漢譯

斯蓋二氏解析幾何學

上海新亞

目 次

斯 蓋 二 氏

解 析 幾 何 學

第 一 章

代 數 及 三 角 之 復 習

1. 數. 在代數運算中所遇之數有二,曰實數及虛數.

一數之平方爲正數者,此數稱爲實數. 零亦爲實數.

一數之平方爲負數者,此數稱爲純虛數. 任何純虛數可化爲負數之平方根,即可寫作 $b\sqrt{-1}$ 之形式. 其中 b 表實數,而 $(\sqrt{-1})^2=-1$.

一數之形式爲 $a+b\sqrt{-1}$, 而 a, b 均爲實數,且 b 不爲零者曰虛數或複數. 凡虛數之平方仍爲虛數, 如

$$(a+b\sqrt{-1})^2=a^2-b^2+2ab\sqrt{-1},$$

若 a 不爲零,此數爲虛數.

2. 常數. 一數量,其值恆固定不變者,曰常數.

數值常數或絕對常數在任何問題中,其數值始終不變, 如 $2, -3, \sqrt{7}, \pi$ 等.

任意常數或參數在任何問題中,可指定爲一任意合理之數值. 既指定後,則始終不變.

任意常數恆以字母之首先數個表之。如記號尙嫌不足,可於文字右上角加撇,或於右下角加註添數,或二者同時用之。

用撇

a'(讀若 a 撇), a''(讀若 a 二撇), a'''(讀若 a 三撇):皆爲不同常數。

用添數

b_1(讀若 b 一), b_2(讀若 b 二):亦爲不同常數。

二種兼用

c_1'(讀若 c 一撇), c_3''(讀若 c 三陳撇):亦爲不同常數。

3. 二次徵式. 任何二次式可簡化爲下列之徵式

$$Ax^2+Bx+C=0 \tag{1}$$

其中 x 爲未知數,而係數 A, B, C 爲任意常數. A, B, C 可表任何數值,惟 A 不爲零. 因若 A 等於零,則 (1) 不爲二次式矣. C 稱爲**常數項.**

(1) 之左端

$$Ax^2+Bx+C \tag{2}$$

稱爲**二次徵式.** 任何二次式均可化作 (2) 之徵式, x 爲未知數, B^2-4AC 爲 (1) 或 (2) 之**判別式**, 通常以 $\triangle$ 表之.

故二次徵式之判別式 $\triangle$, 等於未知數一次冪係數之平方,減去二次冪係數與常數項乘積之四倍.

若以二數值代入二次式中之未知數,而能使二次式之值爲零者,此二數值稱爲二次式之**根**.

二次式 (2) 之根,亦卽二次方程式 (1) 之根,二次方程式之根可稱爲適合於方程式.

在代數學中已證得 (2) 或 (1) 有二根 x_1 及 x_2. 解 (1) 得

$$\begin{cases} x_1=-\dfrac{B}{2A}+\dfrac{1}{2A}\sqrt{B^2-4AC}, \\ x_2=-\dfrac{B}{2A}-\dfrac{1}{2A}\sqrt{B^2-4AC}. \end{cases} \tag{3}$$

二式相加,得

(4) $$x_1+x_2=-\frac{B}{A}.$$

二式相乘,得

(5) $$x_1x_2=\frac{C}{A}.$$

因此得下之

定理 I. 二次方程式二根之和,等於未知數一次冪之反號係數,除以二次冪係數之商.

二根之積等於常數項除以二次冪係數之商.

二次式 (2) 可寫為

(6) $$Ax^2+Bx+C\equiv^* A(x-x_1)(x-x_2).$$

將(6)之右端展開,以 (4), (5) 兩式之值代入,即可證之.

例如 $3x^2-4x+1=0$ 之二根為 1 及 $\frac{1}{3}$ 故得恆等式 $3x^2-4x+1\equiv 3(x-1)(x-\frac{1}{3})$.

當 A, B, C 為實數時二根 x_1 及 x_2 之數值 (§ 1), 全恃判別式以定其性質. 今述之於

定理 II. 若二次式之係數為實數,判別式為 △,則

當 △ 為正時,二根為不相等之二實數;

當 △ 為零時,二根為相等之二實數;

當 △ 為負時,二根為虛數.

定理 II 更可寫為僅表實數之三種形式,即

(7) $$\begin{cases}\text{若 △ 為正,從(6)} & Ax^2+Bx+C\equiv A(x-x_1)(x-x_2);\\ \text{若 △ 為零,從(6)} & Ax^2+Bx+C\equiv A(x-x_1)^2;\\ \text{若 △ 為負,} & Ax^2+Bx+C\equiv A\left[\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2+\frac{4AC-B^2}{4A^2}\right].\end{cases}$$

* 符號 ≡ 為恆等,即示左右二式之值恆同,惟形式各異.

最後一恆等式可證之如下:

$$Ax^2+Bx+C\equiv A\left(x^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}\right)$$
$$\equiv A\left(x^2+\frac{B}{A}x+\frac{B^2}{4A^2}+\frac{C}{A}-\frac{B^2}{4A^2}\right).$$

括弧中加減 $\frac{B^2}{4A^2}$

$$\therefore\quad Ax^2+Bx+C\equiv A\left[\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2+\frac{4AC-B^2}{4A^2}\right].\qquad Q.\ E.\ D.$$

4. 特殊二次式. 在 § 3 之(1)中,若係數 B 及 C 有一個或兩個同時爲零時,(1) 稱爲**特殊二次式.**

第一款 $C=0$.

方程式 (1) 可分解因式

(1) $$Ax^2+Bx\equiv x(Ax+B)=0$$

得二根 $x_1=0, x_2=-\frac{B}{A}$. 故若二次方程式之常數項爲零時,有一根爲零. 其逆理亦成立,因在 § 3 之 (1) 中,當 $x=0$ 時, C 應等於零.

第二款 $B=0$.

方程式 (1) 可化爲

(2) $$Ax^2+C=0.$$

從頁 3 之定理 I, $x_1+x_2=0$, 即

(3) $$x_1=-x_2.$$

故若二次方程式之未知數一次冪之係數爲零時, 二根之數值相等,符號相反.其逆理亦成立,因二根之和旣爲零,從定理 I, $B=0$.

第三款 $B=C=0$.

方程式 (1) 可化爲

(4) $$Ax^2=0.$$

故二根均爲零,因從假設 A 旣不爲零,必 $x^2=0$.

5. 二次式之二根有關係時之情形.

若二次徵式

$$Ax^2+Bx+C=0$$

之二根 x_1 及 x_2 有關係時,則係數 A, B 及 C 亦必有相當之關係式存在.

例如,若二根相等,即 $x_1=x_2$ 則從 頁 3 定理 II 得 $B^2-4AC=0$.

再若一根爲零,則 $x_1x_2=0$, 故從 頁 3 定理 I 得 $C=0$.

此二種相當關係可列成二行對照之:

二次徵式

根之關係	係數之關係式

在許多問題中,諸係數常含有一個或多個任意常數者,則可從根之關係而求得其係數之關係式.下列諸例,即其解法.

例 1. 方程式

(1) $$2x^2-6x+k^2-3k-4=0$$

之一根爲零,參數 k 應爲何值?

解 已知 $A=2, B=-6, C=k^2-3k-4$. 從頁 4 第一款,若一根爲零, C 亦應爲零.

$$\therefore \quad k^2-3k-4=0.$$

解之, $k=4$ 或 -1. 答.

例 2. 方程式

$$kx^2+2kx-4x=2-3k$$

之二根爲相等實數, k 應爲何值?

解 將所設方程式化爲徵式,得

(2) $$kx^2+(2k-4)x+(3k-2)=0$$

因此 $A=k, \quad B=2k-4, \quad C=3k-2.$

計算判別式 $\triangle$, 得

$$\triangle=(2k-4)^2-4k(3k-2)$$
$$=-8k^2-8k+16=-8(k^2+k-2).$$

從頁 3 定理 II, 若二根爲相等實數, 判別式 $\triangle$ 應爲零.

$$\therefore\quad k^2+k-2=0.$$

解之, $k=-2$ 或 1. 答.

以 k 之值代入 (2) 驗算:

當 $k=-2$ 時, (2) 化爲 $-2x^2-8x-8=0$, 或 $-2(x+2)^2=0$;

當 $k=1$ 時, (2) 化爲 $x^2-2x+1=0$, 或 $(x-1)^2=0$.

故 k 等於上列二值時, (2) 左端可化爲頁 3 所示(7) 之形式.

例 3. 若方程式

$$(b^2+a^2m^2)y^2+2a^2kmy+a^2k^2-a^2b^2=0 \tag{3}$$

之二根相等, a, b, k 及 m 之關係式爲何?

解 (3) 已爲二次徵式, 而

$$A=b^2+a^2m^2,\qquad B=2a^2km,\qquad C=a^2k^2-a^2b^2.$$

從頁 3 定理 II, 判別式 $\triangle$ 應等於零; 故

$$\triangle=4a^4k^2m^2-4(b^2+a^2m^2)(a^2k^2-a^2b^2)=0.$$

化簡, $a^2b^2(k^2-a^2m^2-b^2)=0.$ 答.

例 4. 下列聯立方程式

$$3x+4y=k, \tag{4}$$

$$x^2+y^2=25 \tag{5}$$

之二組解答相同, k 應爲何值?

解 從 (4) 求 y, 得

$$y=\tfrac{1}{4}(k-3x). \tag{6}$$

代入 (5) 並整理之,得

(7) $$25x^2-6kx+k^2-400=0.$$

設 (7) 之二根為 x_1 及 x_2, 代入 (6) 得 y 之二對應值 y_1 及 y_2, 卽

(8) $$y_1=\tfrac{1}{4}(k-3x_1),\qquad y_2=\tfrac{1}{4}(k-3x_2).$$

於是 (4) 及 (5) 有二組公共解答 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2),但依題意二組解答相同,故必

(9) $$x_1=x_2\ 及\ y_1=y_2.$$

若前一式 $(x_1=x_2)$ 正確,則從 (8) y_1 及 y_2 亦相等.

故 (4) 及 (5) 之公共解答當及僅當 (7) 之二根相等時為相同;卽 (7) 之判別式應等於零 (頁 3 定理 II).

$$\therefore\quad \triangle=36k^2-100(k^2-400)=0.$$

解之, $$k^2=625,$$

$$k=25\ 或\ -25.\qquad 答.$$

驗算 以 k 之值代入 (7),

當 $k=25$, (7) 化為 $x^2-6x+9=0$,

或 $(x-3)^2=0$; $\therefore\ x=3$;

當 $k=-25$, (7) 化為 $x^2+6x+9=0$,

或 $(x+3)^2=0$; $\therefore\ x=-3$.

再以 k, x 之值代入 (6),

當 $k=25$ 及 $x=3$, 得 $y=\tfrac{1}{4}(25-9)=4$;

當 $k=-25$ 及 $x=-3$, 得 $y=\tfrac{1}{4}(-25+9)=-4$.

故每一 k 之值,使 (4) 及 (5) 之公共解答相同,卽

若 $k=25$, 公共解答為 $x=3$, $y=4$;

若 $k=-25$, 公共解答為 $x=-3$, $y=-4$. *Q. E. D.*

習　題

1. 計算下列二次式之判別式，求其二根之和，差及其根之性質，並寫作頁 4 (7)之形式.

(a) $2x^2-6x+4.$

(b) $x^2-9x-10.$

(c) $1-x-x^2.$

(d) $4x^2-4x+1.$

(e) $5x^2+10x+5.$

(f) $3x^2-5x-22.$

(g) $2x^2+13.$

(h) $9x^2-6x+1.$

(i) $5x^2-x-1.$

(j) $7x^2-6x-1.$

(k) $3x^2-5.$

(l) $2x^2+x-8.$

(m) $2x^2+x+8.$

(n) $6x^2-x-5.$

(o) $10x^2+60x+90.$

(p) $7x^2+7x+\frac{7}{4}.$

2. k 應為何種實數，方足使下列二次方程式之一根為指定之值？

一根為零：

(a) $6x^2+5kx-3k^2+3=0.$ 　答. $k=\pm 1.$

(b) $2k-3x^2+6x-k^2+3=0.$ 　答. $k=-1$ 或 $3.$

(c) $x^2+10x+k^2+3=0.$ 　答. 無

(d) $10x^2-mx+3k^2-8k+2=0.$ 　答. $k=\frac{4}{3}\pm\frac{1}{3}\sqrt{10}.$

一根為 -2：

(e) $x^2-2kx+3=0.$ 　答. $k=-\frac{7}{4}.$

(f) $kx^2-x+3k^2-1=0.$ 　答. $k=-\frac{1}{3}$ 或 $-1.$

(g) $k^2x^2+6x=k^2-16.$ 　答. 無

(h) $kx^2+2kx=-3.$ 　答. 無

(i) $10x^2-7kx+k^2+9=0.$ 　答. $k=-7.$

3. 下列二次方程式之二根均為零，k 及 m 應為何值？

(a) $5x^2+mx+k-5=x.$ 　答. $k=5,\ m=1.$

(b) $x^2+(3k-m)x+k^2-4=0.$ 　答. $k=\pm 2,\ m=\pm 6.$

(c) $2x^2+(m^2+1)x+k^2=0.$ 　答. 無

(d) $x^2+(m^2+2k-3m)x+4k-6m=0.$ 　答. $k=0,\ m=0.$

(e) $t^2+(m^2+k^2-5)t+k+m+1=0.$ 　答. $k=1,\ m=-2.$
$k=-2,\ m=1.$

4. 下列二次方程式之二根相等，參數應為何值？證驗所得結果是否真確.

(a) $kx^2-3x-1=0.$ 　答. $k=-\frac{9}{4}.$

018-46C1

(b) $x^2-kx+9=0.$ 答. $k=\pm 6.$

(c) $2kx^2+3kx+12=0.$ 答. $k=\frac{32}{3}.$

(d) $2x^2+kx-1=0.$ 答. 無

(e) $5x^2-3x+5k^2=0.$ 答. $k=\pm\frac{3}{10}.$

(f) $x^2+kx+k^2+2=0.$ 答. 無

(g) $x^2-2kx-k-\frac{1}{4}=0.$ 答. $k=-\frac{1}{2}.$

(h) $x^2+2bx+2b^2+3b-4=0.$ 答. $b=-4$ 或 $1.$

(i) $(m+2)x^2-2mx+1=0.$ 答. $m=-1$ 或 $2.$

(j) $(m^2+4)x^2+3x+2=0.$ 答. 無

(k) $x^2+(l-3)x-1=0.$ 答. 無

(l) $(c^2-8)y^2-(2c-1)y+\frac{1}{2}=0.$ 答. 無

(m) $az^2+2(a+3)z+16=0.$ 答. $a=1$ 或 $9.$

5. 下列二次方程式之二根相等，求其係数之關係式。

(a) $m^2x^2+2kmx-2px=-k^2.$ 答. $p(p-2km)=0.$

(b) $x^2+2mpx+2bp=0.$ 答. $p(m^2p-2b)=0.$

(c) $2mx^2+2bx+a^2=0.$ 答 $b^2=2a^2m.$

(d) $(1+m^2)x^2+2bmx+(b^2-r^2)=0.$ 答. $b^2=r^2(1+m^2).$

(e) $(b^2-a^2m^2)y^2-2b^2ky=a^2b^2m^2-b^2k^2.$ 答. $a^2b^2m^2(k^2-a^2m^2+b^2)=0.$

(f) $(A+m^2B)x^2+2bmBx+b^2B+C=0.$ 答. $b^2AB+m^2BC+AC=0.$

6. 參數應爲何値，方可使下列聯立方程式之二組解答相同？

(a) $x+2y=k,\ x^2+y^2=5.$ 答. $k=\pm 5.$

(b) $y=mx-1,\ x^2=4y.$ 答. $m=\pm 1.$

(c) $2x-3y=b,\ x^2+2x=3y.$ 答. $b=0.$

(d) $y=mx+10,\ x^2+y^2=10.$ 答. $m=\pm 3.$

(e) $lx+y-2=0,\ x^2-8y=0.$ 答. 無

(f) $x+4y=c,\ x^2+2y^2=9.$ 答. $c=\pm 9.$

(g) $x^2+y^2-x-2y=0,\ x+2y=c.$ 答. $c=0$ 或 $5.$

(h) $x^2+4y^2-8x=0,\ mx-y-2m=0.$ 答. 無

(i) $x^2+y^2-k=0,\ 3x-4y=25.$ 答. $k=25.$

(j) $x^2-y^2+2x-y=3,\ 4x+y=c.$ 答. $c=-12$ 或 $3.$

(k) $2xy-3x-y=0,\ y+3x+k=0.$ 答. $k=-6$ 或 $0.$

(l) $x^2+4y^2-8y=0,\ x=c.$ 答. $c=\pm 2.$

(m) $x^2+4y^2-8y=0,\ y=b.$ 答. $b=0, 2.$

(n) $2x^2+3y^2=35,\ 4x+9y=k.$ 答. $k=\pm 35.$

(o) $x^2+xy+2x+y=0,\ y=-2x+b.$ 答. $b=-4$ 或 $0.$

7. 若下列聯立方程式之二組解答相同，其係數之關係式若何？

(a) $bx+ay=ab,\ y^2=2px.$ 答. $ap(2b^2+ap)=0.$

(b) $y=mx+b,\ Ax^2+By=0.$ 答. $B(m^2B-4bA)=0.$

(c) $y=m(x-a),\ By^2+Dx=0.$ 答. $D(4am^2B-D)=0.$

(d) $bx+ay=ab,\ 2xy+c^2=0.$ 答. $ab(ab+2c^2)=0.$

(e) $kx-y=c,\ Ax^2+By^2=C.$ 答. $c^2AB-k^2BC-AC=0.$

(f) $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p,\ x^2+y^2=r^2.$ 答. $p^2=r^2.$

6. 變數. 一數量在一問題中可表任意數值者曰變數.但此數量之變化,在特殊問題內，亦有限制,背視問題之性質而定. 此種限制,以不等式示之爲最便.

例如變數 x 之值在 -2 及 5 之間，即 x 大於 -2* 而小於 6, 可記爲

$$x>-2,\qquad x<5.$$

若記爲簡式,則

$$-2<x<5.$$

同理,若問題條件限制變數 x 爲小於或等於 -2 之負數,及大於或等於 5 之正數,則

$$x<-2 \text{ 或 } x=-2, \text{ 及 } x>5 \text{ 或 } x=5.$$

記爲簡式

$$x\leqq -2 \text{及} x\geqq 5.$$

7. 二次式之符號變化. 任何二次式中之變數，若以各種數值代入，其二次式之符號可因之而決定. 此種代數符號之決定,甚爲重要. 此種問題之討論,全恃前者已知之不等符號(大於及小於). 其要點卽爲下列之敍述:

若 a 爲常數, x 爲變數, 而 a, x 均爲實數, 則

---

* 實數(§ 1)之大小可解釋如下:當 $a-b$ 爲正數時, a 大於 b; $a-b$ 爲負數時, a 小於 b. 因因任何負數均小於正數;若 a, b 均爲負數,當 a 之絕對值小於 b 之絕對值時,則 a 大於 b. 如 $3<5$, 但 $-3>-5$. 故改變不等式兩方之符號,不等符號應反向.

$$(1) \qquad \begin{cases} \text{當 } x<a \text{ 時，} x-a \text{ 爲負數；} \\ \text{當 } x>a \text{ 時，} x-a \text{ 爲正數。} \end{cases}$$

應用上列敍述及頁 3 之恆等式 (7) 可證

定理 III. 若二次式之判別式爲正，則對於在二根間之諸變數值，二次式* 與二次冪之係數符號相反，在其餘之數值時符號相同。

若判別式爲零或爲負，不論變數爲何種實數，二次式與二次冪之係數符號恆相同。

證 設 x 爲變數，二次徵式之形式爲 § 3, (1), 從 (7) 得

第一款 若 Δ 爲正 $Ax^2+Bx+C\equiv A(x-x_1)(x-x_2)$.

第二款 若 Δ 爲零 $Ax^2+Bx+C\equiv A(x-x_1)^2$,

第三款 若 Δ 爲負 $Ax^2+Bx+C\equiv A\left[\left(x+\dfrac{B}{2A}\right)^2+\dfrac{4AC-B^2}{4A^2}\right]$.

上列三款今分別論之。

第一款 因二根不相等，設 $x_1<x_2$，則從 (1)

當 $x_1<x<x_2$ 時，$x-x_1$ 爲正，$x-x_2$ 爲負，而 $(x-x_1)(x-x_2)$ 爲負；

當 $x<x_1$ 或 $x>x_2$ 時，$x-x_1$ 及 $x-x_2$ 皆爲負或皆爲正，而 $(x-x_1)(x-x_2)$ 爲正。

故二次式之符號在第一情形下爲 $-A$，而在另一情形下則爲 A.

第二款 因 $(x-x_1)^2$ 恆爲正，故二次式之符號與 A 相同。

第三款 因 Δ 爲負，則 $4AC-B^2\equiv-\Delta$ 爲正；故方括弧中常爲正數，而二次式之符號與 A 相同。 *Q. E. D.*

例如二次式 $2t^2-3t+1$.

此式 $\Delta=9-8=+1$, $A=2$, 二根爲 $\frac{1}{2}$ 及 1.

$$\therefore\quad 2t^2-3t+1\equiv 2(t-\tfrac{1}{2})(t-1).$$

* 假定變數之值均爲實數。又二次式之根能使二次式之值爲零，故此種數值應除去。

設以 t 之實數值代入上之二次式，則

當 $\frac{1}{2}<t<1$ 時，　　二次式 $2t^2-3t+1<0$;

當 $t<\frac{1}{2}$ 或 $t>1$ 時，　　二次式 $2t^2-3t+1>0$.

再視 r 之二次式

$$3r^2+4r+9.$$

$\Delta=16-108=-92$, $A=3$, 由定理 III, 以 r 之任何實數代入時,二次式之值恆爲正。

定理 III 之應用． 下列諸例卽定理 III 之應用．

例1． 下列根式爲實數,試決定變數之實數值．

(a) $\sqrt{3-2x-x^2}$,　　　(b) $\sqrt{2y^2+3y+9}$.

解　試觀根號中之二次式:

(a) $\Delta=4+12=16$, $A=-1$, 二根爲 1 及 -3.

應用定理 III.

當 $-3<x<1$ 時，　　二次式 $3-2x-x^2>0$;

當 $x<-3$ 或 $x>1$ 時，　二次式 $3-2x-x^2<0$.

從題中條件,二次式須爲正或零． 故 $-3\leqq x\leqq 1$.　　答．

(b) $\Delta=9-72=-63$, $A=2$, 由定理 III, 二次式爲正，故不論 y 爲何種實數,根式恆爲實數．　答．

例 2. 參數 k 應爲何值,可使二次方程式

(2)
$$kx^2+2kx-4x=2-3k$$

之二根爲 (a) 不相等二實數? (b) 虛數?

解　將原式化爲二次徵式:

$$kx^2+(2k-4)x+3k-2=0.$$

從此方程式得

(3)
$$\Delta\equiv B^2-4AC=-8(k^2+k-2).$$
[§ 5, 例 2]

從頁 3 定理 II,

(a)　若　$-8(k^2+k-2)>0$,　　二根爲不相等之實數;

(b)　若　$-8(k^2+k-2)<0$,　　二根爲虛數.

再應用定理 III 於二次式

$$-8(k^2+k-2),$$

得 $\triangle=64+512=576$,　$A=-8$, 二根爲 -2 及 1.

當　$-2<k<1$ 時,　　二次式 $-8(k^2+k-2)>0$;

當　$k<-2$ 或 $k>1$ 時,　二次式 $-8(k^2+k-2)<0$.

因此

(a)　若 $-2<k<1$,　　(2)之二根爲不相等之實數;

(b)　若 $k<-2$ 或 $k>1$ 時,　(2)之二根爲虛數.　　答.

例 3.　證 m 爲任何數值時,聯立方程式

$$y=mx+3 \tag{4}$$

$$4x^2+y^2+6x-16=0 \tag{5}$$

有二組不同之實數解答.

解　從 (4), 以 y 之值代入 (5), 並列爲二次徵式,得

$$(4+m^2)x^2+(6m+6)x-7=0. \tag{6}$$

計算 (6) 之判別式,除去因數 $+4$, 得

$$16m^2+18m+37. \tag{7}$$

從 (7) 應用 § 7 定理 III,

$$\triangle=324-64\cdot37 \text{ 爲負, 而 } A=16.$$

故 m 爲任何實數時,二次式(7)有正值.因此由 § 3 定理 II, (6) 之二根恆爲不相等之實數.即 (6) 有二實根 x_1 及 x_2, 再由 (4) 可得 y 之二個對應實數値 y_1 及 y_2, 故知 m 爲任何實數時 (4) 及 (5) 有二組不同之實數解 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2).　　*Q. E. D*

習　題

1. 試作不等式，以表下列指定之變數能在規定之界限內。

(a) x 有自 0 至 5 之任何值.

(b) y 有任何正值。

(c) t 有任何負值。

(d) x 有小於 -2 或大於 -1 之任何值.

(e) r 有自 -3 至 8 之任何值。

(f) z 有任何負值，或不小於 3 之正值.

(g) x 有不小於 -8 及不大於 2 之任何值。

2. 在 §5 習題 1 中，當變數爲任何數值時，試決定諸二次式之符號。

3. 在 §5 習題 1 中，若諸二次式之平方根爲實數時，試決定變數之實數值。

4. 在 §5 習題 4 中，試決定參數之實數值而使諸方程式之根爲 (a) 不相等二實數，(b) 虛數。

5. 在 §5 習題 6 中，試決定參數之實數值而使諸聯立方程式之二組公解爲 (a) 不相同之實數，(b) 虛數。

6. 當變數爲任何數值時，試決定三次式

$$2(x+1)(x-2)(x-4)$$

之代數符號。

提示：三次式之三根依次爲 $-1, 2, 4$. 若 $x<-1$，每個因式爲負 [§ 7,(1)]，而三次式爲負等等。

答．若 $x<-1$，三次式 <0；$-1<x<2$，三次式 >0；$2<x<4$，三次式 <0；$4<x$，三次式 >0.

7. 當變數爲任何實數時，試決定下列代數形之符號。

提示：由代數學知有實數係數之任何代數形可分解爲一次及二次之實數因式，每個因式之符號可用 § 7 (1) 及定理 III 決定之．先將各實根依次排列，再視變數之值之小於二根，在二根之間，及大於二根時之情形，如例 6.

(a) $(x+1)(2x^2-4x+7)$.

(b) $(x^2-2x-3)(x^3-4x^2)$.

(c) $(3x+8)(x^2-4x+4)(x^3-1)$.

(d) $(2x^2+3)(x^2-4)(x^4-1)$.

(e) $(2x+3)(x-1)(x+2)(x-3)$.

(f) $(x^2-9)(x^2-16)(x^2-25)$.

(g) $(3x^2-12)(2-x)(3-2x)(5x+4)$.

(h) $(x-1)^2(3+2x)(4-5x)(6-x)^3$.

(i) $7(x^2-4)(9-x^2)(16-x^2)$.

(j) $(x^2-8)(2x^2-8)(3x^2-27)$.

(k) $(2x+8)^2((9-3x)(7-6x)(12-11x)$.

8. 無窮大根． 設二次方程式

$$Ax^2+Bx+C=0 \tag{1}$$

之二根爲 x_1 及 x_2 [§ 3, (3)].

則從 (1) 所得之反商方程式

$$(2) \qquad Cx^2+Bx+A=0$$

之二根*爲 $\frac{1}{x_1}$ 及 $\frac{1}{x_2}$, 此二根爲 (1) 二根之反商.

設 B, C 之值†爲確定,而任 A 之值漸次減小以至於零,則從(2)因 $\frac{A}{C}$ (§ 3, 定理 I) 爲二根之積,故此積亦必接近於零.因之 (2) 必有一根漸近於零.此根之反商,即 (1) 之根必漸次增大以至無窮.

再設 (1) 及 (2) 中, C 之值†爲確定,而任 B 及 A 之值漸近於零,則從(2),二根之和 $-\frac{B}{C}$ 及其積 $\frac{A}{C}$ 均接近於零.因此二根皆漸近於零.此二根之反商,即 (1) 之根,皆漸次增大以至無窮.

從上所述理由,得

定理 IV. 若二次方程式二次冪之係數漸次變化而以零爲極限,則有一根變爲無窮大‡.若一次冪係數亦漸次變化而以零爲極限,則二根均變爲無窮大.

例 1. k 應接近於何數爲極限,方可使

$$3x^2+2kx-k^2x^2-3-2kx^2=0$$

之一根變爲無窮大?

解 將方程式列爲徵式得

$$(k^2+2k-3)x^2-2kx+3=0.$$

---

* 此定理在代數學中已證明,今再證之:

以 $\frac{1}{x_1}$ 及 $\frac{1}{x_2}$ 爲二根之方程式爲 $\left(x-\frac{1}{x_1}\right)\left(x-\frac{1}{x_2}\right)=0$.

化簡得 $x_1x_2x^2-(x_1+x_2)x+1=0$.

從 § 3, 定理 I, $x_1x_2=\frac{C}{A}$, $x_1+x_2=-\frac{B}{A}$. 以此二值代入上式且以 A 乘之卽得(2).

† C 之值不爲零.

‡ 一變數之絕對值漸次增加而大於任何假定之數值,則可稱該變數變爲無窮大.