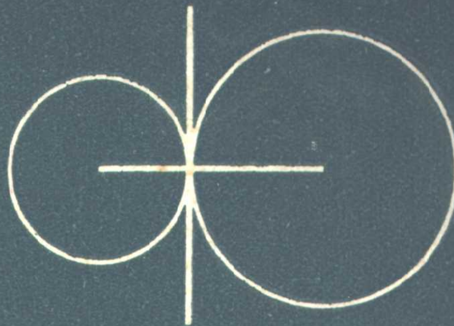
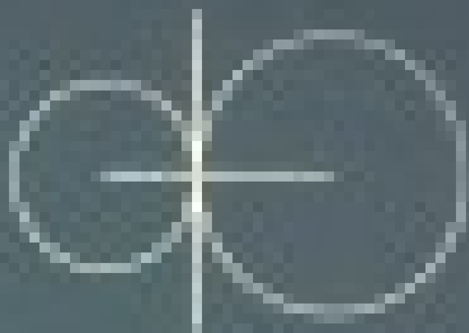


北京业余动力学院干部班教材

平面几何学

北京业余动力学院编

水利电力出版社



平面几何学

北京业余动力学院干部班教材

平 面 几 何 学

北京业余动力学院编

*

1650Z127

水利电力出版社出版（北京西郊[illegible]學路[illegible]）

北京市書刊出版業營業許可證出字第[illegible]号

水利电力出版社印刷厂排印　　新华書店发行

*

787×1092 1/32开本 * 1 9/16印張 * 37千字

1958年11月北京第1版

1958年11月北京第1次印刷（0001—5,100册）

统一書号：15143·1290　　定价（第9类）0.19元

目　录

編者的話

这本書是北京业余动力学院專为老干部特别班的同志学习而編写的教材。編写这本教材的目的，是要使老干部們在較短的时間內，掌握平面几何的一般知識，为將来学习專业知識打下基础。

这本教材的特点是：（1）用比較精簡的篇幅来編写。所涉及的定理都是一些重要定理。（2）幷不是所有定理都一一証明，类似的几条定理，就只証明重要的一二条。沒有証明的定理，尽量画出图，作了形象的提示，帮助直觉的理解。（3）有些定理編入习題中，但註明是定理。这种习題証明簡單能加深对于定理的掌握，同时也节省了篇幅。（4）习題份量少，而且簡單，其目的只是为了巩固已学过的定理和加强一般运用的能力。学习时間有限，不能負担过重。

这本教材的講授方法：建議用三分之二的时間講課，每次講課时要注意在适当的段落結束；留下三分之一的时間当堂做习題，这样就可以巩固当天所学过的定理。其次教材中已詳細証明的定理，講授时也要詳細講授，其目的是使听講的人能够正确运用几何的語言来叙述。沒有証明的定理，講授时不必詳細写出証明步驟，只要正規作出图来，在口头上証明就行了。还有，每次开始講課时，最好先选擇課外一二个典型例題来講解，以巩固和加深对于已学过的定理的理解和运用。

在目前轟轟烈烈的技术革命和文化革命中，广大职工迫切要求系統的学习文化和掌握專业知識，而又不可能象中学生那样一点一滴去学习，因此迫切需要这一类精簡的教材。目前很少見这类書籍，希望本書的出版，能引起更多同志来編写更完善、更精煉的教材，以滿足广大人民羣众的需要。

一九五八年九月于北京业余动力学院

第一章 緒 論

1. 几何学的概念

几何学 我們周圍的各种物体，都有它們的性質和外形兩种屬性。一切自然科学，都是研究它們的性質，而研究它們的形狀、大小和相互位置的科学，就是**几何学**

几何图形 物体的大小和形狀，叫做几何体，或簡称为体，体有**長**、**寬**、**高**、三个向度。

体的界限叫做**面**，只有**長**和**寬**兩个向度，沒有厚薄的屬性。

面的界限叫做**綫**，只有**長短**一个向度，沒有寬窄，厚薄的屬性。

綫的界或端叫做点，点沒有向度，只有**位置**。

点既有位置，故点动而成綫，綫再依另一方向移动則成面，面再依另一方向移动而成体。

点、綫、面、体或其中任意几种的集合叫做**几何图形**。

直綫、曲綫、折綫 紧張在兩点之間的一条綫就是直綫，如图(1-a)AB。沒有一部分是直的綫叫曲綫，如图(1-b)CD。由几个方向不同的直綫連接而成的綫叫折綫，如图(1-c)EF。直綫可以无限延長，綫段則为一有限長度。$\overline{AB}$代表从A至B方向的直綫，反之$\overline{BA}$則代表从B至A的方向，$\overline{AB}+\overline{BA}=0$。

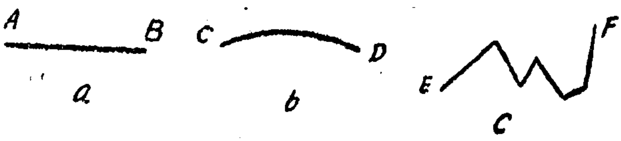


图 1

a—直綫； b—曲綫； c—折綫。

平面　連接一个面上的任意兩点所成的直綫，都位在这面上，这个面就叫做**平面**。

平面几何学、立体几何学、球面几何学　平面几何学只研究平面上的图形。立体几何学是研究不在同一平面上的图形。球面几何学是研究在一球面上的图形。

2.角

角的名称和記法　一直綫 OA 环繞其上的一点 O 而旋轉至 OB 的地位，这样的旋轉量叫 AOB 角，显然角的大小与旋轉綫的長短无关，直綫 OA，OB 叫 AOB 角的边，而 O 点叫角的頂点，如图 2。

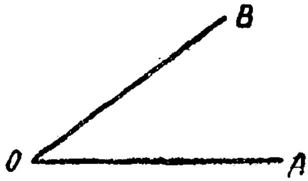


图 2　AOB 角

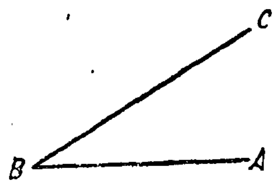


图 3　ABC 角

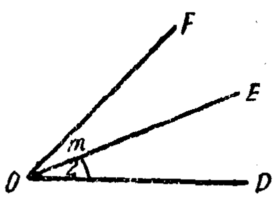


图 4

2 角＝DOE 角

m角＝EOF角

2 角＋m角＝DOF角

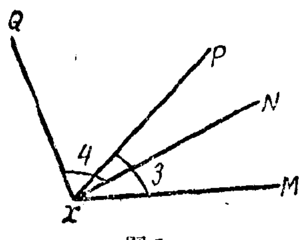


图 5

3 角＝MxP 角

4 角＝NxQ 角

用三个字母来表示一个角，頂点的一个字母应該放在他兩个字母中間，如图 3 的 ABC 角，記为 $\angle ABC$。

也可以用一个数字或一个字母放在角的里面来表示，如图4的$\angle 2$、$\angle m$，图5的$\angle 3$、$\angle 4$等。

平角和直角　角的二边在同一直綫上而向反对方向伸張的叫做**平角**，如图6之$\angle ABC$，半个平角叫**直角**如图6之$\angle ABD$和$\angle DBC$。在这种情况下，我們叫DB和AC兩直綫互相**垂直**，B点叫做**垂足**。DB的長，叫做D点至AB的**距离**。

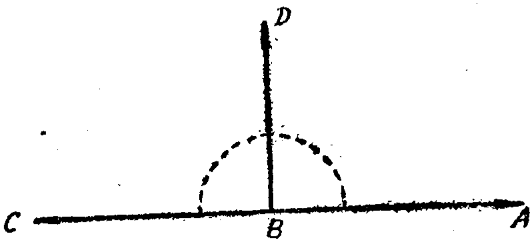


图6

$\angle ABC$＝平角($\angle St$)

$\angle ABD = \angle DBC$＝直角($\angle R$)

銳角、鈍角、斜角　如图7，$\angle 1$小于直角，叫做**銳角**；如图8，$\angle 2$大于直角，且小于平角，我們叫$\angle 2$为**鈍角**。銳角及鈍角均称为**斜角**。

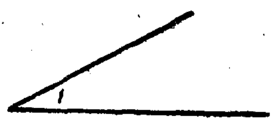


图7　銳角

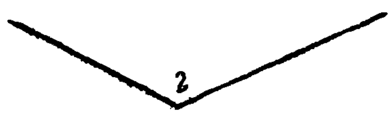


图8　鈍角

角的量度　如图6，ABC为一**平角**。一个平角規定为180度，所以一个直角为90度，一度为60分，1分为60秒。如$35°24'15''$讀作35度24分15秒。若OA直綫繞O轉一周，称为**一周角**，等于$360°$。

余角和补角　如图9，$\angle 1 + \angle 2 = 90°$，則称$\angle 1$与$\angle 2$互

为**余角**。如图 10 $\angle 3+\angle 4=180°$，则称$\angle 3$与$\angle 4$互为**补角**。

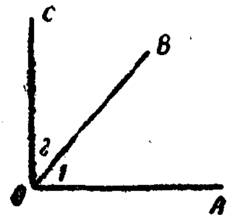


图 9

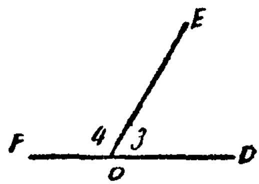


图10

圓　圓是一个平面上的封閉曲綫，曲綫上的各个点与一定点 D 的距离相等。如图 11 的 A,B,C,E,F 各点，定点 D 叫**圓心**。圓心与圓上任一点連接的直綫如 DC,DE 叫**半徑**。圓的任一部分叫做**弧**，如 AB 之弯曲部分，記作 $\widehat{AB}$。AB 直綫叫做**弦**，通过圓心最長的弦叫**直徑**，如 EF，这个圓形的封閉曲綫的長叫做**圓周**。

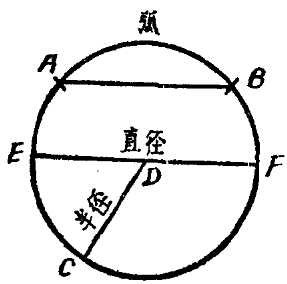


图 11

平面几何的工具只允許为**圓規**(画圓)和**直尺**(画直綫)。

3. 定理和公理

定理和系　凡是一个叙述，能証明它是正确的，叫做**定理**，如"三角形的兩边相等，則它所对的角亦相等。"条件的部分(即三角形的兩边相等)叫做**假設**，其断定部分(即这兩边所对的角亦相等)叫做**終結**。但假設有时不明确的写出来，含蓄在詞意之間。

直接从一个定理，容易推出的另一个定理，叫做**系**。

公理　一个叙述，不加証明就公認为正确的，叫做**公理**。

現將普通公理与几何公理叙述如下：

(1)等于同量的量相等，等于等量的量相等。

(2)等量加等量，其和相等。

(3)等量减等量，其差相等。

(4)等量加不等量其和不等，大者仍大。

(5)从不等量减去等量，其差不等，大者仍大。

(6)从等量减去不等量，其差不等，减大量的，其差反小。

(7)等量的同倍量相等。

(8)等量的同分量相等。

(9)三量中第一量大于第二量，第二量大于第三量，则第一量大于第三量。

(10)全量等于其諸分量之和。

(11)全量大于任意分量。

(12)在一个等式或不等式中，一量可以代换它的等量。

(13)过兩点只能引一直綫。

(14)兩点之間以直綫为最短。

(15)相交二直綫，不能都和第三直綫相平行。

(16)直綫可以无限延長。

(17)固定一圓心和半徑可以决定一圓。

(18)一个几何图形可以移动它的位置而不变其大小形狀。

前12条是普通公理，其余是几何公理。

由第13条公理，很容易推得下列二条公理。

(*a*)二直綫最多只能相交于一点。

(*b*)二无限直綫的一部分重合則全部重合。

习 題 一

1.一个餅从中心分为6等分，每等分的角度多少大？

2. 一个角是它的余角的二倍，求这角多大。

3. 如图 12，若 FBA 是一条直綫。

(a) 何角是 $\angle DBF$ 的补角?

(b) $\angle P=40^\circ$　$\angle ABE=?$

(c) $\angle DBF=100^\circ$，　$\angle m=\angle n$，$\angle m=?$

(d) $\angle FBC=140^\circ$，$\angle ABD=80^\circ$，　$\angle n=?$

4. 如图 13；若 $GI=HK$，为何 $GH=IK$?

5. 如图 14，若 $\angle 1=90^\circ$　$\angle 2=90^\circ$，为何 $\angle AOC=\angle BOD$?

图 13

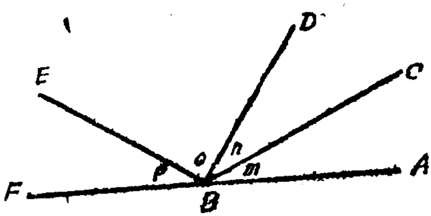


图 12

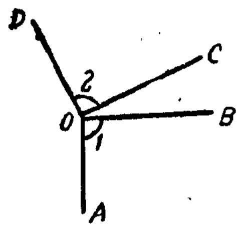


图 14

第二章　直綫形

4.　三角形及其全等

三角形的分类

(1) 按边分类：

(a) 三角形各边不等者，**叫不等边三角形；**

(b) 三角形有二边相等者，**叫等腰三角形；**

(c) 三角形三边相等者，**叫等边三角形。**

图 15

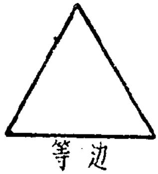


图 16

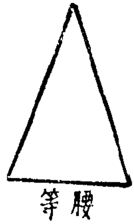


图 17

（2）按角分类：

（a）三角形有一角为直角者，叫**直角三角形**；

（b）三角形有一角为鈍角者，叫**鈍角三角形**；

（c）三角形三角均为銳角者，叫**銳角三角形**；

（d）三角形三角都相等者，叫**等角三角形**。

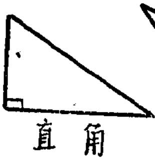


图 18

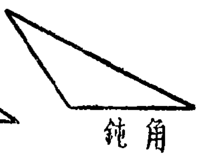


图 19

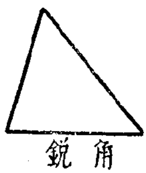


图 20

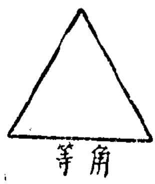


图 21

由三角形之任一頂点，到对边或其延長綫之垂足叫三角形**之高**，这个对边叫做**底**，三角形之任一边皆可为底。等腰三角形相等之二边叫做**腰**，第三边叫做**底**，二等腰之对角叫**底角**。

直角三角形直角所对的边叫**斜边或弦**，其他二边叫**腰**或勾及股。

三角形之一頂点至对边中点之連接綫，叫这个边的**中綫**。

三角形之全等

定理一：二直綫相交，对頂角相等。

定理之証明，有下列步驟：(1)假設；(2)求証；(3)証明。如果需要增加补助綫段，这个步驟叫作图，应列在(2)(3)之間。上述定理証明如下：

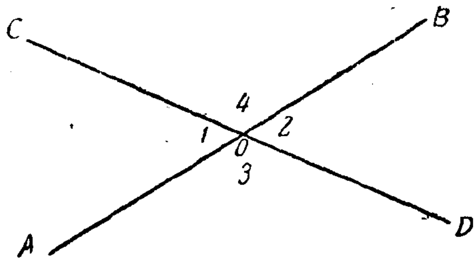


图 22

假設：AB, CD二直綫相交于O。

求証：$\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$（兩个角有公共頂点，一角之二边为他角二边之延長綫的叫对頂角）。

証明：

叙　述	理　由
因$\angle 1+\angle 4=$平角，	（二鄰角之不相鄰边在一直綫上）
又$\angle 4+\angle 2=$平角，	（二鄰角之不相鄰边在一直綫上）
所以$\angle 1+\angle 4=\angle 4+\angle 2$,	（平角都相等）
故$\angle 1=\angle 2$.	（等量減等量，其差相等）
同理証明：$\angle 3=\angle 4$.	

定理二： 兩三角形有二角及夹边相等，則此二形全等。$(a.s.a=a.s.a)$。

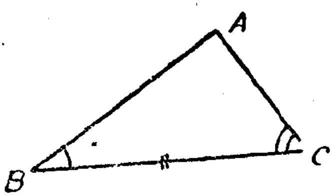


图 23

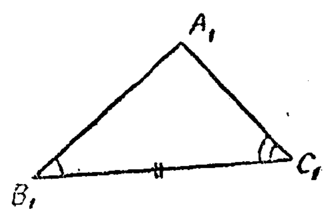


图 24

用两小图形迭合，即可証明它們全等。两个相等的边叫对应边，如 BC 和 B_1C_1 相等的角叫对应角，如 $\angle B$、$\angle B_1$；$\angle C$，$\angle C_1$。

定理三：两三角形有二边及夹角相等，则此二形全等($s.a.s=s.a.s$)。

同定理二，也用迭合証法。

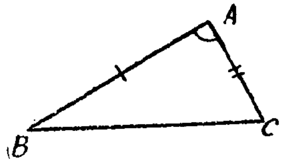


图 25

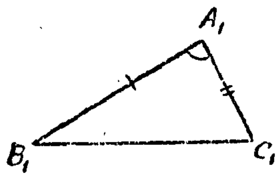


图 26

定理四：等腰三角形之底角相等。

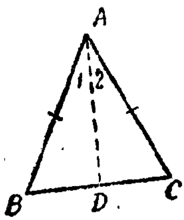


图 27

假設：$AB=AC$

求証：$\angle B=\angle C$

作图：从 A 点作 $\angle A$ 的分角綫 AD，即 $\angle 1=\angle 2$。

証明：在 $\triangle ABD$ 及 $\triangle ACD$ 中

因 $AB=AC$，　　(假設)

$AD=AD$，　　(公有)

$\angle 1=\angle 2$，　　(作图)

所以 $\triangle ABD\equiv\triangle ACD$($s.a.s$ 即定理三)，

故 $\angle B=\angle C$(对应角)。

系一：等腰三角形頂角之平分綫垂直平分其底。

系二：等边三角形必等角。

定理五：两三角形三边对应相等，则两三角形全等。

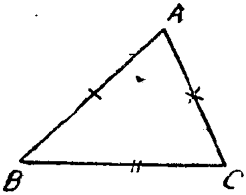


图 28

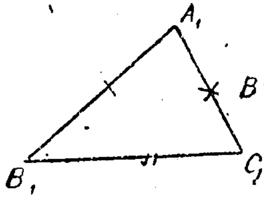


图 29

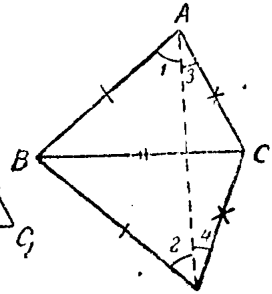


图 30 A_1

假設：$AB=A_1B_1$ $BC=B_1C_1$ $CA=C_1A_1$。

求証：$\triangle ABC\equiv\triangle A_1B_1C_1$。

作图：將 $\triangle A_1B_1C_1$ 移动在 $\triangle ABC$ 之下且 BC 与 B_1C_1 重合，如图 30 之 $\triangle BCA_1$，連接 AA_1

証明：$\because$ $AB=A_1B$, （假設）

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$, （定理四）

同理：$\angle 3=\angle 4$,

$\therefore$ $\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4$,（等量公理）

即$\angle A=\angle A_1$,

$\therefore$ $\triangle ABC\equiv\triangle A_1B_1C_1(s.a.s)$.

定理六：距一直綫兩端等距之兩点，决定这一直綫的垂直平分綫。

假設：$MA=MB, NA=NB$.

求証：$MN\perp AB$.

証明：在 $\triangle ANM$ 及 $\triangle BMN$ 中，

$AM=BM$, （假設）

$AN=BN$, （假設）

$MN=MN$, （公有）

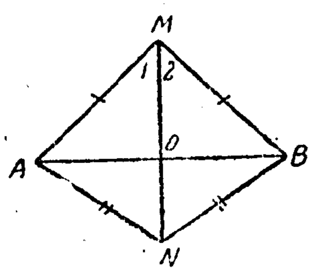


图 31

$\therefore\ \triangle ANM \equiv \triangle BMN$　　(s.s.s)

$\therefore\ \angle 1 = \angle 2$　　(对应角)

$\therefore$ MO 垂直平分 AB.　(定理四之系一)。

系一： 距一直綫兩端等距之点，必在这一直綫的垂直平分綫上。

习　題　二

1. 假設 $\angle a=40°$，$\angle b=40°$，$\angle c=130°$，$\angle d=50°$。AEC 是一条直綫，証明 $AD=AB$。
2. 若 $AC=BC$，$AE=DB$，則 $CD=CE$。
3. 四边形的对边相等，对角亦相等。
4. 等腰三角形兩腰上的中綫相等。

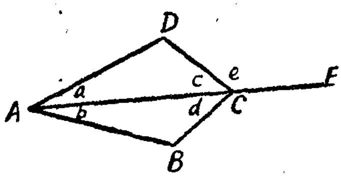


图 32

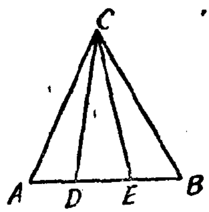


图 33

5. 基本作图題

基本作图題

(1)二等分一已知直綫。

假設：一直綫 AB。

求作：二等分 AB。

作法：以 A、B 为圓心，用相等而大于 $\frac{1}{2}AB$ 的半徑之弧交于 C 及 E，連接 CE 交 AB 于 D，則 D 二等分 AB。

証明：讀者自己补出。

（2）二等分一已知角。

假設：一已知$\angle A$。

求作：$\angle A$平分綫。

作法：以A为圆心，以适当長为半徑作弧交$\angle A$兩边于B,C。再分别以B,C为圆心，大于$\frac{1}{2}BC$之長为半徑作弧交于D，連接AD則为$\angle A$的二等分綫。

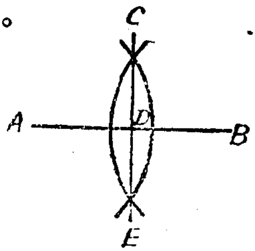


图 34

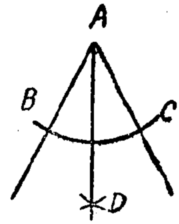


图 35

証明：讀者自己补出。

（3）过已知直綫上一点作垂直綫。

假設：AB直綫上一点O。

求作：过O作AB垂直綫。

作法：以O为圆心，适当長为半徑，作弧交AB于C,D。再分别以C、D为圆心，大于CO之長为半徑作弧交于E。連接EO即为所求的垂直綫。

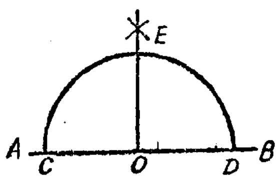


图 36

証明：讀者自己补出。

（4）作一角等于一已知角。

假設：已知$\angle O$。

求作：作$\angle A$，使$\angle A=\angle O$。

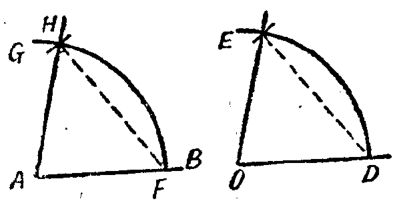


图 37

作法：作直綫AB，分别以A、O为圆心，适当長为半徑作弧GF及ED，使$\overset{\frown}{ED}$交$\angle O$兩边于D,E兩点，$\overset{\frown}{GF}$交AB于F点，以F为圆心，DE为半徑作弧交$\overset{\frown}{GF}$于H，連接AH，則$\angle A=\angle O$。