国家工科数学课程教学基地
研究生教学用书

随机过程及应用

Random Process and Its Applications

电子科技大学应用数学学院　陈良均　朱庆棠　主编

高等教育出版社

国家工科数学课程教学基地
研究生教学用书

随机过程及应用

电子科技大学应用数学学院

陈良均　朱庆棠　主编

高等教育出版社

内容简介

本书是作者在电子科技大学使用多年的同名教材基础上，吸取国内外优秀教材之长，特别是采纳了国内一些知名专家、学者的建议，根据21世纪人才素质的要求，进行修改而成的。全书共七章，主要内容为概率论(摘要)，随机过程的基本概念，几种重要的随机过程，马尔可夫过程，均方微积分，平稳过程以及时间序列分析简介。修改稿增加了大量的实例，加强随机过程的应用分析，使读者通过本书既能较系统地掌握随机过程的数学理论，又能初步了解其他相关学科的基本知识。

本书可作为工科及其他非数学类专业高年级本科生和研究生的教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

随机过程及应用/陈良均，朱庆棠主编. —北京：高等教育出版社，2003 重印
ISBN 7-04-011923-4

Ⅰ. 随... Ⅱ. ①陈...②朱... Ⅲ. 随机过程 Ⅳ. O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 037800 号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010－64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800－810－0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	化学工业出版社印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2003年6月第1版
印　　张	18	**印　　次**	2003年8月第2次印刷
字　　数	330 000	**定　　价**	25.10元

前　言

本书是在电子科技大学应用数学学院朱庆棠、陈良均编著的《随机过程及应用》基础上改编的。原编者根据多年从事随机过程课程的教学经验，吸取国内外优秀教材之长，特别是采纳了国内一些知名专家、学者的建议，在注重随机过程基本理论、基本方法的基础上，增加了应用的实例，注重了数学模型和实际模型相结合。1996 年，讲义由电子科大出版社正式出版。原版经过几个院校的使用，获得普遍好评，同时也提出了一些改进建议。本次修改主要集中于随机过程的应用，改编者试图结合现代信号处理、计算机科学、生命科学和经济管理学中的一些实际背景，通过例子的形式加强随机过程的应用分析，使读者通过本书既能较系统地掌握随机过程的数学理论，又能初步了解其他相关学科的基本知识，为高年级本科生和硕士研究生的实际应用打下扎实的理论与应用基础。

全书包括概率论（摘要）、随机过程的基本概念、几种重要的随机过程、马尔可夫过程、均方微积分、平稳过程和时间序列分析简介，每章配有适量的习题。在编写过程中，编者的文字叙述力求清晰流畅、简明易懂、深入浅出、寓意于例，增强了本书的可读性。

本书由陈良均、朱庆棠教授主编，各章执笔的分别是陈良均（第二、三章），王定成（第一、七章），张晓军（第四、五章），杜鸿飞（第六章）。修改稿经唐应辉教授主审，他在肯定本书的同时，也提出了不少宝贵的意见。电子科技大学研究生院、应用数学学院领导和部分教师给予了大力的支持和帮助，在此我们一并表示衷心的感谢。

限于编者水平，本书难免有不妥之处，敬请批评指正。

编　者

2003 年 1 月

策　　划　李艳馥
编　　辑　李　陶
封面设计　李卫青
责任绘图　黄建英
版式设计　史新薇
责任校对　殷　然
责任印制　孔　源

郑重声明

目　　录

第一章　概率论(概要) …… 1

§1.1　概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$ …… 1

§1.2　随机变量及其分布 …… 6

§1.3　随机变量的数字特征 …… 26

§1.4　条件数学期望 …… 32

§1.5　随机变量的特征函数 …… 36

§1.6　收敛性与极限定理 …… 46

习题一 …… 48

第二章　随机过程的基本概念 …… 53

§2.1　随机过程的定义及分类 …… 53

§2.2　随机过程的分布及其数字特征 …… 55

§2.3　复随机过程 …… 65

习题二 …… 66

第三章　几种重要的随机过程 …… 70

§3.1　独立过程与独立增量过程 …… 70

§3.2　正态过程(高斯过程) …… 74

§3.3　维纳过程(Brown 运动) …… 78

§3.4　泊松过程 …… 81

习题三 …… 96

第四章　马尔可夫过程 …… 100

§4.1　马尔可夫过程的概念 …… 100

§4.2　离散参数马氏链 …… 102

§4.3　齐次马氏链状态的分类 …… 113

§4.4　连续参数马尔可夫链 …… 123

§4.5　生灭过程 …… 126

§4.6　生灭过程在排队论中的应用 …… 134

习题四 …… 151

第五章　均方微积分 …… 159

§5.1　均方极限 …… 159

§5.2　均方连续 …… 163

§5.3 均方导数 …… 164
§5.4 均方积分 …… 169
§5.5 均方随机微分方程简介 …… 175
习题五 …… 180
第六章 平稳过程 …… 182
§6.1 平稳过程的概念 …… 182
§6.2 平稳过程及其相关函数的性质 …… 194
§6.3 平稳过程的均方遍历性 …… 199
§6.4 平稳过程的谱密度 …… 206
§6.5 平稳过程的谱分解 …… 217
§6.6 线性系统中的平稳过程 …… 220
§6.7 白噪声通过线性系统 …… 227
§6.8 平稳窄带随机过程 …… 231
习题六 …… 241
第七章 时间序列分析简介 …… 246
§7.1 自回归滑动平均过程 …… 246
§7.2 ARMA 过程的性质及相关分析 …… 248
§7.3 ARMA(p,q)过程的参数估计 …… 261
§7.4 模型识别与阶估计初步 …… 268
§7.5 时间序列的预报 …… 270
习题七 …… 277
参考文献 …… 279

第一章　概率论(概要)

概率的数学理论是本书的基础之一.我们认为读者已熟悉这些基本概念,所以在这一章中我们仅叙述本书所必需的概率论的基本定义和结果.

§1.1　概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$

一、随机试验

定义1　如果一个试验E,满足下列条件:

(1) 在相同的条件下可以重复进行;

(2) 每次试验的结果不止一个,并且能事先明确试验的所有结果;

(3) 一次试验结束之前,不能确定哪一个结果会出现,称此试验为**随机试验**.

二、集论初步

在概率论中,事件和事件的集合起着主要的作用,事件的数学理论和集论有密切关系.下面简要介绍集论的一些基本知识.

我们把为了某种目的而研究的对象全体称为**集合**,简称为**集**.集是具有某些特定性质的对象的全体,每一个属于这种集的对象,称为集的一个**元素**.集合用大写字母A、B、C、…表示,元素用小写字母a、b、c、e、w、…表示,一些集组成的集叫**类**,我们用草写字母$\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$、$\mathscr{C}$、…表示.

不含任何元素的集合称为**空集**,记为$\varnothing$,包含所研究问题的全体对象,即包括所考虑的所有集的所有元素的"最大"集,称为**空间**,记为Ω.

设Ω是空间,A、B、C、…是它的子集,下面研究这些集的运算.

集A的**余集**或**逆集**,记为$\overline{A}$,表示在给定空间Ω中,不包含集合A的那些元素的集合.

集A与B的**并集**或**和集**,记为$A\cup B$,表示至少属于集合A和B之一的元素构成的集合,和的运算可以推广到任意有限或可数无穷多个的情形.

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

集 A 与 B 的**交集**或**积集**，记为 $A \cap B$，简记为 AB. 表示同时属于集合 A 和 B 的元素构成的集合. 交的运算可以推广到任意有限或可数无穷多个的情形.

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

若 $A \cap B = \varnothing$，称 A 与 B **互斥**或**不相交**，此时，A 与 B 的并可以记为 $A+B$.

集 A 与 B 的**差集**，记为 $A-B$，表示属于 A 而不属于 B 的元素构成的集合. 显然

$$A-B = A\overline{B}; \quad \overline{A} = \Omega - A$$

集合的并和交的运算满足结合律、交换律、分配律，还有德摩根(De Morgan)律.

三、样本空间、随机事件体

定义 2 随机试验 E 的每一个最简单的试验结果，称为**样本点**，记为 ω. 全体样本点构成的集合，称为**样本空间**，记为 Ω.

定义 3 样本空间 Ω 的子集组成的集类 $\mathscr{F}$，如果满足：

(1) $\Omega \in \mathscr{F}$;

(2) 若 $A \in \mathscr{F}$，则 $\overline{A} \in \mathscr{F}$;

(3) 若 $A \in \mathscr{F}(i=1,2,\cdots)$，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$,

称 $\mathscr{F}$ 为**随机事件体**(域)或 **σ 代数**.

随机事件体 $\mathscr{F}$ 的任意元素 A 称为**随机事件**. 仅包含一个样本点的事件称为**基本事件**，$A_i = \{\omega_i\}$，$\omega_i \in \Omega$.

样本空间 Ω 和 $\mathscr{F}$ 的二元体 $(\Omega, \mathscr{F})$ 称为**可测空间**.

由上述，关于概率论中事件的所有定义和它们之间的关系，可以用集合论中一些集和集的运算来描述，集论和概率论中术语之间的一些对应关系列表如表 1.1 所示：

表 1.1

记　号	集　论	概　率　论
Ω	空间　全集	样本空间　必然事件
$\varnothing$	空集	不可能事件
ω	元素	样本点基本事件

续表

记 号	集 论	概 率 论
A	Ω 的子集	事件
$\bar{A}$	A 的余集	A 的对立事件(逆事件)
$A\subset B$	A 是 B 的子集	A 发生,B 必发生
$A=B$	A 与 B 相等	事件 A 与 B 相等
$A\cup B$	A 与 B 的和集(并集)	事件 A 与 B 至少有一个发生
AB	A 与 B 的交集(积集)	事件 A 与 B 同时发生
$A-B$	A 与 B 的差集	事件 A 发生而事件 B 不发生
$AB=\varnothing$	A 与 B 没有公共元素	事件 A 与 B 互不相容(互斥)

四、概率与概率空间

定义 4 设($\Omega,\mathscr{F}$)是可测空间,如果定义在随机事件体 $\mathscr{F}$ 上的实值集函数 $P(A)$,$A\in\mathscr{F}$ 满足:

(1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1, A\in\mathscr{F}$;

(2) $P(\Omega)=1$;

(3) $A_i\in\mathscr{F}(i=1,2,\cdots)$,$A_iA_j=\varnothing(i\neq j=1,2,\cdots)$,等式 $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$ 成立,则称 P 为($\Omega,\mathscr{F}$)上的**概率测度**,简称**概率**.对任意 $A\in\mathscr{F}$,$P(A)$ 称为随机事件 A 的概率.

定义 5 样本空间 Ω,随机事件体 $\mathscr{F}$ 和概率 P 组成的三元体($\Omega,\mathscr{F}$, P)称为**概率空间**.

例 1 抛一均匀硬币,观察正面(H),反面(T)出现的随机试验 E.样本空间 $\Omega=\{H,T\}$,有两个样本点 $\omega_1=H,\omega_2=T$,两个基本事件 $A=\{H\},\bar{A}=\{T\}$.

随机事件域 $\mathscr{F}=\{\varnothing,A,\bar{A},\Omega\}$,含有 2^2 个子集;

随机事件域 $\mathscr{F}$ 上的概率定义如下:$P(A)=\dfrac{k}{2}$,k 为事件 A 包含的样本点数.($\Omega,\mathscr{F},P$)为概率空间.

例 2 掷一枚均匀的骰子,观察出现点数的随机试验 E.

样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$,$\omega_i=i$,$i=1,2\sim 6$,含有 6 个样本点;

随机事件体 $\mathscr{F}$ 由样本空间 Ω 的全体子集,共 $2^6=64$ 个子集;$\mathscr{F}=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\cdots,\{6\},\{1,2\},\cdots,\{5,6\},\{1,2,3\},\cdots,\{4,5,6\};\{1,2,3,4\},\cdots,\{3,4,5,6\},\{1,2,3,4,5\},\cdots,\{2,3,4,5,6\},\Omega\}$;

随机事件体$\mathscr{F}$上的概率P定义为$P(A)=\frac{k}{6}$，k为事件A包含的样本点数.$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间.

例3　古典概率空间，古典概型下满足：

(1) 样本空间由有限个样本点组成，$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$；

(2) 每个基本事件$A_i=\{\omega_i\}$，$i=1,2,\cdots,n$出现的可能性相等.

随机事件体$\mathscr{F}$由Ω的全体子集共2^n个组成；

随机事件体$\mathscr{F}$上的古典概率P定义为：

$$P(A)=\frac{k}{n}$$

n为样本点总数，k为A包含的样本点数.$(\Omega,\mathscr{F},P)$是一个古典概率空间.

例4　给定一随机试验E，其样本空间为$\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$.

随机事件体由Ω的一切可能子集构成.

对任意$A\in\mathscr{F}$，定义概率P如下：

$$P(A)=\sum_{k\in A}\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\quad(\lambda>0\text{ 常数})$$

$$P(\varnothing)=0$$

则$(\Omega,\mathscr{F},P)$是一个概率空间.

下面介绍概率的性质：

性质1　$P(\varnothing)=0$；

性质2　(有限可加性)若$A_i\in\mathscr{F}$，$i=1,2,\cdots,n$，且$A_iA_j=\varnothing(i\neq j=1,2,\cdots,n)$，则

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

性质3　(加法公式)

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),A、B\in\mathscr{F}$$

一般地，若$A_i\in\mathscr{F}(i=1,2,\cdots,n)$

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

称为**多除少补原理**.

性质4　$P(A)=1-P(\overline{A})$.

性质5　若$A\subset B$，则$P(B-A)=P(B)-P(A)$，$P(A)\leqslant P(B)$.

性质6　(连续性)

(1) 若 $A_1\supset A_2\supset A_3\supset\cdots$，且 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}P(A_n)=P(A)$.

(2) 若 $A_1\subset A_2\subset A_3\subset\cdots$，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}P(A_n)=P(A)$.

五、条件概率

设概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$，$A\in\mathscr{F}$，$B\in\mathscr{F}$，且 $P(A)>0$，在事件 A 已经发生的条件下，事件 B 发生的**条件概率**定义为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

给定概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$，$A\in\mathscr{F}$，且 $P(A)>0$，对任意 $B\in\mathscr{F}$，有 $P(B|A)$对应，则条件概率 $P(B|A)$是$(\Omega,\mathscr{F})$上的概率，记 $P(B|A)=P_A$，则$(\Omega,\mathscr{F},P_A)$也是一个概率空间，称为**条件概率空间**.

六、乘法公式 事件的独立性

设有概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$，如果 $A,B\in\mathscr{F}$，$P(AB)>0$，则下述**乘法公式**成立：

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$$

乘法公式也可如加法公式一样，推广到任意有限个的情形：设有概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$，如果 $A_i\in\mathscr{F}$，$i=1,2,\cdots,n$，$P(A_1A_2\cdots A_n)>0$，则下述推广的乘法公式成立：

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

定义 6 (随机事件的独立性)

(1) 如果事件 $A,B\in\mathscr{F}$，满足

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

称事件 A 与 B **相互独立**；

(2) 如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathscr{F}$，且对任意的 $s(2\leqslant s\leqslant n)$和任意的 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_s\leqslant n$，有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_s})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_s})$$

称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **相互独立**.

随机事件的独立性具有如下性质：

性质 1 A 与 B 相互独立$\Leftrightarrow A$ 与 $\bar{B}$ 相互独立$\Leftrightarrow\bar{A}$ 与 B 相互独立$\Leftrightarrow\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相互独立.

性质 2 A 与 B 相互独立$\Leftrightarrow P(B|A)=P(B)(P(A)>0)\Leftrightarrow P(A|B)=P(A)(P(B)>0)\Leftrightarrow P(B|A)=P(B|\bar{A})(0<P(A)<1)$

性质 3 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，若将其中任意 m 个$(1\leqslant m\leqslant n)$

事件换成它们的逆事件,则所得的 n 个事件仍然相互独立.

性质 4 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立,则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A}_i)$$

七、全概率公式与贝叶斯公式

设事件组 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ **两两互不相容**,即 $B_iB_j = \varnothing (1 \leqslant i \neq j \leqslant n)$,且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i = \Omega, P(B_i) > 0, i = 1, 2, \cdots, n$,则对任意事件 A,有

(1) **全概率公式** $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(B_i) P(A \mid B_i)$;

(2) **贝叶斯公式** $P(B_j \mid A) = \dfrac{P(B_j) P(A \mid B_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(B_i) P(A \mid B_i)}, (j = 1, 2, \cdots, n)$.

§1.2 随机变量及其分布

一、随机变量

定义 1 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为概率空间,如果定义在样本空间 Ω 上的一个单值实函数 $X = X(\omega), \omega \in \Omega$,满足

$$\{\omega: X(\omega) < x\} \in \mathscr{F} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

则称 $X(\omega)$为随机变量.随机变量 X 可缩写为 r.v. X.在测度论中,随机变量 X 对应于定义在可测空间$(\Omega, \mathscr{F})$上的 $\mathscr{F}$ **可测函数**.

二、分布函数

定义 2 设 $X = X(\omega)$是概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的随机变量,对任意实数 x,定义函数

$$F(x) = P\{X < x\} \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

称为 r.v. X 的**概率分布函数**,简称**分布函数**.

分布函数具有以下一些性质:

(1) $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) \xlongequal{\text{def}} F(-\infty) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) \xlongequal{\text{def}} F(+\infty) = 1$;

(2) $F(x)$是单调非减函数,即对任意的 $x_1 < x_2$,有 $F(x_1) \leqslant F(x_2)$;

(3) $F(x)$是左连续的函数,即对任意的 x 有 $F(x-0) = F(x)$.

三、离散型随机变量及其分布律

定义 3 若随机变量 X 至多只取可列无穷多个数值：$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$，令 $p_k = P\{X = x_k\}$，它满足：

(1) $p_k \geqslant 0$；　　(2) $\sum\limits_k p_k = 1$，

则称 X 为**离散型随机变量**，并称

$$P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \cdots$$

为 X 的**分布律**或**概率分布**.

离散型 r.v. X 的分布函数

$$F(x) = P\{X < x\} = \sum_{x_k < x} p_k \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

它是一个左连续单调不减的阶梯函数，在 $x = x_k$ 处有第一类跳跃型间断点，其跃度为 p_k（图 1.1 和图 1.2）.

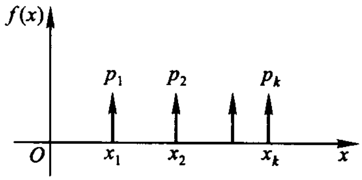

图 1.1

若利用单位脉冲函数 $\delta(x)$ 和单位阶跃函数 $u(x)$ 来表示，离散型 r.v. X 的分布律（概率密度函数形式）和分布函数可以写为

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \delta(x - x_k)$$

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k u(x - x_k)$$

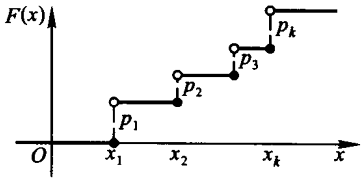

图 1.2

其中 $\delta(x) = \begin{cases} +\infty, x = 0, \\ 0, \quad 其他, \end{cases}$

且 $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \mathrm{d}x = 1$；

$$u(x) = \begin{cases} 1, x \geqslant 0, \\ 0, 其他. \end{cases}$$

$$u'(x) = \delta(x)$$

例 1 设随机变量 X 的分布律为：

X	0	1	2
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

求 X 的概率密度和分布函数.

解

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}p_k\delta(x-x_k)=\frac{3}{10}\delta(x)+\frac{3}{5}\delta(x-1)+\frac{1}{10}\delta(x-2)$$

$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}p_k u(x-x_k)$$

$$=\frac{3}{10}u(x)+\frac{3}{5}u(x-1)+\frac{1}{10}u(x-2)=\begin{cases}0, & -\infty<x\leqslant 0,\\ \frac{3}{10}, & 0<x\leqslant 1,\\ \frac{9}{10}, & 1<x\leqslant 2,\\ 1, & 2<x<+\infty.\end{cases}$$

四、连续型随机变量

定义 4 若存在非负可积函数 $f(x)$,对任意实数 x,使得 r. v. X 的分布函数,满足

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(u)\mathrm{d}u\quad(-\infty<x<+\infty),$$

则称 X 为**连续型随机变量**,称 $f(x)$为连续型随机变量的**概率密度函数**,简称**概率密度**.

概率密度函数具有如下性质:

(1) $f(x)\geqslant 0$; (2) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$.

如果一个函数 $f(x)$具有性质(1)、(2),则它一定是某个 r. v. X 的概率密度.

(3) 在 $f(x)$的连续点 x 处,$F'(x)=f(x)$.

(4) 连续型 r. v. X 取某个值的概率为 0,即 $P\{X=x\}=0\quad(x\in(-\infty,+\infty))$.

(5) 连续型 r. v. X 落在区间的概率,与区间的开、闭无关,即

$$P\{a\leqslant X\leqslant b\}=P\{a<X\leqslant b\}=P\{a<X<b\}=P\{a\leqslant X<b\}$$
$$=F(b)-F(a)=\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x$$

故对连续型随机变量 X 而言,$P\{X\leqslant x\}=P\{X<x\}=F(x)$.

(6) 连续型 r. v. X 的分布函数为连续函数.

例 2 已知 r. v. X 的概率密度

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},-\infty<x<+\infty$$

求:(1) 分布函数 $F(x)$;(2) 概率 $P\{X>1\}$.

解 (1) $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du$

当 $x<0$ 时,$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{u}du=\frac{1}{2}e^{x}$;

当 $x\geqslant 0$ 时,$F(x)=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{u}du+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}e^{-u}du=1-\frac{1}{2}e^{-x}$.

故

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x<0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x\geqslant 0\end{cases}$$

(2) $P\{x>1\}=\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-x}dx=\frac{1}{2}e^{-1}$.

注 $P\{x>1\}$也可直接由分布函数得出

$$P\{x>1\}=1-F(1)=1-(1-\frac{1}{2}e^{-1})=\frac{1}{2}e^{-1}$$

五、常见的随机变量及其分布

1.〈0-1〉分布(两点分布)

如果 r. v. X 的分布律为

X	0	1
P	q	p

$0<p<1,p+q=1$

称 r. v. X 服从〈0-1〉分布,记为 $X\sim$〈0-1〉分布或 $X\sim B(1,p)$.

一个随机试验仅有两种结果:A 和 $\overline{A}$,定义随机变量

$$X=\begin{cases}1, & A\text{ 出现}\\ 0, & \overline{A}\text{ 出现}\end{cases}$$

$P(A)=p,P(\overline{A})=q=1-p$,即 $X\sim$〈0-1〉分布.

2. 伯努利试验,二项分布

如果随机试验 E 满足:将一个试验在相同条件下重复进行 n 次,(1)各次试验仅有两个试验结果 A 和 $\overline{A}$,事件 A 的概率在各次试验中保持不变,$P(A)=p,P(\overline{A})=1-p$;(2)各次试验的结果互不影响,称随机试验 E 为 n 次伯努利试验(概型).

定理 1 在 n 次伯努利试验 E 中,事件 A 出现的次数 X 的分布律为