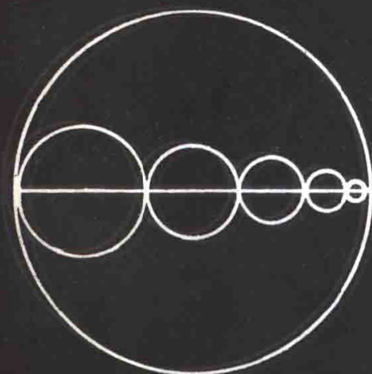
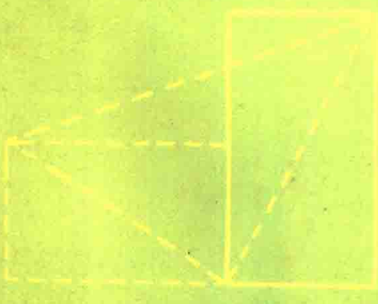
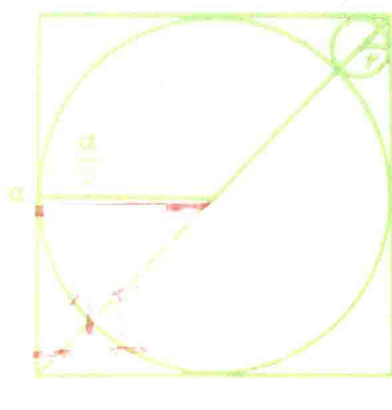


中学数学实验教材

第四册 上





北京师范大学出版社

中 学 数 学 实 验 教 材

第四册（上）

中学数学实验教材编写组　编

•

北京师范大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

北 京 东 方 印 刷 厂 印 刷

•

开本：787×1092　1/32　印张9.5　字数：199千

1984年6月第1版　1984年6月第1次印刷

印数：1—30,000

统一书号：7243·229　定价：0.84元

前　言

这一套中学数学实验教材，内容的选取原则是精简实用，教材的处理力求深入浅出，顺理成章，尽量作到使人人能懂，到处有用。

本教材适用于重点中学，侧重在满足学生将来从事理工方面学习和工作的需要。

本教材的教学目的是：使学生切实学好从事现代生产，特别是学习现代科学技术所必需的数学基础知识；通过对数学理论、应用、思想和方法的学习，培养学生的运算能力，思维能力，空间想象力，从而逐步培养运用数学的思想和方法去分析和解决实际问题的能力；通过数学的教学和学习，培养学生良好的学习习惯，严谨的治学态度和科学的思想方法，逐步形成辩证唯物主义世界观。

根据上述教学目的，本教材精选了传统数学那些普遍实用的最基础的部分，这就是在理论上、应用上和思想方法上都是基本的、长远起作用的通性、通法。比如，代数中的数系运算律，式的运算，解代数方程，待定系数法；几何中的图形的基本概念和主要性质，向量，解析几何；分析中的函数，极限，连续，微分，积分；概率统计以及逻辑、推理论证等知识，对于那些理论和应用上虽有一定作用，但发展余地不大，或没有普遍意义和实用价值，或不必要的重复和过于繁锁的内容，如立体几何中的空间作图，几何体的体积、表面积计算，几何难题，因式分解，对数计算等作了较大的精简或删减。

全套教材共分六册。第一册是代数。在总结小学所学自

然数、小数、分数基础上，明确提出运算律，把数扩充到有理数和实数系，灵活运用运算律解一元一次、二次方程，二元、三元一次方程组，然后进一步系统化，引进多项式运算，综合除法，辗转相除，余式定理及其推论，学到根式、分式、部分分式。第二册是几何。由直观几何形象分析归纳出几何基本概念和基本性质，通过集合术语，简易逻辑转入欧氏推理几何，处理直线形、圆、基本轨迹与作图、三角比与解三角形等基本内容。第三册是函数。数形结合引入坐标，研究多项式函数，指数、对数、三角函数，不等式等。第四册是代数。把数扩充到复数系，进一步加强多项式理论，方程式论，讲线性方程组理论，概率（离散的）统计的初步知识。第五册是几何。引进向量，用向量和初等几何方法综合处理几何问题，坐标化处理直线、圆、锥线，坐标变换与二次曲线讨论，然后讲立体几何，并引进空间向量研究空间解析几何初步知识。第六册是微积分初步。突出逼近法，讲实数完备性，函数，极限，连续，变率与微分，求和与积分。

本教材基本上采取代数、几何、分析分科，初中、高中循环排列的安排体系。教学可按初一、初二代数、几何双科并进，初三学分析，高一、高二代数（包括概率统计）、几何双科并进，高三学微积分的程序来安排。

本教材的处理力求符合历史发展和认识发展的规律，深入浅出，顺理成章。突出由算术到代数，由实验几何到论证几何，由综合几何到解析几何，由常量数学到变量数学等四个重大转折，着力采取措施引导学生合乎规律地实现这些转折，为此强调数系运算律，集合逻辑，向量和逼近法分别在实现这四个转折中的作用。这样，既遵循历史发展的规律，又突出几个转折关头，缩短了认识过程，有利于学生掌握数学思

想发展的脉络，提高数学教学的思想性。

这一套中学数学实验教材是教育部委托北京师范大学、中国科学院数学研究所、人民教育出版社、北京师范学院、北京景山学校等单位组成的领导小组组织“中学数学实验教材编写组”，根据美国加州大学伯克利分校数学系项武义教授的《关于中学实验数学教材的设想》编写的。第一版印出后，由教育部实验研究组和有关省市实验研究组指导，在北京景山学校、北京师院附中、上海大同中学、天津南开中学、天津十六中学、广东省实验中学、华南师院附中、长春市实验中学等学校试教过两遍，在这个基础上编写组吸收了实验学校老师们的经验和意见，修改成这一《中学数学实验教材》，正式出版，供中学选作实验教材，教师参考书或学生课外读物。在编写和修订的过程中，项武义教授曾数次详细地修改过原稿，提出过许多宝贵意见。

本教材虽然试用过两遍，但是实验基础仍然很不够，这次修改出版，目的是通过更大范围的实验研究，逐步形成另一套现代化而又适合我国国情的中学数学教科书。在实验过程中，我们热忱希望大家多提意见，以便进一步把它修改好。

中学数学实验教材编写组

一九八四年三月

目　　录

第一章　两角和与差的三角函数

我们已经学习了任意角的三角函数及其性质、图象，这一章我们将要进一步学习两角和、差以及倍角、半角的三角函数，并将学习三角式的和差化积、积化和差变形和简单的三角方程。

§1. 两角和与差的三角函数

1.1　两角的和与差　设 α、β 为两个任意实数，它们分别表示两个角的数量。那么实数 $\alpha+\beta$ 就表示这两个角的和角的数量。两个角的和角可以做加法得到，即，以角 α 的终边为始边，再旋转出一个角 β（若 $\beta>0$，按逆时针方向旋转；若 $\beta<0$，按顺时针方向旋转），这时，以 α 角的始边为始边，以 β 角的终边为终边的角，就是角 $\alpha+\beta$。

两个角的差角可以由减法得出，角的减法是加法的逆运算，即 $(\alpha-\beta)+\beta=\alpha$。

两个角的差角，也可以表示成和角的形式，如

$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$.

两个弧的和与差可按它们所对应的圆心角的和与差的法则来完成。

·练习·

试画图表示出以下的和角、差角：

1. $\alpha=30^\circ$， $\beta=45^\circ$； 2. $\alpha=\frac{\pi}{3}$， $\beta=-\frac{3\pi}{4}$.

1.2 两角和与差的余弦 两角和与差的余弦函数，可以利用每个单角的三角函数来表示。

定理 1 两个任意角α，β的和（或差）的余弦，等于这两个角的余弦的乘积减去（或加上）这两个角的正弦的乘积。即

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \quad (1)\\ \cos(\alpha-\beta)&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \quad (2)\end{aligned}}$$

证明：我们先来证公式（2）。

设α，β为任意两个给定的角（不论大小及正负），

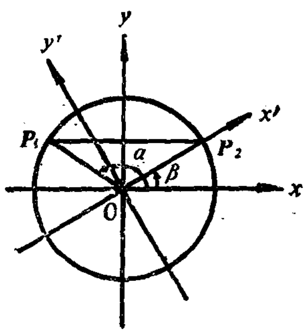


图1—1

把它们的始边都放在 x 轴正半轴，而终边与单位圆的交点分别为 P_1, P_2（图1.1）.

把 ox 轴旋转到角 β 的终边位置而成 ox' 轴，oy 轴旋转同样的角而成 oy' 轴.

我们用两种方法计算弦长 P_1P_2.

在 $x'oy'$ 坐标系中，P_1, P_1 的座标是

$$P_1\left(\cos(\alpha-\beta), \sin(\alpha-\beta)\right), P_2(1, 0).$$

利用两点间距离公式，得

$$\begin{aligned} P_1P_2^2 &= [\cos(\alpha-\beta)-1]^2+[\sin(\alpha-\beta)-0]^2 \\ &= \cos^2(\alpha-\beta)-2\cos(\alpha-\beta)+1+\sin^2(\alpha-\beta) \\ &= 2-2\cos(\alpha-\beta) \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

在 xoy 坐标系中，P_1，P_2 的坐标是

$$P_1(\cos\alpha, \sin\alpha), P_2(\cos\beta, \sin\beta).$$

利用两点间距离公式，得

$$\begin{aligned} P_1P_2^2 &= (\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2 \\ &= \cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha \\ &\quad -2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta \\ &= 2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta) \cdots\cdots ② \end{aligned}$$

在两个坐标系下，弦长是不变的，比较①式和②式，即得

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

这就是我们所要证明的。

既然公式（2）对任意 α, β 都成立，则以 $-\beta$ 代替 β，也必成立

$$\cos(\alpha-(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$$

再注意三角函数的奇偶性，就得到

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

这就是所要证明的公式（1）

例 1. 不查表，求$\cos15°$，$\cos75°$的值。

解： 因为 $15°=45°-30°$，$75°=45°+30°$

$$\cos45°=\sin45°=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin30°=\frac{1}{2},$$

所以

$$\cos15°=\cos(45°-30°)=\cos45°\cos30°+\sin45°\sin30°$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=$$

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\approx0.9659;$$

$$\cos75°=\cos(45°+30°)=\cos45°\cos30°-\sin45°\sin30°$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\approx\frac{2.4495-1.4142}{4}$$

$$\approx0.2588.$$

例2. 已知$\sin\alpha=\frac{2}{3}$，$\cos\beta=-\frac{3}{4}$，并且α是第二象限的角，β是第三象限的角，求$\cos(\alpha-\beta)$的值（准确到0.01）.

解：因为α是第二象限的角，所以

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{3},$$

因为β是第三象限的角，所以

$$\sin\beta = -\sqrt{1-\cos^2\beta} = -\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}$$

$$= -\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

因此

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{2}{3}\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$$

$$= \frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}{12}$$

$$= \frac{3\times2.236-2\times2.646}{12}$$

$$\approx 0.118$$

$$\approx 0.12.$$

例 3．证明对于任何角α，以下公式成立

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha.$$

证明：利用公式（2），可得

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\alpha,$$

但是

$$\cos\frac{\pi}{2}=0, \qquad \sin\frac{\pi}{2}=1,$$

所以

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha.$$

又因为上式中的 α 为任意角，所以，若把公式中的 $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ 换成 α，就可得

$$\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),$$

即

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha.$$

·练习·

1. 等式 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha+\cos\beta$ 成立吗？为什么？试举例说明

2. 不查表，求下列各式的值：

(1) $\cos135^\circ$； (2) $\cos\left(\frac{-61\pi}{12}\right)$； (3) $\cos1950^\circ$

(4) $\cos\frac{4\pi}{9}\cdot\cos\frac{\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{9}\cdot\sin\frac{\pi}{9}$；

(5) $\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ$.

3 已知 $\cos\theta=-\frac{5}{13}$，θ 为Ⅱ象限角，试求 $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$，$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$ 的值。

4 证明：α 为任意角时，下式成立。

（1）$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$；

（2）$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$。

1.3两角和与差的正弦

定理2. 两个任意角α和β的和（差）的正弦等于第一个角的正弦乘以第二个角的余弦的积加上（减去）第一角的余弦乘以第二个角的正弦的乘积。即

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad (3)\\ \sin(\alpha-\beta)&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \quad (4)\end{aligned}}$$

证明： 因为已经知道

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha.$$

所以

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=-\cos\left[\frac{\pi}{2}+(\alpha+\beta)\right]\\ &=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\beta\right]\\ &=-\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\beta\right.\\ &\quad\left.-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin\beta\right]\\ &=-\left[-\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\right]\\ &=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

以（$-\beta$）替换公式（3）中的β，得到

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

例 4 求sin15°和sin75°.（不查表）

解： $\sin15°=\sin(45°-30°)$

$$=\sin45°\text{coi}30°-\cos45°\sin30°$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

（这就是cos75°的值）.

$\sin75°=\sin(45°+30)$

$$=\sin45°\cos30°+\cos45°\sin30°$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

（这就是cos15°的值）。

例 5. 已知$\cos\phi=\frac{3}{5}$，且ϕ是第Ⅳ象限角，试求$\sin\left(\phi-\frac{\pi}{6}\right)$的值.

解： 因为ϕ为第Ⅳ象限角，所以

$$\sin\phi=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}.$$

于是

$$\sin\left(\phi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\phi\cos\frac{\pi}{6}-\cos\phi\cdot\sin\frac{\pi}{6}$$