理论力学
学习辅导

★ 刘书超 胡静 戴文琪 谢华阳 编

高等教育出版社

★ GAODENG JIAOYU CHUBANSHE

理论力学
学习辅导

内 容 提 要

本书是师专、中学师资培训(教育学院、卫星电视教育、函授、自学等)物理专业学生学习《理论力学简程》(丁光涛等编)的辅助教材. 但其编排、内容、写法与教材有相对独立性可单独使用.

全书共九章，基本按《简程》的章节编排. 包括质点运动学、质点动力学、振动与有心运动、相对运动、质点系动力学、刚体力学和分析力学等，第九章为综合训练. 每一章包括基本要求、内容提要、疑难辨析、解题指导、练习题、自测题等，书末附有习题和自测题答案与提示.

本书主要读者对象是以《简程》作为正式教材、但又缺乏教师经常直接辅导的读者(例如卫星电视教育、函授学院、在职中学教师进修和自学学员)，也可供日校师生参考.

本书是由刘书超(江苏教育学院)、胡静(北师大)，戴文琪(广东教育学院)、谢华阳(宜春师专)等共同编写的，由胡静统稿. 苏云荪(华东师大)担任主审并参加了修改.

理论力学学习辅导

刘书超 胡 静 戴文琪 谢华阳 编

*

高等教育出版社出版
高等教育出版社照排中心照排
新华书店北京发行所发行
北京市制本总厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 8 字数 200 000
1989 年 10 月第 1 版 1990 年 8 月第 2 次印刷
印数 7 141 — 12 940
ISBN7－04－002441－1/O·822
定价 2.15 元

前　言

本书是师专、培训中学师资(教育学院，卫星电视教育、函授、自学等)物理专业学生学习《理论力学简程》(丁光涛主编)的辅助教材. 主要对象是以此《简程》作为教材，但又缺乏教师经常直接辅导的读者，同时，它又是一本与此教材有相对独立性的学习辅助读物，也可供学习理论力学课程的日校师生和其它读者参考.

为了适应上述读者的需要，在本书的前八章中，每一章的第一部分都列出了学习本章应达到的基本要求. 在基本要求中，把教学目标作了明确的分类，说明哪一些只需要“知其然”的，哪一些需要“知其所以然”的，哪一些必须不但要理解，而且还要会应用(自然是练习性的应用). 凡是只需“知其然”的，在基本要求中用了“了解”、“看懂”和“懂得”的字眼；凡需要“知其所以然”的，用的是“理解”和“明确”这样的字眼；要求会应用的，则用了“学会”，“能应用”，“掌握”和“熟练掌握”等字眼. 提出这个基本要求的目的，是希望上述读者能主动对自己提出学习上的合理要求，同时也是对使用上述《简程》的教师所提出的建议.

每章的第二部分是该章的内容提要，提要的内容和体系全部取自《简程》，与《简程》本身相比，它起着提纲挈领的作用，是《简程》的缩影，它有助于读者的复习和总结，读者最好在认真理解和领会教材内容的基础上学习这部分内容. 提要中打星号部分是学习卫星电视课程学员的选学内容，对师专学员选学内容另有注明.

“疑难辨析”是每章的第三部分．这部分收集了学生在学习过程中的一些常见的疑难问题，虽然这部分不可能解决读者学习中的所有疑点，但将会对指导读者分析、思考、解决问题起一定作用．

除了物理概念和物理内容外，理论力学还是一门很讲究处理问题的方法和技巧的课程．大多数学生学习这门课程时都有一种相同的感受：听课容易解题难．正式教材由于其性质所决定，不可能在解题技巧和方法上花太多篇幅，然而学习辅导书可以在这方面发挥它的独特作用．本书每章（除第九章）的第四部分“解题指导”就是为此目的而写的．“解题指导”中所选例题并不多，每章少则六、七题，多则十几题，这些例题在内容和方法上应该是很基本和很典型的，它们的目的主要不在于获得结果，而是如何获得这些结果．因此，不择手段地获得结果，这在方法上是不可取的，本书尽量避免这种不良倾向，而是力求给出理科理论力学解题的规范方法．每一题的具体内容可能是很不同的，因而具体的方法也可能不会相同，但是各种不同的具体方法应该有一种统一的模式，模式本身也是一种方法上的指导，本书力求做到这一点．每一章中，许多例题后面还附有与此例题有直接关系的简短讨论、说明和思考，以求取得举一反三的效果．

前八章每章的习题选自教材的部分基本习题和其它常见习题，并在全书的附录中备有答案和提示．

自测题提供给读者自己练习的机会，并测试自己学习的效果．自测题的答案在附录中．

本书的最后一章是“综合解题训练”，是为那些学完了本课程的学生进行综合性练习而准备的．

本书由江苏教育学院刘书超负责组织，并与广东教育学院戴文琪、江西宜春师专谢华阳、北京师范大学胡静共同编写，胡静负责最后统稿．华东师范大学苏云荪担任本书主审，对全书编写原则、体例及内容提出了详细的、重要的意见并作了许多具体修

改，在本书编写过程中还得到丁光涛、卢如模、郑传文等许多同志的帮助和支持，特别是丁光涛同志对本书的编写提出了许多宝贵意见，还编写了本书内容提要部分，在此表示衷心感谢.

编　者　1989.3

目　录

第一章　运动学基础

一、基 本 要 求

1. 掌握参考系、质点的位矢、位移、速度、加速度等运动学基本概念，能够运用矢量的代数运算和求导运算得出速度、加速度在直角坐标、极坐标和自然坐标的分量表示式.

2. 能够熟练地根据质点的已知运动和几何关系，建立运动学方程，求得速度和加速度．会由速度、加速度及初始条件求得运动学方程．并能够运用以上的基本方法求解质点运动学的一些问题.

3. 掌握刚体定轴转动的角速度和角加速度概念，以及刚体上各点速度和加速度的公式，并能解决有关的运动学问题.

二、内 容 提 要

(一) 质点运动学基本概念

1. 物体之间相对位置的变化称为**机械运动**．为了描述运动物体的位置及其变化必须选取**参考系**．参考系不是唯一的，在运动学领域中各种参考系是平权的.

质点是力学中最简单、最基本的模型．对于确定的参考系，质点的位置可以用**位矢** $\boldsymbol{r}$ 来表示，$\boldsymbol{r}$ 是从参考系原点指到质点的矢量．矢量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 描述了质点位置随时间的变化规律，称为**运动学方程**．在运动过程中质点在空间所经过的全部位置点的集合称为它的**运动轨迹**.

2. 位矢 $\boldsymbol{r}$ 对时间 t 的变化率描述了质点运动状态，称为**速度**

$\boldsymbol{v}$, 即

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{r}};$$

速度 $\boldsymbol{v}$ 对时间 t 的变化率称为**加速度** $\boldsymbol{a}$, 即

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\dot{\boldsymbol{v}}=\ddot{\boldsymbol{r}}.$$

已知 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t)$或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$, 且给出 $t=t_0$ 时的 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0$ 或 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0$, 则可得

$$\boldsymbol{r}(t)=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{v}(t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{r}_0, \quad 或 \quad \boldsymbol{v}(t)=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{a}(t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{v}_0.$$

(二) 坐标系　速度和加速度的分量形式

1. 为了定量描述点的位置, 在确定的参考系上建立某种**坐标系**, 将位矢与有序实数组对应起来, 这组表示位置的实数称为点的**坐标**; 对选定的坐标系引入相应的**基矢**, 可将速度、加速度展开成分量形式.

2. **直角坐标系**: 点的坐标 x, y, z; 基矢 $\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{e}_z$, 它们彼此正交, 组成右手系.

$$\boldsymbol{v}=\dot{x}\,\boldsymbol{e}_x+\dot{y}\,\boldsymbol{e}_y+\dot{z}\,\boldsymbol{e}_z;$$

$$\boldsymbol{a}=\ddot{x}\,\boldsymbol{e}_x+\ddot{y}\,\boldsymbol{e}_y+\ddot{z}\,\boldsymbol{e}_z.$$

3. **平面极坐标系**: 点的坐标 r, θ, 基矢 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$.

$$\boldsymbol{v}=\dot{r}\,\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta;$$

$$\boldsymbol{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\,\boldsymbol{e}_\theta.$$

4. **自然坐标系**: 点的弧坐标 s, 基矢 $\boldsymbol{e}_\tau$、$\boldsymbol{e}_n$、$\boldsymbol{e}_b$, 它们分别沿轨道曲线的切线、主法线和副法线, 组成正交的右手系.

$$\boldsymbol{v}=\dot{s}\,\boldsymbol{e}_\tau;$$

$$\boldsymbol{a}=\ddot{s}\boldsymbol{e}_\tau+(\dot{s}^2/\rho)\boldsymbol{e}_n, \quad \rho —— 轨道曲率半径.$$

（三）刚体的平动和定轴转动

1. **刚体**是力学中另一种重要的模型，它的特征是形状和大小在运动过程中不变. **平动和定轴转动**是刚体两种基本运动形式.

2. 刚体作平动时其上任何一条直线始终平行于自身原位置，其上各点运动情况相同，平动刚体的运动学就是质点运动学.

3. 刚体作定轴转动时其上有一条也仅有一条始终保持静止，该直线称为**固定转轴**. 定轴转动刚体的位置由转角 φ 描述，转动状态及其变化由角速度 ω 及角加速度 α 描述，$\omega=\dot{\varphi}$，$\alpha=\dot{\omega}=\ddot{\varphi}$. 刚体的转动状态还可以用角速度矢量 ω 描述，它可用沿转轴的有向线段表示，其长度等于角速度大小，指向与转向之间由右手法则确定，在定轴转动中 ω 与 α 共线.

取参考系原点位于固定转轴上，刚体上位矢为 $\boldsymbol{r}$ 的点的速度和加速度分别为

$$\boldsymbol{v}=\omega\times\boldsymbol{r};$$

$$\boldsymbol{a}=\dot{\omega}\times\gamma+\omega\times\boldsymbol{v}=\alpha\times\boldsymbol{r}+\omega\times(\omega\times\boldsymbol{r})$$

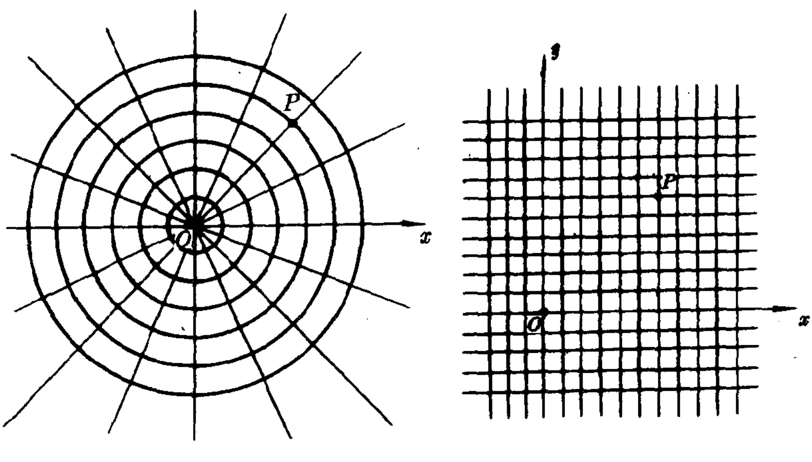
三、疑 难 辨 析

1－1　参考系和坐标系有何区别和联系？

说明：质点如何运动，只有相对于一定的参考物体来说，才有确切的意义. 因此，参考物体是确定物体如何运动的标准. 在力学中，参考物体的某些个性，例如形状，大小、颜色和质量等，对于确定质点相对于它如何运动是无关紧要的，重要的是参考物体提供了一个与之固连的刚性空间，这个空间可以超越参考实体的范围而延拓出去. 这个空间被看作描述物体运动的基准. 而这个空间可以用三条相交于一点的、不共面的、彼此夹角不变的直线组成的刚性框架来代表. 我们把这个框架称为**参考系**.

在一定的参考系中，为了定量确定空间中各点的位置，需要按照一定的法则，使每一点的位置与一组有序的实数相对应，这

组有序的实数称为该点在这个参考系空间中的**坐标**. 在不同的坐标系中，确定点的位置与其坐标之间关系的法则根据坐标系不同而不同. 例如，我们常用的平面极坐标系的坐标曲线是一组同心圆线和从原点出发的一簇射线组成 (图 1－1)，选择其中一条射线为极轴，当质点处于某一圆周和某一射线的交点时，点的位置就可由 (r,θ)这组有序实数表示，r是圆周半径，θ是极轴到该射线的角度. 人们经常采用的平面直角坐标系的坐标曲线是两组互相正交的平行直线，平面中的每一点都是其中两条正交直线的交点，它提供了点的位置可用实数 (x,y)表示. 由于各种坐标系规定了基矢的取法，还可使矢量运算与实数运算相对应，解决了矢量的数值运算问题. 这样，坐标系成为描述物体运动的数学工具. 由于坐标系可以理解为坐标曲线簇所构成的刚性框架，因此，坐标系也具有参考系的意义.



(a)　　(b)

图 1－1

1－2　点的直角坐标系的位置矢量可表示成$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$，位矢的投影 (也可以叫做分量) x、y、z 正好与该质点的直角坐标 (x,y,z)一致，但是，在极坐标系中，位置矢量表示为

$\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_r$，其分量与坐标 (r,θ) 和直角坐标系的情况不一致？为什么？

说明：要解决这个问题，需要将分量和坐标加以区别．在坐标系中，位置矢量的分量指它在基矢上的投影量，各分量能否与位置坐标等同，要视坐标系的基矢的性质，直角坐标系的三个基矢成右手螺旋正交关系，基矢的方向始终不变，这些性质决定了位矢的分量与位置坐标完全相同．对极坐标来说，基矢是正交的，但基矢中的 $\boldsymbol{e}_r$ 与位矢 $\boldsymbol{r}$ 方向一致，而基矢 $\boldsymbol{e}_\theta$ 始终与质点的位矢垂直，使得位矢 $\boldsymbol{r}$ 只在 $\boldsymbol{e}_r$ 方向有投影，在 $\boldsymbol{e}_\theta$ 方向上的投影为零．造成 $\boldsymbol{r}\neq r\boldsymbol{e}_r+\theta\boldsymbol{e}_\theta$，位矢分量与位置坐标不等同．值得注意的是，用 $\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_r$ 和用 (r,θ) 都能正确地描述质点的位置，这是因为 $\boldsymbol{e}_r$ 是 θ 的函数，如果确定了 θ 值，也就确定了 $\boldsymbol{e}_r$．可见，(r,θ) 完全确定了 $\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_r$，反之亦然．

1－3　矢量导数的分量和矢量分量的导数相等吗？

说明：我们以位矢的导数为例来说明这个问题．

速度是位矢的导矢量，在直角坐标系中，写成

$$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{x}\boldsymbol{e}_x+\dot{y}\boldsymbol{e}_y+\dot{z}\boldsymbol{e}_z$$

即上式中位矢导数的分量 $\dot{x}\boldsymbol{e}_x$ 等于位矢分量 $x\boldsymbol{e}_x$ 的导数．

在平面极坐标系中，都出现另外一种情况，质点的速度即位矢的导矢量，为

$$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

而位矢 $\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_r$，说明位矢导数的分量不等于位矢分量的导数．原因是，与 $\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_z$ 不同，径向单位矢 $\boldsymbol{e}_r$ 是极角 θ 的函数，在质点运动过程中，$\boldsymbol{e}_r$ 要随着时间变化．

以上分析的精神可以运用到一般情况，当基矢 $\boldsymbol{e}_i$ 的方向随时间变化，矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿该方向的分量 $A_i\boldsymbol{e}_i$ 的时间变化率 $\dfrac{\mathrm{d}(A_i\boldsymbol{e}_i)}{\mathrm{d}t}$ 不会等于 $\dot{A}_i\boldsymbol{e}_i$．$\dot{A}_i\boldsymbol{e}_i$ 只是 $A_i\boldsymbol{e}_i$ 的大小改变所引出的结果，

$\frac{\mathrm{sd}\,(A_i \boldsymbol{e}_i)}{\mathrm{d}t}$ 还包含有 $\boldsymbol{e}_i$ 方向改变所产生的另一项 $A_i \dot{\boldsymbol{e}}_i$.

通过上面的讨论，读者可以进一步看到，为什么在一般情况下，位矢的二阶导数 $\ddot{\boldsymbol{r}}$ 不等于 r 的二阶导数 $\ddot{r}$. 为什么 $\mathrm{d}r \neq |\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$，为什么自然坐标系中加速度 $\boldsymbol{a}$ 的大小不等于 $\ddot{s}$.

1－4　对同一个参考系，计算质点的运动规律，可以采取不同的坐标系，虽然得到的数学表示式不一样，但都等效地描述了该质点的运动. 下面试采用坐标及基矢的变换，将平面直角坐标速度的表示式 $\boldsymbol{v} = \dot{x}\boldsymbol{e}_x + \dot{y}\boldsymbol{e}_y$ 变换到平面极坐标速度的表示式 $\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$.

说明：以平面直角坐标系 Oxy 的原点作为极坐标系的极点，Ox 轴作为极轴.

根据图 1－4 所示的几何关系，可得两种坐标系中基矢间的变换式为

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_r \cos\theta - \boldsymbol{e}_\theta \sin\theta & ① \\ \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_r \sin\theta + \boldsymbol{e}_\theta \cos\theta & ② \end{cases}$$

坐标之间的变换关系为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

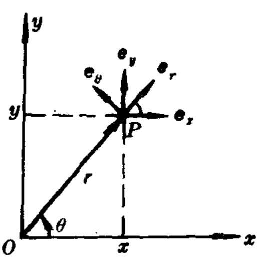


图1－4

对上面两式进行求导
$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta & ③ \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta & ④ \end{cases}$$

将①、②、③、④式代入直角坐标系的速度公式，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \dot{x}\boldsymbol{e}_x + \dot{y}\boldsymbol{e}_y \\ &= (\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta)(\boldsymbol{e}_r\cos\theta - \boldsymbol{e}_\theta\sin\theta) + \\ &\quad (\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta)(\boldsymbol{e}_r\sin\theta + \boldsymbol{e}_\theta\cos\theta) \\ &= \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta \end{aligned}$$

以上证明了，用平面直角坐标和用平面极坐标表示的速度公式是完全等价的．这说明在质点运动学中，用同一参考系中的各种坐标系描述运动都是平权的．解决实际问题时，原则上可任意选取坐标系，但在方法上却有讲究，这在解题指导部分会有所体现．为了严格证明它们的等效性，还应从极坐标系的方程出发推导出直角坐标系的方程，这部分工作，请读者自行完成．

1－5　质点沿着指定的轨道运动时，可以单独用一个弧坐标s去描述质点的位置，进而计算质点的速度和加速度．那么，弧坐标正方向选取不同，会影响对质点真实运动的描述吗？

说明：正象直角坐标轴上的坐标原点和坐标轴方向是人为规定一样，弧坐标s的基准点$(s=0)$以及s的正方向(即沿轨道曲线s的增加方向)也是人为规定的．这种规定上的任意性并不影响对质点运动的描述．例如，

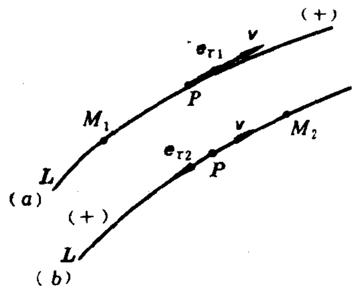


图1－5

对沿着指定曲线L运动的某一质点P来说，可以选图1－5中沿曲线从左到右的方向为弧坐标的正方向，如图1－5(a)，弧坐标以s_1表示；也可以选相反方向为弧坐标的正方向，如图1－5(b)，弧坐标以s_2表示．M_1、M_2分别是s_1、s_2的弧坐标原点．

设$a=\overset{\frown}{M_1M_2}$，$a$为$M_1$、$M_2$间的弧长，于是必有

$$s_1=a-s_2$$

由此可得到　　$\mathrm{d}s_1=-\mathrm{d}s_2$，　　$\dot{s}_1=-\dot{s}_2$　　(1)

因为切向单位向量的正方向与弧坐标的增加方向一致，因此有

$$\boldsymbol{e}_{\tau1}=-\boldsymbol{e}_{\tau2} \qquad (2)$$

$\boldsymbol{e}_{\tau1}$是图1－5(a)中的切向基矢，$\boldsymbol{e}_{\tau2}$是图1－5(b)中的切向基矢．

由(1)、(2)式得

$$\dot{s}_1 \boldsymbol{e}_{\tau 1} = \dot{s}_2 \boldsymbol{e}_{\tau 2}$$

鉴于速度的自然坐标表示是 $\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{e}_\tau$，所以在上述两种情况中，$\dot{s}_1 \boldsymbol{e}_{\tau 1}$ 和 $\dot{s}_2 \boldsymbol{e}_{\tau 2}$ 描写的是同一速度 $\boldsymbol{v}$.

值得着重说明的是，$\dot{s}$ 表示速度 $\boldsymbol{v}$ 在 $\boldsymbol{e}_\tau$ 方向上的投影：可以是正值，也可以是负值，这要视 s 正方向如何选取而定．例如在图 1－5 中，P 点处质点的速度为 $\boldsymbol{v}$. 在图 1－5 (a) 中，$\boldsymbol{v}$ 在 $\boldsymbol{e}_{\tau 1}$ 上的投影为正；在图 1－5 (b) 中，$\boldsymbol{v}$ 在 $\boldsymbol{e}_{\tau 2}$ 上的投影为负.

以上分析说明，弧坐标正方向的不同选取，不会影响对质点速度的确切描述．对于加速度，我们可作类似讨论.

1－6　试述自然坐标系中的加速度公式 $\boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{e}_\tau + \dfrac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$ 中各项的意义和特点，并分析图 1－6 (a) 中三种情况存在的可能性.

说明　下面，我们分别对切向加速度、法向加速度和总加速度加以讨论.

切向加速度是 $\boldsymbol{a}_\tau = \ddot{s}\boldsymbol{e}_\tau$，它起源于速度大小的改变而与方向的变化无关．$\ddot{s}$ 是加速度在 $\boldsymbol{e}_\tau$ 上的投影，为代数量，它与 $\dot{s}$ 配合可以判断质点在作加速运动还是减速运动．当 $\ddot{s}$ 与 $\dot{s}$ 同号时，$|\boldsymbol{v}|$ 要随时间增大，即作加速运动；当 $\ddot{s}$ 与 $\dot{s}$ 反号时，$|\boldsymbol{v}|$ 要随时间减小，即作减速运动．$\ddot{s}$ 和 $\dot{s}$ 可以同时为零，也可以同时不为零．$\dot{s}=0$，$\ddot{s} \neq 0$ 和 $\dot{s} \neq 0$，$\ddot{s}=0$ 都是允许的.

在法向加速度 $\boldsymbol{a}_n = \dfrac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$ 中，除非 $\dfrac{v^2}{\rho}=0$，否则 $\dfrac{v^2}{\rho}$ 恒为正数，所以法向加速度始终与 $\boldsymbol{e}_n$ 方向一致，即质点所在处的主法线方向，这个方向是由该点指向密切圆的圆心．密切圆通过轨道上的三个点，其中的一点与质点位置重合，另外两点与该点无限邻近，质点所在处轨道的元弧段就是密切圆的一部分，请看图 1－6 (a)，$\boldsymbol{e}_n$ 沿主法线方向指向密切圆的圆心（称为曲率中心），

密切圆的半径为 ρ，称为曲率半径．由 $\boldsymbol{a}_n=\dfrac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$，可知法向加速度除非为零，否则一定指向曲率中心．法向加速度是由速度方向变化引起的，当 v 不变，ρ 越小，曲线弯曲程度越大，速度方向变化越快，使 a_n 越大；反之，ρ 越大，a_n 越小．当 $\rho\to\infty$ 时，曲线最终演变成直线，速度方向不发生变化，这时 $a_n=0$．请读者采取类似的方法，讨论 v 对 a_n 的影响．

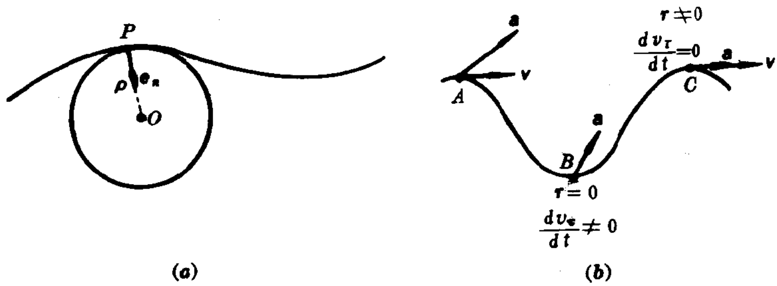


图 1－6

由于不为零的法向加速度始终指向曲率中心，$\boldsymbol{a}$ 又是 $\boldsymbol{a}_\tau$ 和 $\boldsymbol{a}_n$ 之和，这就决定了 $\boldsymbol{a}$ 的方向只能指向曲线的凹侧．轨道方式和质点的运动情况，完全允许 $\boldsymbol{a}$ 只包含 $\boldsymbol{a}_\tau$ 或只包含 $\boldsymbol{a}_n$．由于副法线方向的基矢 $\boldsymbol{e}_b$ 定义为 $\boldsymbol{e}_b=\boldsymbol{e}_\tau\times\boldsymbol{e}_n$，$\boldsymbol{e}_b$ 垂直于 $\boldsymbol{e}_n$ 和 $\boldsymbol{e}_\tau$ 组成的平面，而 $\boldsymbol{a}$ 在此平面内，所以加速度在副法线方向上的投影始终为零，即 $a_b=0$．即使对于一般的空间曲线情况也是这样．

根据 $\boldsymbol{a}_\tau$、$\boldsymbol{a}_n$ 即 $\boldsymbol{a}$ 的性质，可以通过分析，得知图 1－6（b）中的三种情况都不可能存在．

1－7　平面极坐标系的基矢 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$ 和自然坐标系的基矢 $\boldsymbol{e}_n$、$\boldsymbol{e}_\tau$ 在质点作圆周运动时能分别等同起来吗？

说明：自然坐标系基矢的规定与平面极坐标系基矢的规定有本质区别．$\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$ 单纯由质点的位置确定而与轨道无关，但是 $\boldsymbol{e}_\tau$，$\boldsymbol{e}_n$ 只能沿质点的轨道定义，虽然在轨道上质点位置的变化也会

引起 e_τ、e_n 的变化，但离开指定的轨道去谈论 e_τ、e_n 是没有意义的. 即使在轨道已经给定的情况下，e_r 和 e_n，e_θ 和 e_τ 也没有一般的关系. 对于一般平面曲线运动，某一点的 e_r 和 e_n 不仅不在同一方向上，而且还不在同一直线上 [图 1－7(*a*)]. 即使对作圆周运动的质点 [图 1－7(*b*)]，e_r、e_n 的方向也是相反的，不能等同起来；对于 e_θ 和 e_τ，当极角 θ 的增加方向与弧坐标 s 的增加方向一致时，它们的方向才能相同，否则，它们的方向相反.

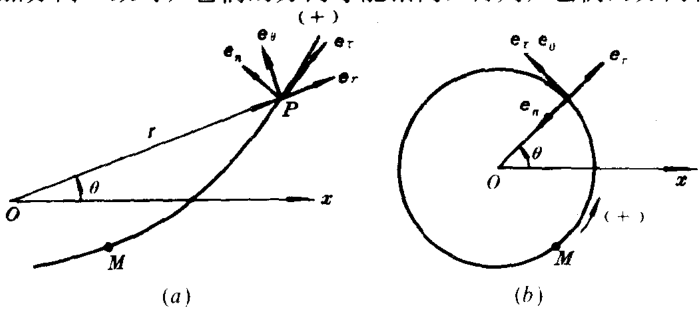


图 1－7

四、解 题 指 导

例 1.1 如例1.1 图所示，半径为 R 的圆盘以匀角速度 ω 绕垂直盘面的 O 轴转动，P 点沿圆盘半径的光滑槽 OA 以匀速率 u 运动，开始 $t=0$ 时，P 点在圆盘中心，光滑槽与水平线重合，求 P 点的运动学方程，轨道方程及其速度和加速度的量值.

解 本题本质上属于由运动学方程求速度和加速度的问题. 但本题中没有直接给出 P 点的运动规律，这可根据 P 点的运动情况，即该点沿半径 OA 作匀速直线运动，同时又随圆盘作定轴转动，利用几何关系写出 P 点的运动学方程，进而求出轨道方程、速度和加速度. 以下用两种坐标系求解.

(1) 直角坐标系

① 运动学方程