算學叢書

最小二乘法

郁樹錕編

中華書局印行

民國三十七年五月發行
民國三十七年五月初版

算學叢書最小二乘法（全一冊）

◎定價國幣五元五角
（郵運匯費另加）

編者　郁樹錕
發行人　中華書局股份有限公司代表　李虞杰
印刷者　上海澳門路八九號　中華書局永寧印刷廠
發行處　各埠中華書局

（一三七五一）（中）

最小二乘法

目錄

最小二乘法

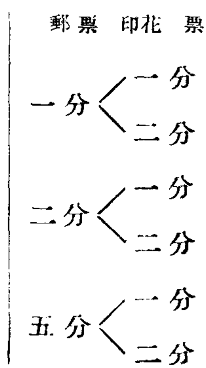
第一編　或然率

第一章　排列　配合　二項定理

1. 同時發生之事象

例　設有二袋,其一袋中有一分、二分及五分之郵票各一枚,另一袋中有一分及二分之印花稅票各一枚,若信手從二袋中各取出一枚,則取出之樣式共有若干種?

當由第一袋中取出一分之郵票時,由第二袋中取出之印花稅票必爲一分或爲二分,計有兩種.同樣,由第一袋取出二分之郵票時,由第二袋中取出印花稅票之方式亦有兩種.但由第一袋中取出郵票之方式計有三種,而每種中又與兩種印花稅票相配合,故得配合之樣式爲 $3\times2=6$ 種.



問　題

1. 取銅幣銀幣各一枚投之,則表面裏面之出現方式計

有幾種?

2. 設有領結三條,西裝四套,問配合之方法計有幾種?

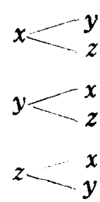
由以上之例及問題,可推得如下之定理:

定理 設有二事件 E_1 及 E_2, E_1 事件發生之方式有 m 種,E_2 事件發生之方式有 n 種,則 E_1 及 E_2 同時發生之方式計有 mn 種.

此定理對於三個以上之事件亦能成立.

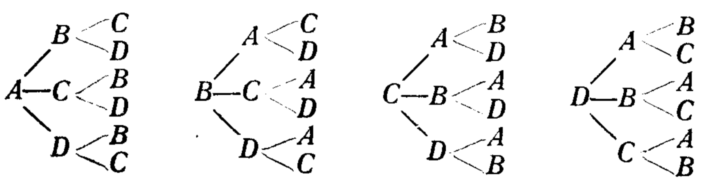
2. 排列 (permutations)

例 1. 由 x、y、z 三個物件中每次取出二個,則有如下之六種方式:



$$xy \quad xz \quad yx \quad yz \quad zx \quad zy$$

例 2. 由 A、B、C、D 四個物件中,每次取出三個時,如下所示,若第一個為 A,則由其餘之 B、C、D



中取一個配之,得 AB、AC、AD 三種.再以剩餘物中之一配之,即以 C 或 D 配於 AB, B 或 D 配於 AC, 及以 B 或 C 配於 AD, 如此配合,則以 A 為第一數時,其配合方法計有如下之六種:

$$ABC \quad ABD \quad ACB \quad ACD \quad ADB \quad ADC$$

同樣,以 B、C 或 D 爲第一數時,其配合方法亦各有六種,故共有配合方法

$$6\times4=24\text{種}.$$

若由 n 個物件中,每次取出 r 個排列,則排列種種不同樣式之個數稱爲排列之數,通常以 ${}_nP_r$ 表之.

例　由三個物件中每次取出二個排列之,其排列之數爲

$${}_3P_2=3\times2=6.$$

由四個物件中每次取出三個排列之數爲

$${}_4P_3=4\times3\times2=24.$$

由十個物件中,每次取出四個之排列數 ${}_{10}P_4$,可如次推得之.取十個物件中之一個特別物件如 a 置於左端,而於其餘九個物件中每次取三個排列之,其數爲 ${}_9P_3$.但此種排列法無論以何物件置於左端均可,既物件之總數有十,故排列之數當爲 $10\,{}_9P_3$. 故

$${}_{10}P_4=10\,{}_9P_3.$$

同理得

$${}_9P_3=9\,{}_8P_2,$$

$${}_8P_2=8\,{}_7P_1,$$

及

$${}_7P_1=7.$$

各式兩邊相乘,且簡約之,得

$$_{10}P_4=10\cdot9\cdot8\cdot7.$$

以上所述,可適用於任何個不同物件之排列,故得如下之定理.

定理 由 n 個不同物件中,每次取 r 個排列之數爲

$$_nP_r=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots(n-r+1).$$

系 如將 n 個物件全數取出排列,則排列之數爲

$$_nP_n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1,$$

略記之,得 $$_nP_n=n!.$$

$n!$ 爲由 n 至 1 之各整數之連乘積,稱爲 n 之階乘(factor),有時以 $\underline{|n}$ 表之.$0!$ 本無若何意義,但便宜上定之爲 $0!=1$.

例 由 1、2、4、6、8 五個數字中每次取三個排列之數爲

$$_5P_3=5\cdot4\cdot3=60.$$

其中爲奇數之數僅有十二個,因以上列五個數字排列而成三位數之奇數時,必須以 1 置於末端方可;除 1 外之四個數字中,每次取二個之排列數爲

$$_4P_2=4\cdot3=12,$$

故以 1 置於末端之三位數僅有12個.

問　題

1. 由 0、1、2、3、4 五數字中每次取三個排成三位數之排列數有幾?但 0 不能排在左端.

3. 配合(combination)

從 n 個不同物件中每次取 r 個作成一組,謂之配合,其所成之組數謂之配合之數,以 ${}_nC_r$ 表之.例如由 a、b、c 三者中每次取二個作成之配合為 ab、ac、bc,卽 ${}_3C_2=3$.

公式
$$ {}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}, $$
及
$$ {}_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}. $$

證明　由 n 個不同物件中每次取出之 r 個物件,若依次序排列之,可得 ${}_rP_r=r!$ 種不同之排列.但配合僅論每組中組成分子之異同,而不問各分子排列之次序;故 $r!$ 種排列中構成分子旣相同,祇能作為一個配合,故得

$$ {}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}, $$
$$ \therefore\quad {}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}, $$

上式右邊之分母及分子均乘以$(n-r)!$,得

$$_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)(n-r)!}{r!(n-r)!}$$

$$=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

問題

1. 試求 $_9C_6$ 及 $_9C_3$ 之值.

2. 試證 $_nC_r={}_nC_{n-r}$.

3. 由六人之候補者中選出代表二人,其方式有幾種?

4. 由甲地之候補者五人及乙地之候補者四人中選出代表四人,問選出之方式計有幾種?

4. n 個物件中有相同物件存在時之排列

在 $a\,b\,a\,a\,b\,c$ 之排列中,與 a 同者有三,與 b 同者有二,若於 a、b 附以數字如 $a_1b_1a_2a_3b_2c$, 此時假定 a_1、a_2、a_3、b_1、b_2 均爲不同之物件,取此六者而排列之,得排列之數爲 $_6P_6=6!$.事實上 $a_1=a_2=a_3$, 而 $b_1=b_2$, 故取 a_1、a_2、a_3,而排列之數 $3!$,實祇能認爲一種;取 b_1、b_2 而排列之數 $2!$,實亦爲一種.故 $6!$ 種排列中有 $3!\times2!$ 種爲相同者.設以 x 表所求之排列數,則有如下之關係:

$$3!\,2!\,x=6!,$$

$$\therefore\qquad x=\frac{6!}{3!\,2!}.$$

由此例推,一般取 $aa\cdots\cdots bb\cdots\cdots cd$ 等 n 個之物件,悉數

排列之,若 a 有 p 個,b 有 q 個,以 x 表所求之排列數,則

$$x=\frac{n!}{p!q!},$$

其中 $$n=p+q+1+1.$$

問　題

1. 取 1、1、2、2、2、2、3 排列成七位之數時,其排列數有幾?

5. 二項定理 (binomial theorem)

$$\begin{aligned}(a+b_1)(a+b_2)(a+b_3)(a+b_4)\\ &=a^4+(b_1+b_2+b_3+b_4)a^3\\ &\quad+(b_1b_2+b_1b_3+b_1b_4+b_2b_3+b_2b_4+b_3b_4)a^2\\ &\quad+(b_1b_2b_3+b_1b_2b_4+b_1b_3b_4+b_2b_3b_4)a\\ &\quad+b_1b_2b_3b_4.\end{aligned}$$

將上式右邊 a^3、a^2、a 之係數考察之,知 a^3 之係數爲由 b_1、b_2、b_3 及 b_4 四數中每次取一個所成組合之和,其項數爲 ${}_4C_1=4$; a^2 之係數爲由 b_1、b_2、b_3、b_4 中每次取二個所成組合之和,其項數爲 ${}_4C_2=6$; 同理, a 之係數之項數爲 ${}_4C_3=4$.

設 b_1、b_2、b_3、b_4 相等,以 b 表之,則 a^3 之係數爲 ${}_4C_1b$, a^2 之係數爲 ${}_4C_2b^2$, a 之係數爲 ${}_4C_3b^3$, 而不含 a 之項爲 b^4.故

$$(a+b)^4=a^4+{}_4C_1a^3b+{}_4C_2a^2b^2+{}_4C_3ab^3+b^4.$$

由此類推,得成立如下之一般式

$$(a+b)^n=a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots$$
$$+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots+b^n,$$

此稱爲二項定理.又上式可改書如下之形式:

$$(a+b)^n=b^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-2}b^2+\cdots\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1\cdot2\cdots\cdot r}a^{n-r}b^r+\cdots+b^n.$$

上式中之 $\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1\cdot2\cdots\cdots r}a^{n-r}b^r$ 爲第$(r+1)$項,或稱爲一般項.

系　$a=1$, $b=x$ 時,則

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}x^2+\cdots\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1\cdot2\cdots\cdot r}x^r+\cdots\cdots+x^n.$$

例 1　$(p+q)^7=p^7+7p^6q+\frac{7\cdot6}{1\cdot2}p^5q^2+\frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}p^4q^3$

$$+\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}p^3q^4+\cdots\cdots+q^7$$
$$=p^7+7p^6q+21p^5q^2+35p^4q^3$$
$$+35p^3q^4+21p^2q^5+7pq^6+q^7.$$

例 2　試求$(2a+b)^8$展開式之第六項.

以 $n=8$, $r=5$ 代入一般項,得

$$\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}(2a)^3b^5=448a^3b^5.$$

例 3　於$\left(x-\frac{1}{2x}\right)^7$之展開式中,試求$x^3$之項.

由一般式得第$(r+1)$項為

$$ {}_7C_r x^{7-r}\left(-\frac{1}{2x}\right)^r=\left(-\frac{1}{2}\right)^r {}_7C_r x^{7-2r}. $$

但依題意,$7-2r=3$,故$r=2$,即所求之項為第三項,由上式得

$$ {}_7C_2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 x^3=\frac{21}{4}x^3. $$

問　題

1. 將$(3x+y)^5$式展開之.
2. $(1+3x)^8$之展開式中,x^4之係數為何?

6. $(a+b)^n$之最大項

以T_{r+1}表一般項即第$(r+1)$項,則有

$$ T_{r+1}=\frac{n!}{r!(n-r)!}a^{n-r}b^r, $$

但第r項為　$$ T_r=\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}a^{n-r+1}b^{r-1}, $$

第$(r+2)$項為　$$ T_{r+2}=\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}a^{n-r-1}b^{r+1}, $$

$$ \therefore\quad \frac{T_{r+1}}{T_r}=\frac{n-r+1}{r}\,\frac{b}{a},\quad \frac{T_{r+2}}{T_{r+1}}=\frac{n-r}{r+1}\,\frac{b}{a}. $$

若T_{r+1}為最大項,則　$T_r<T_{r+1}$,$T_{r+1}>T_{r+2}$.

$$\therefore \quad \frac{T_{r+1}}{T_r}>1 \qquad\qquad \frac{T_{r+2}}{T_{r+1}}<1$$

即 $$\frac{n-r+1}{r}\,\frac{b}{a}>1 \qquad\qquad \frac{n-r}{r+1}\,\frac{b}{a}<1$$

或 $$\frac{(n+1)b}{a+b}>r \qquad\qquad \frac{nb-a}{a+b}<r$$

$$1+\frac{nb-a}{a+b}<1+r$$

$$\frac{(n+1)b}{a+b}<1+r$$

由上所得之結果,知 T_{r+1} 如爲最大項,則 r 當等於 $\frac{(n+1)b}{a+b}$ 中所含之最大整數. $T_r=T_{r+1}$ 時 $r=\frac{(n+1)b}{a+b}$. 故 $\frac{(n+1)b}{a+b}$ 爲整數時,無最大項,惟 T_r 及 T_{r+1} 較其他各項爲大.

例 試求 $\left(1+\frac{2}{5}\right)^7$ 之最大項.

解 $$\frac{(n+1)b}{a+b}=\frac{(7+1)\times\frac{2}{5}}{1+\frac{2}{5}}=\frac{16}{7}=2\frac{2}{7},$$

$$\therefore \qquad r=2.$$

即第三項爲最大項.

問題

1. 試求 $\left(1+\frac{2}{3}\right)^{11}$ 之最大項.

第二章　或然率

1. 或然率之意義

舉骰投之,則其點數爲六爲一,無人能知之;十萬之嬰兒中究有幾何能生活到三十歲以上,亦無人能知之.此類問題,驟視之,均爲不確實之事件,而非算學所能處理者.但深加考察,亦似有其確實性.苟吾人能知此確實性之大略,則裨益於吾人者實非淺鮮.如上所述,決定一事件發生或不發生之或然性之比率,謂之該事件發生或不發生之或然率(probability).

設一事件發生及不發生之方法計有 n 種,發生之方法有 a 種時,則不發生之方法有 $n-a$ 種,而 n 稱爲方法之總數.

2. 或然率之算學的定義(第一定義)

以 n 表方法之總數,其中某一事件發生之方法有 a 個,則 $\frac{a}{n}$ 謂之該事件發生之或然率,以 p 表之,即

$$p=\frac{a}{n},$$

$p=1$ 時,指一事件必定發生;$p=0$ 時,指一事件不致發生.

$\frac{n-a}{n}$ 係表一事件不發生之或然率,而

$$\frac{n-a}{n}=1-\frac{a}{n}=1-p.$$

故常以$1-p$表一事件不發生之或然率,有時又以q表之.

例 1　投銅元一次,其現出表面之或然率為$\frac{1}{2}$.

因銅元有表裏兩面,一次投下,則其現出表面或不現出之方法總數有二,即$n=2$.其中表面出現之方法(a)為1.由定義,表面出現之或然率$p=\frac{1}{2}$.

例 2　舉一骰而投之,其點數為六之或然率為$\frac{1}{6}$.

例 3　一袋中盛有白球三枚,紅球五枚.如從其中取出一球,其為白球之或然率為何?又同時取出兩球,均為白球之或然率為何?

解　袋中所有之球數為八,取出一個之方法總數有八,而取出一白球之方法有三,故取出之球為白球之或然率為$\frac{3}{8}$.

八球中每次取出兩枚之方法,共有${}_8C_2$種;而二球均為白球之方法計有${}_3C_2$種;故其或然率為

$${}_3C_2/{}_8C_2=\frac{3}{28}.$$

例 4　以二骰投之,其點數為八之或然率若何?

解　由第一章第一節,發生及不發生八點之方法總數$n=6^2=36$.但八點發生之方法為

(2,6) (3,5) (4,4) (5,3) (6,2)

計五種,卽 $a=5$,故由定義,$p=\frac{5}{36}$.

問 題

1. 一袋中盛紅球四個,白球五個.從其中取出三個,均為白球之或然率為何?

2. 投骰子二枚,其點數之和為五之或然率為何?

3. 由 a、b、c、……j 十人中選出委員三人,試求 a、b 二人均能當選之或然率為何?

3. 或然率之經驗的定義(第二定義)

如上所述,投貨幣時表面現出之或然率為 $\frac{1}{2}$,實驗上十次投擲中未必能五次為表面,卽投 1000 次亦未嘗五百次為表面.至於人之年齡能達三十歲之或然率,更無法計算.如此類問題,除實地調查外,別無良法.例如投擲貨幣問題,可如次實驗之.設投擲 n_1 次時,表面出現 a_1 次;投擲 n_2 次,表面出現 a_2 次;計算 $\frac{a_1}{n_1}$、$\frac{a_2}{n_2}$、……之值.若投擲之次數愈多,此等分數之值漸與定數 k 趨近.又如人之年齡問題,亦可如上法實驗之,先調查某年出生之 n_1 人中能達三十歲者為 a_1 人;又 n_2 人中能生存至該年齡者為 a_2 人;若統計之人數愈多,則或然率 $\frac{a_1}{n_1}$、$\frac{a_2}{n_2}$、……之值亦趨一定(k).此情形中,可以 k 卽 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{n}$ 為所求或然