

高等数学袖珍手册

高等数学袖珍手册

胡 淑 洪

科学技术出版社

1959年·北京

編 者 的 話

为了培养又紅又專的建設人材，我国的很多高等学校，都开办了老干部特別班，并广泛吸收工农干部入学。这批學員大都有丰富的階級斗争和生产斗争的經驗，对科学原理能作深入的思考和透辟的了解。但由于他們缺乏基本的数学訓練，对初等数学知識掌握得不够巩固和熟練，又加上年紀稍大，記憶力較差等特点，在學習高等数学时，会感到不少困难。

这本手冊，主要为了这批學員編写的，帮助他們来攻克数学这座堡壘。手冊中有常用到的初等数学基本公式及高等数学中的公式、圖形及解決問題的方法，和备查的材料表格等。內容力求精簡，以便隨身攜帶翻閱。这本手冊不但可供學習期間使用，也可供将来工作上解決問題时参考。在取材上除初等数学外，主要是高等数学中基本的和常用到的內容，其次也有备查的材料。

为了滿足上述性質，本書在写出上的特点如下：

1. 为了查閱材料的方便，尽量用表格形式。

2. 列出常用的公式和解決問題的基本方法，在計算方法上只作說明，不作理論分析。

3. 指出某些部分容易犯的錯誤，幫助正確的处理問題。

4. 結合工程上应用的特点，本書在高等数学部分以解析几何、微分法、积分法、微分方程为主。其他如：級数部分，写出的比較少；又如：曲綫积分，曲面积部分，只列出几个主要公式。

5. 为了研究函数圖形的参考，列出三种（直角坐标、極坐标、参数）方程中常見的函数圖形。

6. 为了滿足計算問題的方便，列出常用的函数表。如自然对数表、常用对数表、三角函数表及积分表。更为了查考方便，在积分表前面另附了几頁积分表的目录，还夹有一頁常用的微分和积分公式。

胡淑洪 序于北京

1958年9月

目 次

序 言

第一章 初等数学常用知識

§1 代 数

1. 数的可約性判别法..... 1
2. 乘法及析因式公式..... 2
3. 分式运算..... 5
4. 指数运算..... 5
5. 有理化分母..... 7
6. 对数运算..... 7
7. 方程式..... 9
8. 不等式..... 11
9. 級数..... 13
10. 复数..... 15

§2 几 何

1. 利用圓規直尺的基本作圖法..... 17
2. 平面几何圖形面积..... 28
3. 立体几何圖形側面积及体积..... 32
4. 橢圓体及旋轉体体积..... 36

§3 三 角

1. 角的理与度的关系..... 37
2. 三角函数的定义表示..... 37
3. 基本公式..... 38

4.	α 为任意角时三角函数的正负号	39
5.	任意角函数化为锐角函数	40
6.	特殊角的函数	40
7.	负角函数	41
8.	和角、差角、倍角, 及半角函数公式	41
9.	函数的和差化乘积, 及函数的乘积化和差公式	43
10.	定积分运算中几个常用的三角函数公式	44
11.	斜三角形重要定理	44
12.	三角形中各线、与边和角的关系	46
13.	反三角函数及取值范围	47
14.	三角方程解的通值	48

第二章 行列式及方程解法

§ 4 二阶及三阶行列式

1.	行列式的展开及性质	49
----	-----------	----

§ 5 线性方程组及齐次方程组

1.	二元线性方程组的解	52
2.	二元线性齐次方程组的解	53
3.	两个三元线性齐次方程组的解	53
4.	三元线性齐次方程组的解	54
5.	三元线性方程组的解	54
6.	n 元线性方程组的解	56

§ 6 三次方程及高次方程解法

1.	简化形式的三次方程解法	57
2.	一般三次方程解法	58
3.	四次方程解法	58
4.	n 次方程实根近似值求法	59

第三章 矢 量

§ 7 矢量代数

1. 矢量运算..... 62
2. 矢量运算的坐标 (投影) 表达式..... 66

§ 8 矢量导数

1. 矢量导数的投影表示..... 68
2. 矢量微分的投影表示..... 68
3. 矢量微分公式..... 68

第四章 解析几何

§ 9 平面解析几何

1. 几个简单问题..... 70
2. 坐标变换..... 74
3. 直线..... 77
4. 二次曲线..... 87

§10 空间解析几何

1. 几个简单问题..... 97
2. 平面与直线..... 102
3. 二次曲面..... 113

第五章 微分法

§11 基本公式

1. 基本初等函数的导函数及微分..... 120
2. 双曲函数及其导函数..... 122

§12 微分法则

1. 一元函数四则运算的微分法则..... 123
2. 复合函数及隐函数微分法..... 124

§13	高阶导函数	125
§14	函数研究	127

第六章 积分法

§15	不定积分基本公式	130
§16	积分法則	
1.	积分的基本法則	133
2.	有理函数积分法	134
3.	无理函数积分法	136
4.	三角函数积分法	139
§17	定积分	
1.	定积分的性質	141
2.	定积分計算法	143
§18	定积分应用	
1.	定积分在几何方面的应用	143
2.	定积分在物理方面的部分应用	149

第七章 微分方程

§19	一阶微分方程解法	154
§20	二阶微分方程解法	158

第八章 級数

§21	几个基本級数的判敛准則	164
§22	函数的展开	
1.	台劳級数公式	165
2.	几个常用的函数近似表示式	165
3.	展开函数为幂級数	166
§23	尤拉公式	

1. 公式	170
2. 三角函数和双曲函数的基本关系	170
§24 富里哀级数展开式	171

第九章 重积分、曲线积分及曲面积分

§25 二重积分	
1. 二重积分算法	175
2. 极坐标中二重积分算法	177
3. 二重积分的应用	178

§26 三重积分	
1. 三重积分算法	180
2. 柱坐标及球坐标中三重积分算法	181
3. 三重积分的应用	183

§27 曲线积分与曲面积分	
1. 曲线积分与二重积分的关系 (格林公式)	184
2. 曲面积分与曲线积分的关系 (斯托克斯公式)	185
3. 曲面积分与三重积分的关系 (奥氏公式)	186

第十章 函数图形

§28 直角坐标方程图形	
1. 幂函数	187
2. 指数函数和对数函数	189
3. 三角函数和反三角函数	191
4. 双曲函数和反双曲函数	194
5. 其他函数	193
§29 极坐标方程图形	202
§30 参数方程图形	207

第十一章 表

§31	常用的常数表	210
§32	自然对数表 (以 e 为底)	212
§33	常用对数表 (以 10 为底)	218
§34	三角函数表	224
§35	积分表	241
附录	积分表目次	239

第一章 初等数学常用知識

§1 代 数

1. 数的可約性判別法

約数 n	可以用 n 除尽的数的判別法
2	末位为偶数或 0。
3	各位数字之和可用 3 除尽。
4	末两位为 0，或最后两位数字所成的数可用 4 除尽。
5	末位为 5 或 0。
6	用 2 和 3 都可除尽。
7	由十位以前的数与其个位数字的两倍之差可用 7 除尽或为 0。
8	末三位为 0，或最后三位数字所成的数可用 8 除尽。
9	各位数字和可用 9 除尽。
10	末位为 0。
11	自右端数起： (奇数位数字和)减(偶数位数字和)为 0， 或用 11 除尽。

約數 n	可以用 n 除尽的数的判别法
25	末两位为 0，或最后两位数字所成的数可用 25 除尽。
100	末两位为 0。
1000	末三位为 0。

2. 乘法及析因式公式

公式分类		公 式
二項式	相 乘	$(a+b)(a+c) = a^2 + (b+c)a + bc$ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
	平 方	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
	立 方	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
	n 次 方 (二項式 定理)	$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3}b^3 + \dots$ $+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} a^{n-k}b^k$ $+ \dots + b^n$

公式分类	公 式
	$(a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots$ $+ (-1)^k \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + \dots + (-1)^n b^n$
三項式	<p>平 方</p> $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ <p>立 方</p> $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$
多項式平方	$(a+b+c+\dots+st)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \dots + s^2 + t^2 + 2ab + 2ac + \dots + 2as + 2at + 2bc + \dots + 2bs + 2bt + \dots + 2st.$
立 方 和	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
四 次 方 和	$a^4 - b^4 = (a+b)(a-b)(a^2 + b^2)$ $a^4 + b^4 \text{ 不能分解因式}$

公式分类		公 式
n 次 方 和	n为奇数	$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$
	n为奇数 偶数均可	$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

注意 $a^n + b^n \neq (a+b)^n \neq a^n - b^n \neq (a-b)^n$

注 二項式展开系数。

次 数	系 数
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
⋮

3. 分式运算

說 明	公 式
分母相同的两分式相加。	$\frac{b}{a} \pm \frac{c}{a} = \frac{b \pm c}{a}$
分母无公因数的两分式相加。	$\frac{b}{a} \pm \frac{d}{c} = \frac{bc \pm ad}{ac}$
两分式相乘	$\frac{b}{a} \times \frac{d}{c} = \frac{bd}{ac}$
两分式相除	$\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{d}{c}} = \frac{bc}{ad}$

注意 $\frac{b}{a} + \frac{d}{c} \neq \frac{b+d}{a+c}$, $\frac{a+c}{ab} \neq \frac{c}{b}$

4. 指数运算

分 类	公 式
乘	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
除	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

分 类		公 式
冪指数	乘方	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $(ab)^n = a^n b^n$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
	开方	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
	乘方开方 混合计算	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
0 指数		$a^0 = 1$
分指数		$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
负指数		$a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}$ $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

5. 有理化分母

	公 式
	$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{ab^{m-1}}}{b}$
	$\frac{A}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{A(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$
	$\frac{A}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}} = \frac{A(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \sqrt[n]{a^{n-3}b^2} + \dots + \sqrt[n]{b^{n-1}})}{a-b}$
	$\frac{A}{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}} = \frac{A(\sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \sqrt[n]{a^{n-3}b^2} - \dots + \sqrt[n]{b^{n-1}})}{a-b}$
	(n 为奇数时)

6. 对数运算

	公 式
重要关系	$a^y = x \leftrightarrow y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1, x > 0)$ $\log_a a = 1$ $\log_a 1 = 0$ $\bullet \log_a 0 \rightarrow -\infty$