）；

3）$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$　（分配律）．

证．1）　由定义 4 可知$\lambda(\mu\boldsymbol{a})$和$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$是同方向等长度的，即 1）成立。

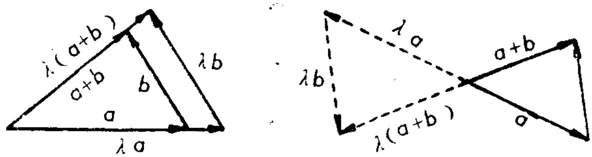
2）　当$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$时，2）显然成立。

当$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ 且λ，$\mu>0$ 时，由定义4及三角形法则可知左右两端是同方向等长度的矢量，即 2）成立。至于其它情形，可根据λ，μ，$\lambda+\mu$的正负由定义 4 及三角形法则类似地推出。

3）利用相似三角形对应边成比例的性质及三角形法则可以证明，如图 1-13 所示。

矢量的加减法及数与矢量的乘法统称为矢量的**线性运算**。

例．在平行四边形$ABCD$内，设$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}$，$M$是平行四边形对角线的交点（图1-14），试用 $\boldsymbol{a}$和 $\boldsymbol{b}$ 表示矢量$\overrightarrow{MA}$、



$\lambda > 0$　　　　　　$\lambda < 0$

图　1-13

$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$和$\overrightarrow{MD}$.

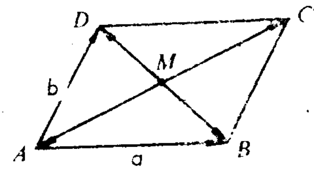


图　1-14

解. 由于平行四边形的对角线互相平分，所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=2\overrightarrow{AM},$$

即 $$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),$$

于是 $$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

因为 $$2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},$$

于是 $$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}).$$

因为 $\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}$，所以 $\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,

因为 $\overrightarrow{MD}=-\overrightarrow{MB}$，所以 $\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.

§ 1.3　矢量的坐标表示式和线性运算

I. 矢量在轴上的投影与投影定理

设 $\boldsymbol{a}$和 $\boldsymbol{b}$是任意的两个非零矢量，把它们的起点移到同一点