SHUXUE ZIXI YU FUDAO

数学
自习与辅导

初中代数

（第二册）

张福生 编

上海科学技术出版社

数学自习与辅导

初中代数

（第二册）

张福生 编

上海科学技术出版社

数学自习与辅导
初中代数
(第二册)
张福生　编
上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路450号)
新华书店上海发行所发行　上海群众印刷厂印刷
开本787×1092　1/32　印张5.625　字数124,000
1985年9月第1版　1985年9月第1次印刷
印数1-316,000
统一书号：13119·1258　　定价：0.83元

前　言

本书是配合现用初中代数第二册课本的学习辅导读物.

初中代数第二册共有四章.其中,“二元一次方程组”是第一册“一元一次方程”的发展;“整式的乘除”是第一册“整式的加减”的继续;“因式分解”是与整式乘法互逆的一种过程,有十分广泛的应用;“分式”是和整式不同的一种代数式,是分数的扩展. 这四章是今后学习代数和整个数学的重要基础.

不少同学在学习这些知识时,往往出现各种问题,如:解二元一次方程组时不会选择较好的方法,影响准确率;对整式乘除的法则及原理模糊,运算中系数、指数及各项符号往往出错;对乘法公式的运用不熟练;对掌握因式分解的基本步骤和方法感到困难,更不善于灵活运用,因而出现“掉队”;在分式学习中,不少同学对分式何时有意义不重视,解分式方程不注意验根等等. 此外,有些同学由于缺乏良好的学习习惯和方法,轻视概念、原理的学习,满足于了解“怎样做”,不重视追问“为什么要这样做”(目的性)和“为什么能这样做”(合理性),造成综合运用基础知识的能力比较薄弱,运算错误率高等问题.本书针对学生学习中存在的问题和容易疏漏的地方,有目的、有重点地进行辅导.

为了帮助学生掌握基础知识和基本方法,各章除了对重点、难点和应注意的关键问题作扼要的说明外,还配有“学习指导与例题”. 每一节后面有“基本练习题”,每一章后面有“复习练习题”和“自我检查题”. 书末附有答案.

“学习指导与例题”是选择若干典型性、代表性、针对性较

强的题目，结合基本概念、解题规律作说明和指导，指出分析问题的思考方法．“基本练习题”为课本习题填补台阶、搭桥铺路，帮助学生正确理解、掌握和运用概念、法则与原理．除了较多数量的运算题外，还选编了一定数量的概念题．“复习练习题”大部分与课本的“复习参考题”要求相当，其中一部分比较灵活或属于选学内容的习题打了*号，这档题供学有余力、力所能及的同学选做．“自我检查题”相当于一章的测验题，知识上有一定的覆盖面，能力上有一定的坡度，有助于同学自我检测．

上述各类习题，均由浅入深，由易到难，循序编排．既注意阶段性与综合性相结合，又有适当的归类与引伸，有利于学生对概念的理解和综合运用知识的能力的提高．

本书既能引起学生自习的兴趣，陪伴同学学完初中代数第二册，又便于家长针对子女的学习情况选材辅导，同时，可作为教师对学生学习与复习指导时的参考，也适合厂矿企业文化补习班选用．

本书编写过程中，曾得到周继光同志的帮助，在此谨致谢意．

限于编者水平，时间仓促，本书一定会有不少缺点、错误，恳切希望读者批评指正．

编　者

1984年8月

目　　录

一、二元一次方程组

这一章的基本概念是二元一次方程和二元一次方程组以及它们的解；重点是二元一次方程组的解法和列方程组解应用题.

解二元一次方程组的关键是“消元”，即把二元一次方程组消去一个元，化为一元一次方程. 所以解二元一次方程组是以解一元一次方程为基础的，建议读者复习一下一元一次方程的概念和解法步骤.

学了解方程组，将使我们解应用题多了一种工具. 由于列方程组可以设两个未知数，列方程组解应用题往往比列方程解容易些.

1·1 二元一次方程和二元一次方程组

学习指导与例题

理解二元一次方程的概念必须抓住两点：(1)有两个未知数(元)；(2)含未知数的项的次数都是1.

对二元一次方程组的概念也必须抓两点：(1)整个方程组含有两个而且只含有两个未知数；(2)方程组中每个方程都是一次方程.

学习中还要注意二元一次方程和二元一次方程组的解是什么以及解的个数各有多少.

例1 (1) 二元一次方程 $x+2y=3$ 有多少个解?

(2) 找出它的五个解来.

(3) 在这个方程的解中, y 可以指定是 0、10、100、$\frac{1}{100}$ 吗?

(4) x 和 y 都任意指定, 可以是这个方程的解吗?

解 (1) 二元一次方程 $x+2y=3$ 有无数个解.

$\because$ 原方程变形则得

$$y=\frac{1}{2}(3-x) \qquad ①$$

x 任取一个值代入①, y 都能得到一个相应值, 这些 x、y 值组成的数对都是原方程的解.

(2) 任取 $x=1, 2, 3, 4, 5$, 代入①得

$$y=1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1,$$

则原方程的五个解为:

$$\begin{cases}x=1,\\y=1;\end{cases} \quad \begin{cases}x=2,\\y=\frac{1}{2};\end{cases} \quad \begin{cases}x=3,\\y=0;\end{cases} \quad \begin{cases}x=4,\\y=-\frac{1}{2};\end{cases} \quad \begin{cases}x=5,\\y=-1.\end{cases}$$

(3) y 的值也可以任意指定.

$\because$ 原方程可变形为

$$x=3-2y \qquad ②$$

将指定值 $y=0, 10, 100, \frac{1}{100}$ 代入②, 得

$$x=3, -17, -197, 2\frac{49}{50}.$$

于是又得原方程的四个解:

$$\begin{cases}x=3,\\y=0;\end{cases}\quad\begin{cases}x=-17,\\y=10;\end{cases}\quad\begin{cases}x=-197,\\y=100;\end{cases}\quad\begin{cases}x=2\dfrac{49}{50},\\y=\dfrac{1}{100}.\end{cases}$$

(4) x 和 y 不可以同时任意指定．如 $x=2$, $y=1$ 代入原方程，$2+2\times1\neq3$，所以 $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$ 不是这个方程的解．

说明 二元一次方程的解有不定性，它的解可以有无数个；但二元一次方程的解又有相关性，两个未知数的关系由方程确定，互相联系，互相制约，而不是 x、y 同时任取什么值都是方程的解．二元一次方程的"一个解"是指"一对数"，即适合于方程的一对未知数的值，这与一元一次方程完全不同．

例 2 已知方程组 $\begin{cases}2x-y=5 & ①\\x+3y=-1 & ②\end{cases}$

和数对 (1) $\begin{cases}x=0,\\y=-5;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=-1,\\y=0;\end{cases}$ (3) $\begin{cases}x=-4,\\y=1;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x=1,\\y=-3;\end{cases}$ (5) $\begin{cases}x=2,\\y=-1;\end{cases}$ (6) $\begin{cases}x=3,\\y=1;\end{cases}$

(7) $\begin{cases}x=1,\\y=-1;\end{cases}$ (8) $\begin{cases}x=5,\\y=-2;\end{cases}$

试在各数对中找出：方程①的解；方程②的解；以及所给方程组的解．

解 把所给数对一一代入原方程，知：

(1)、(4)、(5)、(6)是方程①的解；

(2)、(3)、(5)、(8)是方程②的解；

(5)适合方程①、②，是所给方程组的解．

说明 ① 方程组的解必须是方程组中各方程的公共解，它必须同时适合各个方程．

② 方程组通常有唯一的一个解，但有的方程组可能有无数个解或者没有解.

*例 3 讨论下列方程组解的情况:

(1) $\begin{cases} 3x-2y=1 & ① \\ 6x-4y=2 & ② \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x-2y=1 & ③ \\ 6x-4y=3 & ④ \end{cases}$

解 (1) 方程组中两个方程的对应项系数成比例:

$$\frac{3}{6}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$$

方程②两边除以 2, 得

$$3x-2y=1$$

这就是方程①.

由此可见，方程①、②确定的 x、y 的关系，相当于一个二元一次方程所确定的关系. 这种情况下，解是不定的，就是说，这个方程组有无数个解.

(2) 方程组(2)中未知数的系数对应成比例，但常数项不成比例:

$$\frac{3}{6}=\frac{-2}{-4}\neq\frac{1}{3}$$

方程④两边除以 2, 得

$$3x-2y=\frac{3}{2} \qquad ⑤$$

这里，方程③要求 $3x-2y=1$，而方程⑤即④要求 $3x-2y=\frac{3}{2}$. 很明显，同时满足这两个要求的一对值 x、y 是找不到的，所以，原方程组无解.

说明 当方程组中各方程的所有对应项系数成比例时，方程组有无数个解（这种方程组叫做不定方程组）；当各方程

* 本书有些例题和习题超出课本的范围或要求，特以 * 号标记，以供选学.

所有未知数的系数对应成比例而常数项不成比例时，方程组无解(这种方程组叫做矛盾方程组)．

基本练习题1·1

1．填表：

式	$\frac{1}{4}y$	$\frac{2x+y}{3}$	$3x^2$	$7xy$	$\frac{1}{x}$
是否单项式					
单项式次数					

2．指出下列各多项式中含有字母的项的次数和多项式的次数：

(1) $x+y$; (2) $4x^2-3y+1$; (3) $3xy-2x$; (4) $\frac{1}{3}x+\frac{y}{2}-6$.

3．什么叫方程？什么叫一元一次方程？

4．下列式子，如果是一元一次方程，就在(　　)中画"✓"，如果不是，就画"×"：

(1) $6x-7$;(　　)　　(2) $6x-7=0$;(　　)

(3) $x+y=7$;(　　)　　(4) $\frac{1}{x}-x=1$;(　　)

(5) $4x+3=3x-4$;(　　)　　(6) $xy=-5$.(　　)

5．能使方程左右两边的值相等的未知数的值，叫做方程的解．填括号：

(1) 8是不是$30-3x=6$的解？(　　)

(2) -3是不是$3x-2=x+8$的解？(　　)

(3) $-\frac{11}{5}$是不是$\frac{3x+1}{4}=\frac{x-2}{3}$的解？(　　)

6．写出下列解方程过程中每一步变形方法和依据：

$$1=\frac{x-2}{3}-\frac{3-2x}{2}$$

解　$6=2(x-2)-3(3-2x)$　(　　　　　　)

$$6=2x-4-9+6x \quad (\qquad\qquad)$$

$$6+4+9=2x+6x \quad (\qquad\qquad)$$

$$19=8x \quad (\qquad\qquad)$$

$$8x=19 \quad (\qquad\qquad)$$

$$x=\frac{19}{8} \quad (\qquad\qquad)$$

7．填空(一元一次方程和二元一次方程区别)：

(1) 一元一次方程有____个未知数，二元一次方程有____个未知数。

(2) 一般情况下，一元一次方程有____个解，二元一次方程有____个解。

8．填充：在下列二元一次方程中，分别用含 x 的代数式表示 y，用含 y 的代数式表示 x：

(1) $x+2y=16$, $y=$ ________, $x=$ ________;

(2) $3x-4y=8$, $y=$ ________, $x=$ ________;

(3) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=6$, $y=$ ________, $x=$ ________.

9．根据方程 $x-2y=5$ 及表格所给的 x (或 y)的值，分别求出相应的 y (或 x)的值，填入空格.

x	-1	0			5	
y			-2	3		10000

10．把下列方程化简为 $ax+by=c$ 的形式(其中 a、b、c 为整数)：

(1) $3(x-23)=7(3y+45)$；　(2) $\frac{y}{3}-\frac{x+2}{9}=6$;

(3) $6\left(x-\frac{y}{6}\right)-3\left(x+\frac{y}{9}\right)=0$;

(4) $16\%x+10\%y=12.5\%\times 600$.

11．写出下列方程的解，使 x 的值是 $-2\sim 4$ 的整数：

(1) $2x+y=3$;　(2) $3x+4y=2$;

在求得的这些解里，有没有这两个方程的公共解？

12．(1) 什么叫方程组的解？

(2) 数对 $\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$ 是方程 ① $3x+2y=4$, ② $3y-4x=11$, ③ $7y=3-5x$ 的解吗? 是方程组

(I) $\begin{cases}3x+2y=4\\3y-4x=11\end{cases}$, (II) $\begin{cases}3x+2y=4\\7y=3-5x\end{cases}$, (III) $\begin{cases}3y-4x=11\\7y=3-5x\end{cases}$ 的解吗?

(3) 下列说法对不对? 为什么?

$\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$ 是方程组(II) 的一对解; $\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$ 是方程组 (II) 的两个值; $\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$ 是方程组(II)的一个解.

13. 据所给条件,填空并回答:

(1) 方程 $2x-5y=-2$ 有解 $\begin{cases}x=0,\\y=(\quad);\end{cases}$ $\begin{cases}x=1,\\y=(\quad);\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\y=(\quad);\end{cases}$ $\begin{cases}x=3,\\y=(\quad);\end{cases}$ $\begin{cases}x=4,\\y=(\quad);\end{cases}$ $\begin{cases}x=5,\\y=(\quad);\end{cases}$ $\begin{cases}x=6,\\y=(\quad);\end{cases}$ $\begin{cases}x=7,\\y=(\quad).\end{cases}$

(2) 方程 $4x+y=7$ 有解 $\begin{cases}x=0,\\y=(\quad);\end{cases}$ $\begin{cases}x=1,\\y=(\quad);\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\y=(\quad);\end{cases}$ $\begin{cases}x=3,\\y=(\quad);\end{cases}$ $\begin{cases}x=4,\\y=(\quad);\end{cases}$ $\begin{cases}x=5,\\y=(\quad);\end{cases}$ $\begin{cases}x=6,\\y=(\quad);\end{cases}$ $\begin{cases}x=7,\\y=(\quad).\end{cases}$

(3) 根据(1)、(2)能找到方程组 $\begin{cases}2x-5y=-2\\4x+y=7\end{cases}$ 的解吗? 如果找不到,能不能说这个方程组无解? 试用 $\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}\\y=1\end{cases}$ 代入试一试, 你能得到什么结论?

1·2 二元一次方程组的解法

学习指导与例题

解二元一次方程组的关键是消元,常用的消元法有两种:

代入消元法和加减消元法. 这两种方法都很重要，解题时应根据方程组的特点，选用较简便的方法，尽量避免"偏爱"某种解法的不好习惯.

解方程组并不难，有时可能较繁，但只要细心，按步骤顺序去做，而不"跳步"，就不会解错. 同时，还应养成检验的习惯，把求得的解代入原方程组，检验它是否适合. 这样，解方程组的准确率就会大大提高.

例 4 比较用代入法和加减法解下列方程组，哪种较简便？为什么？

(1) $\begin{cases} 3x+5y=5, \\ 4x-y=-1; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x-3y=7, \\ 6x+5y=35; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x-y=2, \\ 3x=11-2y. \end{cases}$

分析 当某个未知数的系数绝对值为1时，用代入法解较为简便；当两个方程中有一个未知数的系数的绝对值相等或成整数倍时，用加减法比较简便.

解 方程组(1)的第二个方程中，y 的系数为 -1，则选用代入法消元；

方程组(2)的两个方程中，x 的系数为2和6，后者为前者的3倍，故选用加减法消元.

方程组(3)的第一个方程中，y 的系数为 -1，且两个方程的 x 系数相等，故用两种方法解都方便. 但这里将 $3x=11-2y$ 直接代换第一个方程中的 $3x$ 更为简便：代得 $(11-2y)-y=2$，即可得 $y=3$，再代入第一方程得

$$3x=5,\ x=\frac{5}{3}. \quad \therefore \begin{cases} x=\dfrac{5}{3}, \\ y=3. \end{cases}$$

例 5 用代入法解方程组 $\begin{cases} x+1=5(z+2), \\ 3(2x-5)-4(3z+4)=5. \end{cases}$

解 化简原方程组,得

$$\begin{cases} x=9+5z & ① \\ 6x-12z=36 & ② \end{cases}$$

将①代入②,得

$$6(9+5z)-12z=36$$

$$54+30z-12z=36$$

$$18z=-18$$

$$\therefore \quad z=-1$$

$z=-1$ 代入①,得

$$x=4$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x=4 \\ z=-1 \end{cases}$$

说明 用代入法解二元一次方程组的步骤可概括为三句话表示:求表示式;代入消元;回代得解.这里要注意:

① 尽量选未知数系数的绝对值为1的那个方程求表示式.

② 代入消元时,必须将表示式代入另一个方程才能消元,不能代入原方程,否则将求不出确定的解.

③ 方程组的解是一对数,而不是一个数.回代时,将消元后求得的一个未知数的值,代入原方程组的任一个方程,都可以求得另一个未知数的值,从而得解."消元"和"回代"是缺一不可的两个步骤.

④ 求得两个未知数的值后,必须写成一个解的形式,如 $\begin{cases} x=a, \\ y=b. \end{cases}$

例 6 用加减法解方程组

$$\begin{cases} 5s+6t=16 & ① \\ 7s-9t=5 & ② \end{cases}$$

解 先消去 t. ①×3 得

$$15s+18t=48 \quad ③$$

②×2 得

$$14s-18t=10 \quad ④$$

③+④得 $$29s=58$$

$$s=2$$

$s=2$ 代入①, 得

$$t=1$$

$$\therefore \begin{cases} s=2 \\ t=1 \end{cases}$$

说明 用加减法解二元一次方程组的步骤, 也可归纳为三点: (1) 变换系数: 把一个方程或两个方程的两边都乘以适当的数, 变换两个方程的某一个未知数的系数使它们的绝对值相等; (2) 加减消元: 把变换系数后的两个方程的两边分别相加或相减, 消去这个未知数, 得到只含另一未知数的一元一次方程, 求出它的值; (3) 回代得解: 用得到的一个未知数的值代入原方程组中任意一个方程, 求得另一个未知数的值, 从而得解.

基本练习题 1·2

1. 观察思考: 下列二元一次方程组, 如用代入法解, 应先对哪个方程变形? 变形成哪个未知数的表示式解起来简便些? 为什么? (不要求具体解)

(1) $\begin{cases} x+5z=6 & ① \\ 3x-6z=4 & ② \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2s=3t & ① \\ 3s-2t=5 & ② \end{cases}$