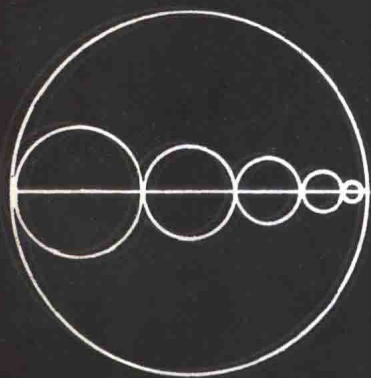
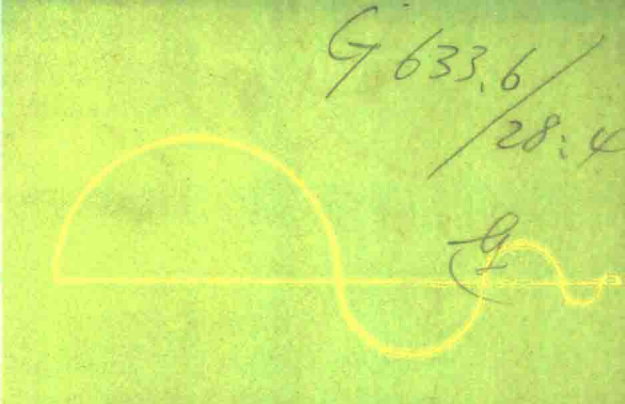
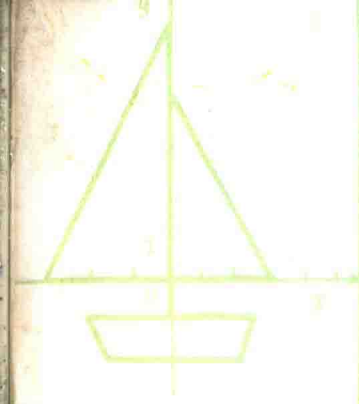
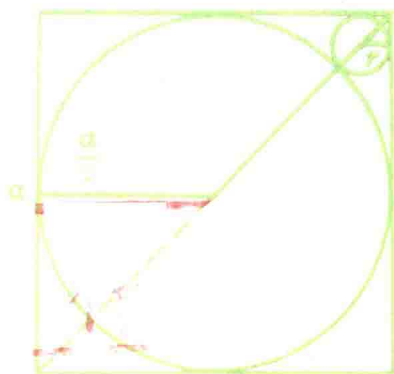




中学数学 实验教材

第四册 上



北京师范大学出版社

中学数学实验教材
第四册（上）

中学数学实验教材编写组 编

北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京东方印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/32 印张9.5 字数: 199千

1984年6月第1版 1984年6月第1次印刷

印数: 1—30,000

统一书号: 7243·229 定价: 0.84元

前 言

这一套中学数学实验教材，内容的选取原则是 精 简 实 用，教材的处理力求深入浅出，顺理成章，尽量作到使人人能懂，到处有用。

本教材适用于重点中学，侧重在满足学生将来从事理工方面学习和工作的需要。

本教材的教学目的是：使学生切实学好从事现代生产，特别是学习现代科学技术所必需的数学基础知识；通过对数学理论、应用、思想和方法的学习，培养学生的运算能力，思维能力，空间想象力，从而逐步培养运用数学的思想和方法去分析和解决实际问题的能力；通过数学的教学和学习，培养学生良好的学习习惯，严谨的治学态度和科学的 思 想 方 法，逐步形成辩证唯物主义世界观。

根据上述教学目的，本教材精选了传统数学那些普遍实用的最基础的部分，这就是在理论上、应用上和思想方法上都是基本的、长远起作用的通性、通法。比如，代数中的数系运算律，式的运算，解代数方程，待定系数法；几何中的图形的基本概念和主要性质，向量，解析几何；分析中的函数，极限，连续，微分，积分；概率统计以及逻辑、推理论证等知识，对于那些理论和应用上虽有一定作用，但发展余地不大，或没有普遍意义和实用价值，或不必要的重复和过于繁锁的内容，如立体几何中的空间作图，几何体的体积、表面积计算，几何难题，因式分解，对数计算等作了较大的精简或删减。

全套教材共分六册。第一册是代数。在总结小学所学自

然数、小数、分数基础上，明确提出运算律，把数扩充到有理数和实数系，灵活运用运算律解一元一次、二次方程，二元、三元一次方程组，然后进一步系统化，引进多项式运算，综合除法，辗转相除，余式定理及其推论，学到根式、分式、部分分式。第二册是几何。由直观几何形象分析归纳出几何基本概念和基本性质，通过集合术语，简易逻辑转入欧氏推理几何，处理直线形、圆、基本轨迹与作图、三角比与解三角形等基本内容。第三册是函数。数形结合引入坐标，研究多项式函数，指数、对数、三角函数，不等式等。第四册是代数。把数扩充到复数系，进一步加强多项式理论，方程式论，讲线性方程组理论，概率（离散的）统计的初步知识。第五册是几何。引进向量，用向量和初等几何方法综合处理几何问题，坐标化处理直线、圆、锥线，坐标变换与二次曲线讨论，然后讲立体几何，并引进空间向量研究空间解析几何初步知识。第六册是微积分初步。突出逼近法，讲实数完备性，函数，极限，连续，变率与微分，求和与积分。

本教材基本上采取代数、几何、分析分科，初中、高中循环排列的安排体系。教学可按初一、初二代数、几何双科并进，初三学分析，高一、高二代数（包括概率统计）、几何双科并进，高三学微积分的程序来安排。

本教材的处理力求符合历史发展和认识发展的规律，深入浅出，顺理成章。突出由算术到代数，由实验几何到论证几何，由综合几何到解析几何，由常量数学到变量数学等四个重大转折，着力采取措施引导学生合乎规律地实现这些转折，为此强调数系运算律，集合逻辑，向量和逼近法分别在实现这四个转折中的作用。这样，既遵循历史发展的规律，又突出几个转折关头，缩短了认识过程，有利于学生掌握数学思

想发展的脉络，提高数学教学的思想性。

这一套中学数学实验教材是教育部委托北京师范大学、中国科学院数学研究所、人民教育出版社、北京师范学院、北京景山学校等单位组成的领导小组组织“中学数学实验教材编写组”，根据美国加州大学伯克利分校数学系项武义教授的《关于中学实验数学教材的设想》编写的。第一版印出后，由教育部实验研究组和有关省市实验研究组指导，在北京景山学校、北京师院附中、上海大同中学、天津南开中学、天津十六中学、广东省实验中学、华南师院附中、长春市实验中学等学校试教过两遍，在这个基础上编写组吸收了实验学校老师们的经验和意见，修改成这一《中学数学实验教材》，正式出版，供中学选作实验教材，教师参考书或学生课外读物。在编写和修订的过程中，项武义教授曾数次详细地修改过原稿，提出过许多宝贵意见。

本教材虽然试用过两遍，但是实验基础仍然很不够，这次修改出版，目的是通过更大范围的实验研究，逐步形成另一套现代化而又适合我国国情的中学数学教科书。在实验过程中，我们热忱希望大家多提意见，以便进一步把它修改好。

中学数学实验教材编写组

一九八四年三月

目 录

第一章 两角和与差的三角函数	(1)
§1. 两角和与差的三角函数	(1)
1.1 两角的和与差	(1)
1.2 两角和与差的余弦	(2)
1.3 两角和差的正弦	(7)
1.4 两角和与差的正切	(10)
习 题 1—1	(16)
§2. 二倍角的正弦、余弦和正切	(20)
2.1 二倍角的正弦、余弦和正切	(20)
2.2 万能公式	(26)
2.3 半角的正弦、余弦和正切	(29)
习 题 1—2	(36)
§3. 三角函数的和差化积与积化和差	(41)
3.1 三角函数的和差化积	(41)
3.2 三角函数的积化和差	(50)
习 题 1—3	(56)
§4. 简单三角方程	(61)
4.1 最简单的三角方程	(61)
4.2 简单的三角方程	(63)
习 题 1—4	(68)
本章内容要点	(69)
复习题 一	(70)
第二章 线性方程组	(77)
§1. 高斯消元法	(77)
1.1 高斯消元法	(77)

1.2 一般二元一次方程组解的公式讨论	(83)
习 题 2—1	(87)
§2. 二阶行列式与二元线性方程组	(89)
2.1 二阶行列式	(89)
2.2 二元线性方程组解的行列式表示及讨论	(91)
习 题 2—2	(95)
§3. 三阶行列式与三元线性方程组	(97)
3.1 三阶行列式	(97)
3.2 三阶行列式的性质	(99)
3.3 余子式与代数余子式	(107)
3.4 三元线性方程组的公式解及讨论	(114)
习 题 2—3	(122)
§4. 四阶行列式与四元线性方程组	(126)
4.1 四阶行列式及其性质	(127)
4.2 四元线性方程组	(133)
习 题 2—4	(136)
§5. 特殊的线性方程组	(138)
5.1 方程个数多于未知数个数的线性方程组	(138)
5.2 方程个数少于未知数个数的线性方程组	(141)
5.3 齐次线性方程组	(145)
习 题 2—5	(152)
本章内容要点	(154)
复习题二	(158)
第三章 多项式的基础理论	(165)
§1. 多项式及其代数运算	(165)
1.1 多项式的概念	(165)
1.2 多项式加法与乘法	(169)
1.3 多项式的带余除法	(173)

习 题 3—1	(181)
§2. 余式定理与因式定理	(182)
2.1 余式定理	(182)
2.2 因式定理	(184)
2.3 余式定理、因式定理的推论	(188)
习 题 3—2	(182)
§3. 最高公因式与辗转相除法	(193)
3.1 最高公因式	(193)
3.2 辗转相除法	(196)
习 题 3—3	(201)
§4. 插值公式	(202)
4.1 余式定理推论的应用举例	(202)
*4.2 插值公式	(206)
习 题 3—4	(209)
*§5. 多项式的导数与换元展开式	(210)
*5.1 多项式的导数	(210)
*5.2 多项式的换元展开式—泰勒公式	(214)
*5.3 余式定理的推广	(220)
习 题 3—5	(223)
本章内容要点	(224)
复习题三	(228)
第四章 多项式的根	(231)
§1. 多项式的根及求根公式	(231)
1.1 一元一、二次多项式的求根公式	(231)
*1.2 一元三次和一元高次多项式的根	(235)
习 题 4—1	(239)
§2. 有理系数多项式的整数根和有理根	(240)
2.1 整系数多项式的整数根和有理根	(241)

2.2 多项式的正根与负根	(245)
习 题 4—2	(247)
§3. 两个多项式的公根与多项的重根	(248)
3.1 两多项式的公根	(248)
3.2 多项的重根	(250)
习 题 4—3	(253)
*§4. 实系数多项式的实数根	(254)
4.1 计算实根近似值的基本思想	(254)
4.2 实系数多项式实根的界和定位	(257)
4.3 实系数多项式实根的计算	(268)
习 题 4—4	(273)
§5. 二元二次方程组	(274)
5.1 二元二次方程二元二次方程组	(274)
5.2 二元二次方程组类型 (I) 的解法	(275)
5.3 二元二次方程组类型 (II) 的解法	(279)
习 题 4—5	(286)
本章内容要点	(289)
复习题四	(291)

第一章 两角和与差的三角函数

我们已经学习了任意角的三角函数及其性质、图象，这一章我们将要进一步学习两角和、差以及倍角、半角的三角函数，并将学习三角式的和差化积、积化和差变形和简单的三角方程。

§ 1. 两角和与差的三角函数

1.1 两角的和与差 设 α, β 为两个任意实数，它们分别表示两个角的数量。那么实数 $\alpha + \beta$ 就表示这两个角的和角的数量。两个角的和角可以做加法得到，即，以角 α 的终边为始边，再旋转出一个角 β （若 $\beta > 0$ ，按逆时针方向旋转；若 $\beta < 0$ ，按顺时针方向旋转），这时，以 α 角的始边为始边，以 β 角的终边为终边的角，就是角 $\alpha + \beta$ 。

两个角的差角可以由减法得出，角的减法是加法的逆运算，即 $(\alpha - \beta) + \beta = \alpha$ 。

两个角的差角，也可以表示成和角的形式，如 $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ 。

两个弧的和与差可按它们所对应的圆心角的和与差的法则来完成。

• 练习 •

试画图表示出以下的和角、差角：

1. $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$; 2. $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = -\frac{3\pi}{4}$.

1.2 两角和与差的余弦 两角和与差的余弦函数，可以利用每个单角的三角函数来表示。

定理 1 两个任意角 α, β 的和（或差）的余弦，等于这两个角的余弦的乘积减去（或加上）这两个角的正弦的乘积。
即

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad (1)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad (2)$$

证明：我们先来证公式（2）。

设 α, β 为任意两个给定的角（不论大小及正负），

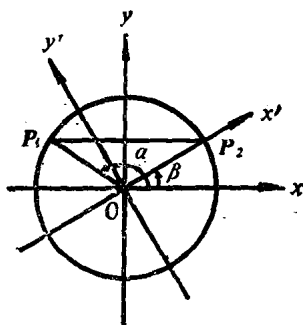


图1-1

把它们的始边都放在 x 轴正半轴，而终边与单位圆的交点分别为 P_1, P_2 (图1.1)。

把 ox 轴旋转到角 β 的终边位置而成 ox' 轴， oy 轴旋转同样的角而成 oy' 轴，

我们用两种方法计算弦长 P_1P_2 。

在 $x'oy'$ 坐标系中， P_1, P_2 的坐标是

$$P_1 (\cos (\alpha - \beta), \sin (\alpha - \beta)), P_2 (1, 0)。$$

利用两点间距离公式，得

$$\begin{aligned} P_1P_2^2 &= [\cos (\alpha - \beta) - 1]^2 + [\sin (\alpha - \beta) - 0]^2 \\ &= \cos^2 (\alpha - \beta) - 2\cos (\alpha - \beta) + 1 + \sin^2 (\alpha - \beta) \\ &= 2 - 2\cos (\alpha - \beta) \cdots \cdots ① \end{aligned}$$

在 xoy 坐标系中， P_1, P_2 的坐标是

$$P_1 (\cos \alpha, \sin \alpha), P_2 (\cos \beta, \sin \beta)。$$

利用两点间距离公式，得

$$\begin{aligned} P_1P_2^2 &= (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 \\ &= \cos^2 \alpha - 2\cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \\ &\quad - 2\sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta \\ &= 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \cdots \cdots ② \end{aligned}$$

在两个坐标系下，弦长是不变的，比较①式和②式，即得

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

这就是我们所要证明的。

既然公式 (2) 对任意 α, β 都成立，则以 $-\beta$ 代替 β ，也必成立

$$\cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha \cos(-\beta) + \sin\alpha \sin(-\beta)$$

再注意三角函数的奇偶性，就得到

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

这就是所要证明的公式 (1)

例 1. 不查表，求 $\cos 15^\circ$, $\cos 75^\circ$ 的值。

解：因为 $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$, $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$

$$\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

所以

$$\begin{aligned} \cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ \\ &\quad + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \approx 0.9659,$$

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ$$

$$- \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \approx \frac{2.4495 - 1.4142}{4}$$

$$\approx 0.2588.$$

例 2. 已知 $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\beta = -\frac{3}{4}$, 并且 α 是第二象限的角, β 是第三象限的角, 求 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值 (准确到 0.01) .

解：因为 α 是第二象限的角，所以

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{3},\end{aligned}$$

因为 β 是第三象限的角，所以

$$\begin{aligned}\sin\beta &= -\sqrt{1-\cos^2\beta} = -\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} \\ &= -\frac{\sqrt{7}}{4}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ &= \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{2}{3}\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) \\ &= \frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}{12} \\ &= \frac{3\times 2.236-2\times 2.646}{12} \\ &\approx 0.118 \\ &\approx 0.12.\end{aligned}$$

例 3. 证明对于任何角 α ，以下公式成立

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha.$$

证明：利用公式（2），可得

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\alpha,$$

但是

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1,$$

所以

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha.$$

又因为上式中的 α 为任意角，所以，若把公式中的 $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ 换成 α ，就可得

$$\cos \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right),$$

即
$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha.$$

• 练习 •

1. 等式 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha + \cos \beta$ 成立吗？

为什么？试举例说明

2. 不查表，求下列各式的值：

(1) $\cos 135^\circ$; (2) $\cos \left(\frac{-61\pi}{12} \right)$; (3) $\cos 1950^\circ$

(4) $\cos \frac{4\pi}{9} \cdot \cos \frac{\pi}{9} \cdot \sin \frac{4\pi}{9} \cdot \sin \frac{\pi}{9}$;

(5) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$.

3 已知 $\cos \theta = -\frac{5}{13}$, θ 为 III 象限角，试求 $\cos \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right)$,

$\cos \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right)$ 的值。

4 证明： α 为任意角时，下式成立。

$$(1) \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha,$$

$$(2) \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha.$$

1.3 两角和与差的正弦

定理2. 两个任意角 α 和 β 的和(差)的正弦等于第一个角的正弦乘以第二个角的余弦的积加上(减去)第一角的余弦乘以第二个角的正弦的乘积。即

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad (3)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \quad (4)$$

证明: 因为已经知道

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha.$$

所以

$$\sin(\alpha + \beta) = -\cos\left[\frac{\pi}{2} + (\alpha + \beta)\right]$$

$$= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \beta\right]$$

$$= -\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\cos\beta\right]$$

$$- \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\sin\beta\right]$$

$$= -\left[-\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\right]$$

$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

以 $(-\beta)$ 替换公式(3)中的 β , 得到

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha \sin(-\beta) \\ &= \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta.\end{aligned}$$

例 4 求 $\sin 15^\circ$ 和 $\sin 75^\circ$. (不查表)

解: $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$

$$\begin{aligned}&= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

(这就是 $\cos 75^\circ$ 的值).

$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ)$

$$\begin{aligned}&= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

(这就是 $\cos 15^\circ$ 的值).

例 5. 已知 $\cos \phi = \frac{3}{5}$, 且 ϕ 是第 IV 象限角, 试求

$\sin\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

解: 因为 ϕ 为第 IV 象限角, 所以

$$\sin \phi = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}.$$

于是

$$\sin\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \phi \cos \frac{\pi}{6} - \cos \phi \sin \frac{\pi}{6}$$