三角函数

上 海 教 育 出 版 社

三　角　函　数

中国数学会上海分会
中学数学研究委员会编

上 海 教 育 出 版 社

三　角　函　数
中国数学会上海分会
中学数学研究委员会编
上海教育出版社出版
（上海永福路123号）
福建人民出版社重印
福建省新华书店发行　福建新华印刷厂印刷
开本787×1092 1/32 印张2.375 字数54,000
1959年10月新1版 1978年10月福建第1次印刷
印数：1—200,000册
统一书号：7150·701　定价：0.20元

目　录

一 学习三角函数的基本知識

三角学和它的发展簡史

三角学的內容可分为两部分：第一部分是关于三角函数性质的研究，第二部分是三角形解法的研究.

三角学这一名詞是从希腊文翻譯过来的，它的原意是“三角形測量”或如一般的說法“解三角形”，根据三角形的已知元素(一边及两角，两边及一角或三边)求这三角形的未知元素(边与角).

三角学发展的最初几个阶段与最古的一門学科即天文学的发展有密切的关系. 天文学的产生首先是由于古代农业生产的需要，編著正确的历书. 又由于航海需要，根据天体的位置正确地确定船在大海中的航程，这些都需要天文学，而天文学的发展又需要三角形的測量，因此三角学科的最初知識就随着天文学而发展起来.

在现代建設事业中，基本建設的正确設計，就要依靠地形的測量和計算. 无論在哪一个建設的工地上，如矿山、农場、工厂、铁路、公路和水利工程等，測量队往往是一切建設队伍的先鋒，測量工作归根結底是解三角形.

这里可以說明，从三角学最早适应古代生产实踐上的需要而产生起，一直到适应现代建設工作的需要，三角学的測量，即解三角形，始終是三角学科的一个重要內容.

三角是数学学科中的一門. 它的基础是建筑在几何学相似

三角形性质上的，而它的表达、处理和研究方式則主要是代数的. 可以說，三角学是初步地把代数和几何两門学科联系了起来. 由于三角学采用了代数的方法，不仅它对三角形边角关系等性质的研究，比純粹几何的研究更加深入和具体，而且三角和代数一样，是学习高等数学的基础，如解析几何、微积分等都需要三角函数的知識. 物理学也广泛地应用到三角函数，如力的分解和合成、彈道曲綫、光的反射和折射，波、磁电学的研究，都需要三角函数作为工具. 因此三角函数性质的研究，就构成三角学科的另一重要內容.

三角学創始于古希腊时代，生于公元前二世紀中叶的希巴諾斯 (Hipparchus) 是古希腊的天文学家，做出了第一个弦表，即表示定半徑圓內不同的圓心角所对弦长的表. 它实际是半圓心角的双正弦表，不过希巴諾斯的原表沒有流傳到現在，我們根据生活于二世紀中叶的亚力山大城天文学家克拉基·布特勞密 (Ptolemy) 所著"算学总覽"一书中載有半徑为 60 单位的圓的弦长的表. 他曾将半徑分为 60 等份，再将每一份又分为 60 等份，同样地再将其中每一小份分为 60 等份，由此得到我們量角所用的度、分、秒等名称. 在布特勞密的表中包含从 $0°$ 到 $180°$ 每隔半度的弦表，以我們現代的眼光来看，这是一个从 $0°$ 到 $90°$ 每隔四分之一度的正弦表.

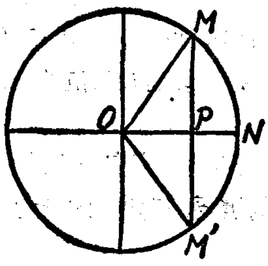

图 1

从五世紀到十二世紀的时期，三角学在印度有重要发展. 印度人与希腊人不同，他們在計算中开始研究和应用的已不是对应中心角的整弦 MM'（图 1），而是它的一半 PM，就是現在所称为 α 的正弦綫（α 是中心角 MOM' 的一半）.

除正弦以外，印度人在三角学中引入了余弦，他們已知道关系式 $\cos\alpha=\sin(90^\circ-\alpha)$ 以及 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，也知道两角和与差的正弦公式。

在九世紀到十五世紀阿剌伯帝国統治各国的时候，数学向着解决几何与三角测量的应用問題发展，把三角学发展成为一个独立的数学科目。他們的最重要的成就，是所有六条三角綫的引入：正弦、余弦、正切、余切、正割和余割。

亚述的天文学家厄耳-巴湯尼（Al-Battani）（十世紀），根据直立竿 a（图 2）的阴影 b 解决关于测定太阳 s 的高度 ϕ 的問題时，曾得出結論：直角三角形內的銳角 ϕ 决定于一直角边对另一直角边的比并算出了 $\phi=1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$，……等計算长（$a=12$）为一定的竿的阴影的长的余切表。

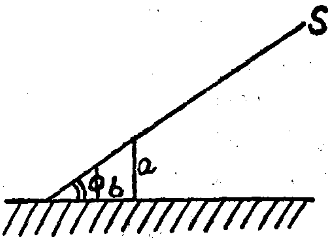

图 2

$$b=a\frac{\cos\phi}{\sin\phi}=a\,\mathrm{ctg}\,\phi.$$

火魯笙（現在伊朗的一个行省）的阿布-里-瓦凡（Abu-L-Wefa）（940—998），他曾編著类似的“正切表”，即計算在豎墙上（图 3）长为一定（$a=60$）的水平竿的投影的长。

$$b=a\frac{\sin\phi}{\cos\phi}=a\cdot\mathrm{tg}\,\phi.$$

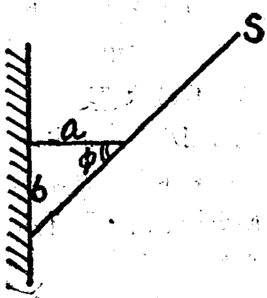

图 3

阿布-里-瓦凡給出了三角学中正切綫的正确几何定义，他在正切綫和余切綫之外，还发現了正割和余割。他曾在口头上提出

了所有三角函数之間的代数关系式，特别是，当圓半徑等于1的情形.

十五世紀著名的烏茲别克天文学家烏魯别克(1394—1449)給出了一种精确的求 $\sin 1^\circ$ 的方法. 他曾編著一种从 0° 到 45° 每相隔 1° 和 45° 到 90° 每相隔 5° 的正弦和正切表，以及每相隔 1° 的余切表，其中正弦的数值表准确到小数第九位.

在欧洲把余切和正切引入三角学計算中的第一个人是十四世紀的英国学者布拉德卫丁 (Bradwardine) (1290—1349)，而第一本有系統的三角学則系德国学者約翰·米勒 (Müller, Johannes) 在十五世紀以笔名列基蒙塔所发表的五卷关于三角学的有系統的論文“論各种三角形”. 在这个著作中三角学是被作为一門独立的而不从属于天文学的科目而叙述的.

十六世紀的法兰西代数学家法兰苏阿·韦达 (Viete, Francois)(1540—1603) 开始以文字符号表示三角公式，后来，更有許多学者致力于三角学的研究，如納伯尔(Napier, John) (对数发明者)、棣美弗(1667—1754)、包杰諾特，以及天才的彼得堡科学院士尤拉 (Euler) (1707—1783)等，而尤拉应推为三角函数近代理論的創始人.

尤拉在他自己的著作“分析引論”中，給三角学进行了解析的叙述，从不多的一些基本公式推出所有的三角公式. 他提出三角函数是表示对应的三角綫与圓半徑之比值的数，把三角函数引入了代数的領域.

尤拉用小写拉丁字母 a, b, c 表示三角形的边，用大写字母 A, B, C 表示它們的对角，大大地簡化了三角公式，幷給定各象限中函数符号的法則，得出一般的誘导公式，訂正了三角学中的許多錯誤.

所以具有近代形式的三角，还不过二百年左右.

談到三角的起源，在西洋不过是公元后的事，但是我国則在公元前几世紀已知根据相似三角形比例，用类似三角的方法来解决測量的問題．可惜在三国以后沒有人再继續研究，于是就把发明三角术的荣誉让給西洋人了．

“周髀”是我国最早的一部天文測量的书，著作年月根据內容推測，大概在西汉末年(公元第一世紀)，“周髀”內載有陈子应用相似三角形比例測量太阳的高、远、星宿的行度等法則．

三国时代(公元第三世紀)魏刘徽在“九章算术”的序文里說过，凡測高而欲兼知其远的，必須用两表．表就是竿，用同样长的两根直立在地面，就能測海島的高远．刘徽著“海島算經”用重差法解測量問題，虽不用三角函数，但能直接度量相似直角三角形的两边，用其比値代替三角函数，这与用近代三角学来解无甚差别．所以我們說：中国的重差术是欧洲三角术的嚆矢．

刘徽、祖冲之等又利用勾股定理来計算圓的弦、矢与半徑的关系(矢就是弦与对弧所成弓形的高)，研究的內容就更接近于現代三角函数的內容了．

重差术起源于“周髀”，至魏刘徽而完备．刘徽还撰有“九章重差图”一卷，可惜早已失傳，后人只知其法，不知其理．宋楊輝、元朱世杰、明顾应祥等人所著的书中虽引海島問題，但都不詳备，又无闡发，大概“海島算經”一书，已經殘缺不全了．清乾隆間戴震修“四庫全书”，于是重差术全篇才得重傳于世．后来李潢作“海島算經細草图說”，应用相似形比例加以证明，世人才知道重差术的原理，与欧西的三角术实际上是沒有什么两样的．

函 数 概 念

前面已經讲过，三角学的主要內容之一是关于三角函数性質的研究．所以在学习三角时，首先要把函数的意义及有关函

数的一些名詞解釋清楚，这样，才能保证循序漸进的学习，为研究三角函数打好基础．

我們研究某些問題时，所遇到的量可分为两类，即**常量**和**变量**．

所謂**常量，就是在整个研究过程中，保持一定值的量**，而**变量，則在研究过程中，可以取不同値的量**．例如，任意圓的圓周长和它直徑的比等于 π(圓周率)，是一个常量．任意正方形对角綫的长和它的边长的比等于$\sqrt{2}$，它是永远不变的，所以也是一个常量．

通常用 $a, b, c, \cdots\cdots$ 表示常量，用 $x, y, z, \cdots\cdots$ 表示变量．

变量可以取的值，有时并沒有什么限制，但有时受一定条件的限制．如果变量 x 的所有值都包含在 a，b 两实数之間(其中 $b>a$)并包括 a，b 两数在内，則变量 x 叫做在閉区間 $[a, b]$ 上变化，可用下列不等式表示：

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

如果变量所取的值不包括 a，b 两数在內，則变量 x 叫做在开区間 (a, b) 上变化，并用下列不等式表示：

$$a<x<b.$$

函数的一般概念是这样叙述的：**如果对于一个变量(x)所取定的值，另外一个变量(y)有一个或几个确定的值与它对应，則后者(y)叫做前者(x)的函数，而前者(x)叫做此函数的自变量．**例如：

$$y=2x-1,$$
$$y=\sqrt{x+2},$$
$$y=x^2+1,$$

上列各式，都是 x 的不同的函数．

例如，討論上列第一个函数，便有：

当 $x=-3$ 时, $y=-7$;

当 $x=-2$ 时, $y=-5$;

当 $x=-1$ 时, $y=-3$;

当 $x=0$ 时, $y=-1$;

当 $x=1$ 时, $y=1$;

当 $x=2$ 时, $y=3$.

同样的，我們也可以說正方形的面积 A 是它的边 x 的函数，即 $A=x^2$.

直角三角形的一只銳角 A 是另外一銳角 B 的函数，即 $A=90°-B$.

我們已經知道 x 和 y 的关系，或者我們还沒有知道 x 和 y 的关系怎样，但是，并不需要把这个关系詳細表示出来，而只需要表示出 x 和 y 間的关系的存在，在这种情形下，可用下面的記号：

$$y=f(x), \qquad y=F(x), \qquad y=\phi(x),$$

其中不同的字母 f, F, ϕ 等等是表示 x 和 y 間的关系的不同形式，即 x 的不同函数.

例如用 $f(x)$, $F(x)$, $\phi(x)$ 三个記号来表示前例所引入的函数，則可以写成：

$$f(x)=2x-1,$$

$$F(x)=x^2+1,$$

函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 或 $x=b$ 时的值，用記号

$$f(a), f(b), \cdots\cdots \text{等等}$$

表示，即 $f(a)$ 是函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 时的特殊值.

在上述例子 $f(x)=2x-1$,

当 $x=-3$ 时, $f(-3)=-7$;

$x=-2$ 时, $f(-2)=-5$;

$$x=0 \quad \text{时}, \qquad f(0)=-1;$$
$$x=1 \quad \text{时}, \qquad f(1)=1;$$
$$\cdots\cdots\ \cdots\cdots\cdots$$

为方便起見，可将自变量的值和它对应的函数的特殊值排成下表：

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=f(x)$	-7	-5	-3	-1	1	3	5

这里需要特别注意的是函数的特殊值，不一定能够得到，有时函数的特殊值并不存在.

例如 $f(x)=\sqrt{x+2}$，则当 $x<-2$ 时，因为二次方根內整个代数式的值不能为負值，在实数域內这个函数的特殊值如〔$f(-3)$〕不存在. 同理对于下列函数

$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$，因为分母不能为 0，所以 $f(1)$ 是不存在的.

能使函数的特殊值存在的自变量值的全体叫做函数的存在域或叫函数的定义域.

例如，(1) $$f(x)=2x-1,$$

函数 $f(x)$ 的定义域是实数集合.

(2) $$F(x)=\sqrt{x+2},$$

函数 $F(x)$ 的定义域是等于或大于 -2 的实数集合，

即 $$x\geqslant -2.$$

(3)直角三角形的銳角是 A 和 B，則

$$A=90°-B,$$

函数 A 的定义域是所有銳角，

即 $$0°<B<90°.$$

(4) $$f(x)=\frac{1}{x^2-4},$$

函数 $f(x)$ 的定义域是除 2 及 -2 以外的实数集合，

即 $$x \neq 2 \text{ 或 } -2.$$

当 $y=f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 間任意取两自变数 x_1, x_2.

当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，这样，$y=f(x)$ 叫做在区間 $[a, b]$ 的**单調增函数**（图 4）.

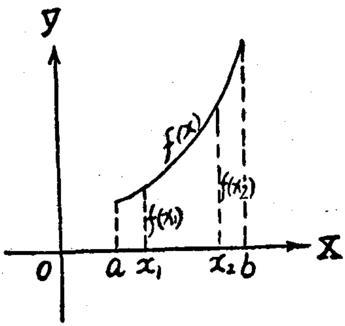

图 4

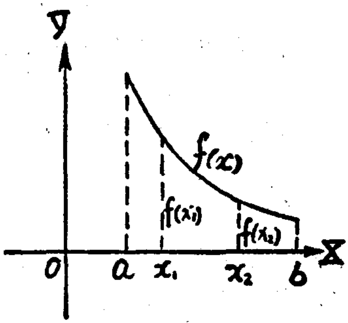

图 5

反之当 $x_1<x_2$ 时，而有 $f(x_1)>f(x_2)$，这样，$y=f(x)$ 叫做在区間 $[a, b]$ 的**单調减函数**（图 5）.

也有在 $[a, b]$ 区間内，有时增加，有时减少的叫做在区間 $[a, b]$ 的**非单調函数**（图 6）.

初等函数分**代数函数与超越函数**两类. 代数函数是“**凡是对自变量（x）作有限次代数运算，便可求出函数值的那种函数**，叫做**代数函数**.”

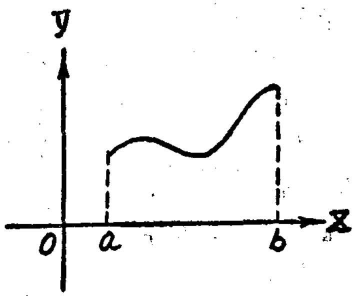

图 6

所謂代数运算是指“加、减、乘、除和冪指数为有理数的乘方.”

例如 $y=2x-1$；$y=\sqrt{x+2}$ 等都是代数函数.

超越函数是近代数学中比較薄弱的一环，到現在为止，还沒有一个明确的定义，我們暫且可以这样說，“凡非代数函数都称为超越函数.”

例如 $y=x^{\sqrt{2}}$，$y=2^x$，$y=\log_a x$，$y=\sin x$，……，等.

矢量和射影

在初等几何里研究綫段只讲长度（用单位尺度測量出来的数值），不注意綫段的起点和終点，但在研究三角时，因三角乃代数与几何的初步联系，綫段当然要論及方向．因此在三角学里关于綫段的方向和它的长度，就具有同等重要的意义.

我們可以把一直綫看成是一个动点移动的通路，它就有两个相反的方向．任意指定其中的一个方向叫做直綫的正向，正向选定的直綫叫做軸.

为了确定綫段的方向，习惯上以标志綫段的两个字母中的第一字母表示綫段的起点，第二个字母表示綫段的終点．綫段的方向看做从起点指向終点，**带有方向的綫段叫做矢量或称有向綫段**．从 A 到 B 的矢量以 AB 表示之，从 B 到 A 的矢量以 BA 表示之.

为了便于表达起見，我們引进“綫段的量”这一名詞，用以区别綫段的长度．一个正綫段的量就是表示它的綫段长的那个数，負綫段的量就是在表示它的綫段长那个数前面带个負号．例如：若 AB 长是 3，則 AB 的量是 3，而 BA 的量是 -3．为簡便起見，矢量仍用同样字母的符号来表示它.

故有 $$AB=-BA.$$

如果两矢量滿足下面三个条件，那末就看做是相等的：(1)两矢量的长相等；(2)两矢量是平行的，就是在同一直綫上或在平行綫上；(3)两矢量是向着同一側的.

矢量的正向除另有规定外，一般在軸上或平行于軸的矢量的正負决定于矢量的方向与軸的正向是否一致．如果矢量的方向与軸的正向是一致的，則矢量认为是正綫段；与軸的正向相反的矢量认为是負綫段．

通常水平的軸的正向指向右方；垂直的軸的正向指向上方．习惯上用矢号表示正向．所以在水平位置的矢量，当方向是从左到右时有正量，从右到左时有負量；在垂直位置的矢量，当方向是从下向上时有正量，从上向下时有負量．如图7中，矢量 AB 和位于軸 l 上的矢量 $A'B'$ 的长度相等（設 $A'B'=a$），$AB\parallel l$，AB 和 $A'B'$ 的方向与軸 l 的正向一致，BA 和 $B'A'$ 的方向和軸的正向相反．由上述矢量相等的概念，可认为

$$AB=A'B'=a,$$

而
$$BA=B'A'=-a.$$

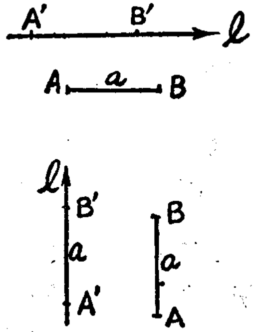

图 7

从一点到一軸作垂綫，垂綫的足叫做点在軸上的正射影，一般就簡称为射影．軸上一点对于这軸的射影，就是这点的本身．

綫段 AB 在 l 軸上的射影，就是 l 軸上的綫段 A_xB_x，它的起点和終点分别是綫段 AB 的起点和終点的射影．

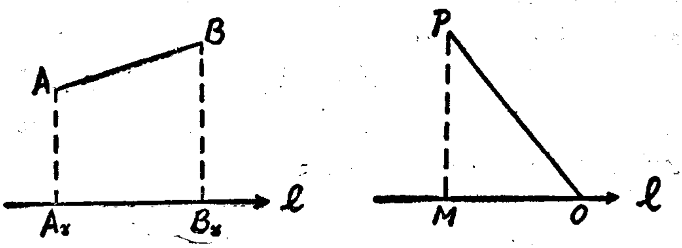

图 8

图 8 中綫段 AB 在軸 l 上的射影是綫段 A_xB_x，綫段 OP 在軸 l 上的射影是綫段 OM.

綫段在軸上的射影，有它自己的方向，显然，由于夾角的关系，它与軸的方向可能是相同的，也可能是相反的．依照一般的規則，在第一种情形下，射影是正量，在第二种情形下射影是負量.

二　什么是三角函数

从銳角的三角函数談起

关于三角函数和解三角形的初步知識，按"中学数学教学大綱"(修訂草案)，在平面几何課中讲解銳角的三角函数和解直角三角形問題，它是在教过相似三角形后提出来的．这时学生已具有相似变换和相似作图的概念，这些知識都是有利于学习銳角三角函数的.

由于相似三角形对应边成比例的性质，所以直角三角形的任何两边的比与它相似的直角三角形对应边的比是相等的，也就是說：**当直角三角形的一銳角給定时，直角三角形的任何两边的比与它的边长无关.**

在高一平面几何課本中，銳角的三角函数定义是：**对应于一銳角的某些綫段**（自銳角的任一边上取一点作另一边的垂綫所形成的直角三角形的各边）**的比的比值.**

現在用下面的例子来說明这个事实.

如图 9 中 $\angle MAN$ 是一銳角，角度为 α，在 AN（或 AM）

上任取一点 B，过 B 作 $BC \perp AM$.

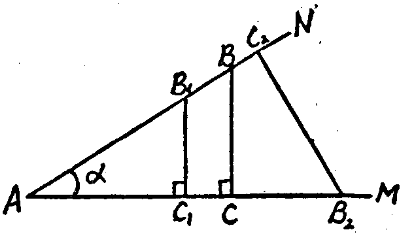

图 9

在直角三角形 ABC 中，CB 是 $\angle A$ 的对边，AC 是 $\angle A$ 的邻边，AB 是斜边，这三条边可以組成的比共有六种，如：

$\frac{CB}{AB}$，$\frac{AC}{AB}$，$\frac{CB}{AC}$，$\frac{AC}{CB}$，……等等

又图中 $B_1C_1 \perp AM, B_2C_2 \perp AN,$

则 $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1 \sim \triangle AB_2C_2.$

它們对应边的比为：$\frac{CB}{AB}=\frac{C_1B_1}{AB_1}=\frac{C_2B_2}{AB_2}$，

其他各組对应边也成比例.

这里已說明了，**对于銳角 α 的每一个定值，这些比中的每一个都有一个确定的值.**

我們再看下面的图 10，設 B_1，B，C 在一直綫上，又 $\angle C$ 是直角，当 $\angle BAC$ 与 $\angle B_1AC$ 不相等时，它們各自形成的直角三角形会不会相似？又这两个直角三角形以 $\angle BAC$ 和 $\angle B_1AC$ 为准的对应边会不会成比例？这两个問題的解答是这样的：$\triangle BAC$ 与 $\triangle B_1AC$ 一般是不会相似的，只有当 $\angle BAC$ 与 $\angle B_1AC$ 互余的时候，它們才能相似，但关于 $\angle BAC$ 与 $\angle B_1AC$ 所对应的边是不能成比例的. 假設在 $\triangle BAC$ 与 $\triangle B_1AC$ 中，$\angle C$ 是直角 $\angle BAC \neq \angle B_1AC$，第一种情况設 $\angle BAC + \angle B_1AC \neq 90°$，

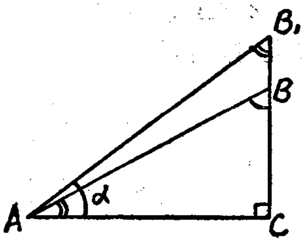

图 10