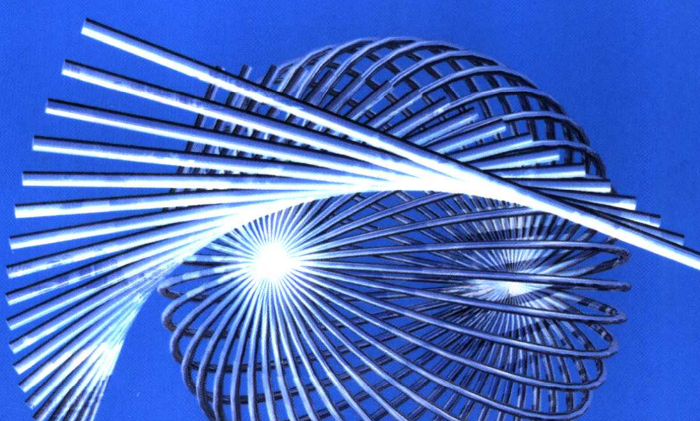
高等学校课程教材

高等数学

刘金铎　胡去非　葛正洪　主编



中国标准出版社

高等学校课程教材

高等数学

刘金铎
胡去非　主编
葛正洪

中国标准出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/刘金铎，　胡去非等编．—北京：中国标准出版社，2001.9

ISBN 7-5066-2521-0

Ⅰ．高…　Ⅱ．①刘…②胡…　Ⅲ．高等数学—高等学校—教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 055925 号

中国标准出版社出版

北京复兴门外三里河北街 16 号

邮政编码：100045

电话：68523946　68517548

中国标准出版社秦皇岛印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

开本 880×1230　1/32　印张 14¼　字数 403 千字

2001 年 9 月第一版　2001 年 9 月第一次印刷

*

印数 1—7 500　定价 26.00 元

网址 www.bzcbs.com

前　言

本书是工程类高职高专高等数学教材，也可供经贸类及文科类各专业选用。它是根据教育部《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》及编者数年来在高职高专数学教学与教改经验的基础上，并借鉴国内同类教材编写而成。

近年来的教学实践与研究表明，高职高专的数学教育必须与高职高专的人才培养模式紧密联系，使数学教学成为培养应用型人才的一个重要环节。因而本书的编写不仅强调有益于学生掌握高等数学的基本概念、基本方法与基本技巧，而且还强调培养学生利用数学工具分析问题解决实际问题的能力。

本书在编写上尽量体现以下几个特点：

1. 从高职高专的教改要求出发，适度弱化一些纯数学理论及一些有难度的定理的证明，而代之以直观的几何说明。

2. 强调培养学生的应用意识与应用能力，增加数学建模实例与训练，在例题与习题选编上，侧重于与实际问题的联系，未编入理论性较强的证明题与概念题。

3. 本书编入了函数、微积分在经济方面的应用。

4. 本书编入了数学软件 Mathematica 的使用方法，以使学生获得更快捷解决问题的能力。

本教材的编写，参考了高等教育出版社出版：同济大学应用数学系编本科少学时《高等数学》，盛祥耀主编《高等数学》，李志煦等编著的《微积分》。

本教材的教学学时为 110 学时，标有 * 号的内容可根据专业不同进行取舍。

本书各章分别由刘金铎(第一、七章)、葛正洪(第二、三章)、汪永高(第四、五、六章)、胡去非(第九、十、十一章)、贾敬(第八、十二章)、闫守峰(第十三章)执笔。刘艳、王文祥、王涛、刘海生、王昕等人为本书编选了习题。全书由刘金铎、胡去非统稿定稿。

本书的编写得到了南开大学梁科教授与华南师范大学易法槐教授的支持与多方指教,在此表示衷心的谢意。

本书中的不妥及错误之处,真诚希望读者批评指正。

编者

2001 年 8 月

目　　录

注：带＊为选学内容。

第一章 函数与极限

函数与极限都是近代数学中最重要的基本概念. 高等数学就是以函数为主要研究对象,以函数的微分与积分理论为主要研究内容的数学课程,而极限理论是建立函数微分学与积分学的基础. 本章的任务是首先在初等数学关于函数知识的基础上进一步讨论函数,然后介绍极限、无穷小、无穷大等概念,并建立极限运算法则,最后以极限为工具讨论函数的连续性的概念.

第一节 函 数

一、函数的概念

变量与函数的概念抽象于物质世界的各种运动与变化,变量变化过程中的相依关系产生了函数概念.

1. 函数的定义

定义 设有两个变量 x 和 y,若当变量 x 在实数的某一范围 D 内,任意取定一个数值时,变量 y 按照一定的法则 f 总有唯一确定的数值与之对应,则称 f 是定义在 D 上的函数,记为

$$y = f(x) \quad x \in D,$$

其中变量 x 称为**自变量**,变量 y 称为**因变量**,x 的取值范围 D 称为这个函数的**定义域**.

当 x 取定数值 $x_0 \in D$ 时,通过对应法则 f,与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$在 x_0 处的函数值,记为 $f(x_0)$或 $y|_{x=x_0}$. 函数值的集合称为函数的**值域**,记为 M,即

$$M=\{y|y=f(x),x\in D\}.$$

通常对于确定的 $x_0\in D$,函数 y 有唯一确定的值 y_0 与之对应,称函数 $y=f(x)$在点 x_0 有定义;若函数 y 在某个区间上每一点都有定

义，则称函数在该区间上有定义.

2. 函数的两个要素

不难看出，函数是由定义域与对应法则所确定的，所以定义域与对应法则为函数的两个要素. 对于两个函数当且仅当它们的定义域与对应法则都分别相同时，它们才表示同一函数. 至于自变量与因变量用什么字母表示，则无关紧要.

因此在给出一个函数时，一般都应标明其定义域，即自变量取值的允许范围，这可由所讨论问题的实际意义所确定. 凡是未标明实际意义的函数，其定义域是使该式有意义的自变量的取值范围. 通常使用不等式、区间或集合来表示定义域. 例如 $y=x^2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，或表示为 $-\infty<x<+\infty$，又可用实数集 R 表示.

例 1 确定函数 $f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}+\ln(x-1)$ 的定义域.

解 该函数的定义域应使式中的两项同时有意义，即满足不等式组

$$\begin{cases}3+2x-x^2\geqslant 0,\\ x-1>0\end{cases}$$

的 x 值的全体.

解此不等式组，得函数的定义域

$$1<x\leqslant 3,\quad 即\quad (1,3],$$

用集合的形式表示为 $D=\{x|x\in(1,3]\}$.

在后面的课程中，常在定义域中某定点 x_0 的邻近讨论函数的性质，为此我们引入邻域的概念.

设 δ 为一正数，点集 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称为**点 x_0 的 δ-邻域**，记为 $N(x_0,\delta)$；点集 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 称为**点 x_0 的去心 δ-邻域**，记为 $N(\hat{x}_0,\delta)$.

对于函数对应法则的作用，可以通过下面的例题加以体会.

例 2 设 $f(x)=x^3-2x+3$，求 $f(1)$，$f(-\frac{1}{a})$，$f(x+1)$.

解 $f(1)=1^3-2\cdot 1+3=2$，

$$f(-\frac{1}{a})=(-\frac{1}{a})^3-2(-\frac{1}{a})+3=-\frac{1}{a^3}+\frac{2}{a}+3,$$

$$f(x+1)=(x+1)^3-2(x+1)+3=x^3+3x^2+x+2.$$

例 3 设 $f(x+2)=x^2-2x$，求 $f(x)$.

解 令 $x+2=t$，则 $x=t-2$，于是

$$f(t)=(t-2)^2-2(t-2)=t^2-4t+4-2t+4=t^2-6t+8.$$

所以
$$f(x)=x^2-6x+8.$$

例 4 $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$ 不是相同的函数，$y=\sqrt{x}$ 与 $w=\sqrt{u}$ 是相同的函数.

二、函数的表示法

函数的表示法通常有三种：公式法、表格法和图示法. 对这些表达函数的方式的一般性介绍，在中学课程中已经进行，这里不再重复.

下面用分段函数这一名称来记述某些函数. 所谓分段函数也是用公式法描述的函数，但是它们在定义域的不同部分具有不同的对应法则. 例如已学过的绝对值函数 $y=|x|$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，定义式为

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0, \end{cases}$$

这个函数在 $(-\infty,0)$ 与 $[0,+\infty)$ 两个区间内各有不同的对应法则，这是一个构成较简单的分段函数.

例 5 某人以 250 m/min 的速率骑自行车外出，骑行 3 min 后，发现车胎气不足，打气耗费了 5 min 的时间，以后又以相同的速率骑行 10 min 到达目的地，求此人骑行的路程与时间的函数关系.

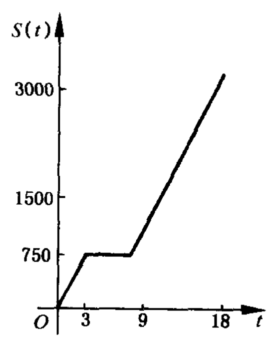


图 1-1

解 设骑行时间为 t（单位为 min）；路程函数为 $S=S(t)$（单位为 m）.

在时间段 $[0,3]$ 内，$S=250\,t$，

在时间段 $(3,8]$ 内，$S=750$，

在时间段 $(8,18]$ 内，$S=750+250(t-8)$.

所以 S 与 t 的函数关系可表示为

$$S(t)=\begin{cases}250\,t, & 0\leqslant t\leqslant 3,\\ 750, & 3<t\leqslant 8,\\ 750+250(t-8), & 8<t\leqslant 18.\end{cases}$$

用图形描述这个函数，如图 1-1 所示.

这个函数的定义域为$[0,18]$，要注意的是，这是一个函数，不是多个函数.

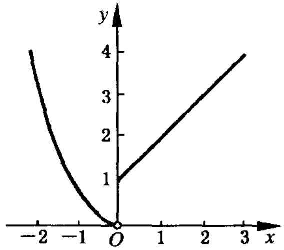


图 1-2

例 6 作函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ x+1, & x\geqslant 0\end{cases}$ 的图形，且求 $f(-1)$，$f(0)$，$f(2)$.

解 函数图形由图 1-2 所示. 因为 $-1\in(-\infty,0)$，$0\in[0,+\infty)$，$2\in[0,+\infty)$，所以，$f(-1)=1$，$f(0)=1$，$f(2)=3$.

在求分段函数的函数值时，应先确定自变量的取值所在范围，再按相应的对应法则进行计算.

三、函数的几种基本性状

设函数 $f(x)$在某区间 I 上有定义.

1. 有界性

若存在正数 M，使对于区间 I 上任意点 x，总成立$|f(x)|\leqslant M$，则称$f(x)$在 I 上**有界**. 如果这样的 M 不存在，则称 $f(x)$是区间 I 上的**无界函数**.

例如，当 $x\in(-\infty,+\infty)$时，恒有$|\sin x|\leqslant 1$，所以 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界. 而 $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$内无界.

2. 单调性

若对于区间 I 内任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$在 I 上**单调增加**；若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$在区间 I 上**单调减少**. 函数单调增加或单调减少的区间统称为**单调区间**.

3. 奇偶性

设 I 为关于原点对称的区间，若对于任意 $x\in I$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为**偶函数**；若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为**奇函数**.

4. 周期性

若存在不为零的数 T，使得对于任意 $x\in I, x+T\in I$，总有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**周期函数**. 通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期.

四、反函数

设 $y=f(x)$ 为定义在定义域 D 上的函数，其值域为 M. 若对于数集 M 中的每个数 y，数集 D 中都有唯一的一个数 x，使 $f(x)=y$，即说变量 x 是变量 y 的函数. 这个函数称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记为 $x=f^{-1}(y)$，其定义域为 M，值域为 D. 函数 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 二者图形相同.

习惯上人们总用 x 表示自变量，y 表示因变量，因而总将 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 用 $y=f^{-1}(x)$ 表示，此时，$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

五、初等函数

1. 基本初等函数

幂函数　$y=x^{\mu}$（μ 为任意常数）；

指数函数　$y=a^{x}(a>0, a\neq 1)$；

对数函数　$y=\log_{a}x(a>0, a\neq 1)$；

三角函数　$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

反三角函数　$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\mathrm{arccot}\, x$；

这五类函数统称为**基本初等函数**. 这些函数的定义域、性质及图形在中学已学过，在高等数学中还会进一步研究和应用它们.

2. 复合函数

设 $y=f(u)$，而 $u=\varphi(x)$，当 $\varphi(x)$ 的值域全部或部分落在 $f(u)$ 的定义域中，则 y 通过 u 成为 x 的函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$，称为以 x 为自变量，u 为中间变量的**复合函数**.

例 7　$y=u^2$ 与 $u=\sin x$ 复合而成的函数为 $y=\sin^2 x$，只要将 $u=\sin x$ 代入 $y=u^2$ 即可得到，其定义域为 $(-\infty, +\infty)$. 函数

$y=\sqrt{1-x^2}$由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=1-x^2$ 复合而成,其定义域为$[-1,1]$,它是 $u=1-x^2$ 定义域的一部分. $y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 不能构成一个复合函数.

例 8 设 $f(x)=x^2, g(x)=2^x$,求 $f[g(x)]$与 $g[f(x)]$.

解 $f[g(x)]=[g(x)]^2=(2^x)^2=2^{2x}$.

$g[f(x)]=2^{f(x)}=2^{x^2}$.

有时复合函数可能由三个或更多个函数构成,应学会正确分解复合函数的复合过程.

例 9 指出 $y=(2x+5)^{100}$与 $y=\sqrt{\log_a(\sin x+2^x)}$的复合过程.

解 $y=(2x+5)^{100}$是由 $y=u^{100}$与 $u=2x+5$ 复合而成的.

$y=\sqrt{\log_a(\sin x+2^x)}$是由 $y=\sqrt{u}$, $u=\log_a v$ 与 $v=\sin x+2^x$ 复合而成的.

3. 初等函数

由基本初等函数及常数经过有限次四则运算及有限次复合构成,并且可用一个数学式表示的函数,称为**初等函数**.例如例 9 中的两个函数.分段函数一般不是初等函数.

高等数学中所讨论的函数,绝大多数是初等函数.

六、建立函数关系举例

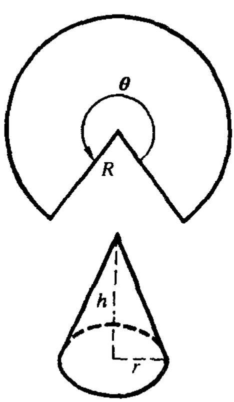


图 1-3

建立函数关系,或说用数学模型去描述几何、物理、经济等学科中实际问题的数量关系,这是一件有一定难度但又不能回避的工作.我们必须不断实践,总结经验,掌握使用适宜的数学工具解决实际问题的方法.

例 10 将一个圆心角为 θ,半径为 R 的圆扇形围成一个漏斗,试将漏斗的容积 V 表示成 θ 的函数(如图 1-3).

解 记漏斗的底半径为 r,高为 h,则由于漏斗的底圆周长与圆扇形的圆弧长相等,得

$$R\theta=2\pi r,$$

因而有 $r=\frac{R}{2\pi}\theta$.

又因漏斗的母线、底半径与高构成直角三角形，所以

$$h=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{R^2-\left(\frac{R}{2\pi}\theta\right)^2}$$
$$=\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-\theta^2}.$$

再由圆锥的体积公式，得

$$V=\frac{\pi}{3}r^2h=\frac{\pi}{3}\left(\frac{R}{2\pi}\theta\right)^2\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-\theta^2}=\frac{R^3}{24\pi^2}\theta^2\sqrt{4\pi^2-\theta^2}$$
$$(0<\theta<2\pi).$$

所求的函数关系为

$$V=\frac{R^3}{24\pi^2}\theta^2\sqrt{4\pi^2-\theta^2}\quad(0<\theta<2\pi).$$

例 11 由直线 $y=x$，$y=2-x$ 及 x 轴所围的等腰三角形，如图 1-4. 在底边上任取一点 $x\in[0,2]$，过 x 作垂直于 x 轴的直线，将图上阴影部分的面积表示成 x 的函数.

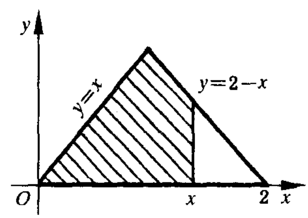


图 1-4

解 设阴影部分的面积为 A，当 $x\in[0,1)$ 时，$A=\frac{1}{2}x^2$，当 $x\in[1,2]$ 时，$A=1-\frac{1}{2}(2-x)^2$.

所以
$$A=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2, & x\in[0,1),\\ 2x-\frac{1}{2}x^2-1, & x\in[1,2].\end{cases}$$

例 12 齿轮与齿条啮合的运动，相当于节圆在齿条的节线上滚动. 若节圆半径为 a，求节圆上的一定点 A 的运动轨迹的方程(图 1-5).

解 这个轨迹应该是一个半径为 a 的圆，在一条直线上作无滑动的滚动时，圆上一定点 A 在平面上划出的图形，如图 1-5(b).

由图 1-5(b)可知，$OB=\overset{\frown}{AB}=at$，于是有

$$x=at-a\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=a(t-\sin t),$$

$$y=a+a\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=a(1-\cos t),$$

因此 A 点的运动轨迹的方程为

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \quad t\geqslant 0. \end{cases}$$

这条曲线称为摆线. 这时变量 y 与变量 x 都是参数 t 的函数,y 与 x 的函数关系是通过参数 t 建立的,因而称 y 与 x 的函数关系为由参数方程给出的函数.

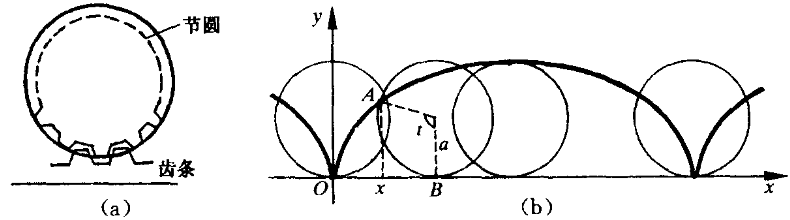


图 1-5

例 13(抵押贷款模型) 设二室一厅商品房价值 100000 元,王某自筹了40000 元,要购房还需要借款 60000 元,条件是每年还款一部分,25 年还清. 假如还不起,房子就归债权人,王某具有怎样的还款能力才能借款呢?

解 模型假设:

起始借款 60000 元,借款月利率 $r=0.01$,借期 n(月)$=25$(年)$\times 12$(月/年)$=300$(月),每月还 x 元,y_n 表示第 n 月末仍欠借主的钱.

模型建立:

$y_0=60000,$

$y_1=y_0(1+r)-x,$

$y_2=y_1(1+r)-x=y_0(1+r)^2-x[(1+r)+1],$

$y_3=y_2(1+r)-x=y_0(1+r)^3-x[(1+r)^2+(1+r)+1],$

……………………………………………………………………

$$\begin{aligned} y_n &=y_0(1+r)^n-x[(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}+\cdots+(1+r)+1] \\ &=y_0(1+r)^n-\frac{x[(1+r)^n-1]}{r}. \end{aligned}$$

当贷款还清时,$y_n=0$,可得