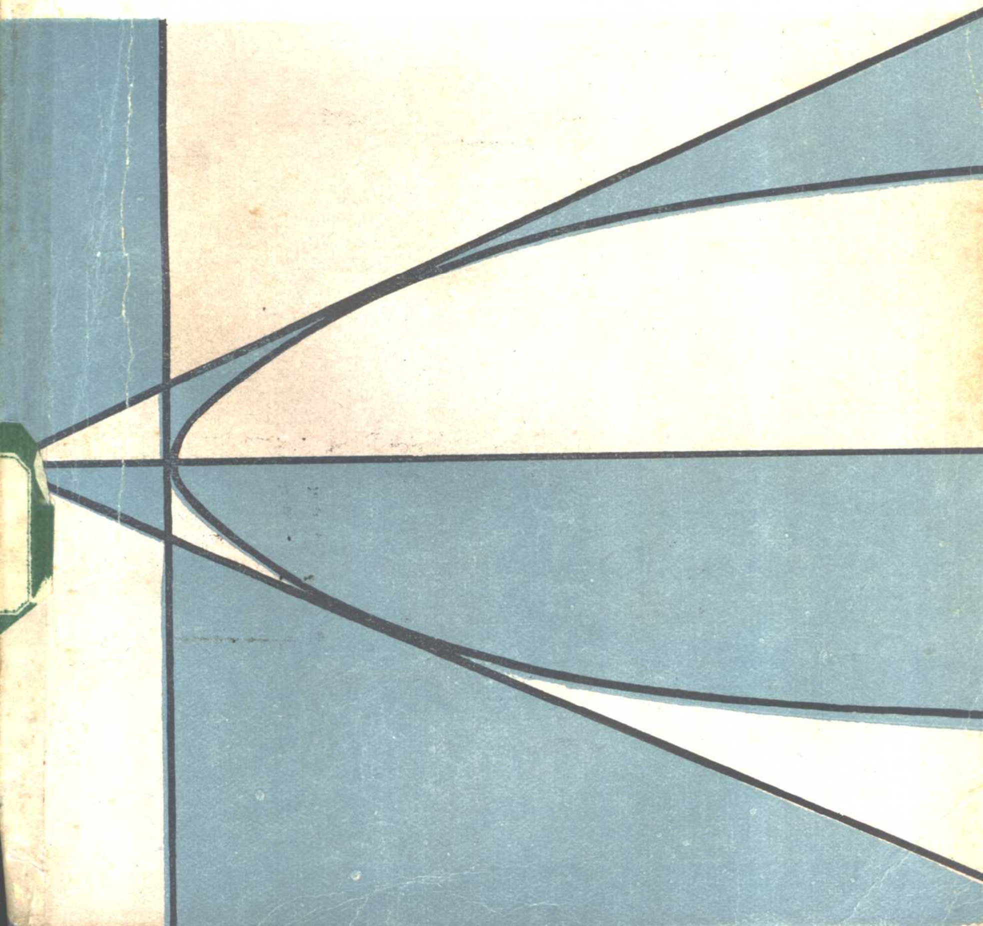
初中教师进修用书

空间解析几何

肖厚均　邱立坚

刘声琨　冯长彬



初中教师进修用书

空间解析几何

肖厚均　邱立竖　刘声琨　冯长彬

江 西 人 民 出 版 社

一九八三年·南昌

初中教师进修用书

空间解析几何

肖厚均　邱立坚

刘声琨　冯长彬

出版：江 西 人 民 出 版 社

（南昌市第四交通路铁道东路）

发行：江 西 省 新 华 书 店

印刷：江 西 印 刷 公 司

787×1092毫米　16印张　350千字

1983年12月第1版　1983年12月第1次印刷

印数：1—25,000

统一书号：7110·439　　定价：1.36元

出 版 说 明

《初中教师进修用书》是为了适应培训教师的需要，由华东地区上海、山东、江苏、安徽、浙江、江西、福建等六省一市八家出版社协作组织编写出版的。目的是供在职初中教师业余进修，帮助他们系统地学习和掌握有关专业的基础理论、基本知识和基本技能，提高文化水平和教学能力，以便在一定时间内通过考核达到两年制高等师范专科毕业的水平。

这套用书，目前先出语文、数学两个学科，共十九种，以后将逐步扩大到其他学科。编写当中，在坚持四项基本原则，坚持思想性和科学性相统一的前提下，注意了以下几个方面：

一、根据教育部制订的高等师范专科学校教学大纲的要求，确定各册内容的深度和广度，既体现各学科知识的系统性，又力求做到简明、精练，避免繁琐。

二、以提高教师科学文化水平为主，把提高知识水平和提高教学能力有机地结合起来，达到学以致用的目的。

三、从初中教师的实际水平出发，循序渐进，逐步提高要求；重视讲清学习中的难点和疑点，文字力求浅显易懂；并根据自学或函授的需要，配置必要的提示、注释、思考题和提供参考书目等学习辅助材料。

协作编写教师进修用书，尚属初次尝试。我们将在实践过程中广泛听取读者的意见和建议，努力提高书籍质量，使它更好地适合教师自学进修的需要。

前　言

本书主要是根据教育部制订的高等师范专科学校教学大纲要求，在总结了多年解析几何教学经验的基础上编写的，它既可作为在职初中教师业余进修用书，也可作为函授和师范专科学校解析几何的教材。

本书系统地介绍了欧氏空间解析几何的基本内容，共四章，另有两个附录。第四章是选学内容，附录一是本书需要用到的有关线性代数知识，只是叙述而未予论证。附录二是平面解析几何的补充，要选学第四章内容的读者须先了解本附录。

在编写本书时，始终围绕了本书的编写目的，立足于初中教师的基础，联系中学教材和教学实际，深入浅出地介绍空间解析几何的基本内容。概念的引入和定理的论证都较详尽，数学名词的引用与现行中学课本相吻合。在选材上，特别注意了与平面解析几何的类比，注意了与初等几何的联系及用解析法解初等几何题。为了使读者掌握解题方法和技巧，本书配置了较丰富的例题，每节配备了习题，每章有复习题，题目的选择和基本概念的论述是紧密相连的，类型较全，难易适当。

彭先荫教授审阅了本书初稿。在此，谨表谢意。

限于我们的水平，内容不妥甚至错误之处在所难免，欢迎读者批评指正。

编　者

1983年5月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目 录

第一章　向量与坐标

本章介绍向量代数最基本的知识．向量的定义与表示法；向量的线性运算及线性关系；向量的分解及向量在轴上的射影；用不共线三向量建立标架、引出空间坐标系；而后介绍空间点的坐标和向量的坐标（即向量的代数表示）；研究向量的数量积、向量积与混合积．

向量代数不仅是解析几何的基本内容和必备基础，还是研究自然科学的有力工具．向量作为自然界一类广泛的、既有大小又有方向的量的数学抽象，其运算不仅具有与数量运算相同的一些规律，还有它某些独特性质．所以利用它常可迅速而简便地解决一些几何的、物理的、工程的问题．本章通过概念的阐述、举例和习题，也在这些方面作了一些介绍．同时，向量代数还为线性代数中向量空间的概念提供了一个具体模型．

§1·1　数量与向量

一、两类量

在日常生活中，我们会遇到两类量．

一类比较简单，在取定了测量单位后，就可以完全用一个实数来表示，如温度、质量、密度、时间、功、能等等．这种只具有大小的量，称为数量．比较单位相同的两个数

量，只须比较它们的大小．以温度为例，高于零度的为正，低于零度的为负．这里的正、负就是与“0”比较得出的．有些数量，如体积、质量等等，它们永远是正的．我们通常用拉丁字母如a、b、c、x、y、z等来表示数量．由于它们都是实数，便可以对它们进行加、减、乘、除等代数运算，并适合实数的运算律．

另一类量却稍复杂一些．它们不但有大小，而且还有方向，叫做向量（或矢量）．如位移、速度、加速度、力、电场强度等等．说“有5公斤力作用于某物体”，这句话显然是不明确的．因为大小相同方向不同的两个力作用于物体所产生的效果是不一样的；物体用大小相同方向不同的两个速度运动，也将产生不同的位移．可见向量的概念来源于客观实际．研究向量的一般属性和运算规律，不仅能为后几章打下理论基础，它本身还具有重要的实际意义．例如，飞机在空中飞行，同时受到自身的重力、发动机的推力、空气的阻力、风力等的作用．这些力都有各自的大小与方向．不将它们各自的作用和总的作用研究清楚，就难以确保飞行的安全；设计一座桥梁，也必须分析和计算该桥各方面的受力情况以保证它坚固耐用而又节省建材；要使炮弹能准确命中目标，就必须算好大炮应取的仰角（方向）及炮弹应有的初速度等等．

二、向量的表示法

向量既然是有大小有方向的量，表示向量的工具就应该反映大小与方向两个特征．而具备大小和方向的最简单的几

何图形就是有向线段．换句话说，有向线段是最直观的向量．我们很自然地用有向线段作为一般向量的几何表示．用有向线段表示向量时，只须（在取定长度单位后）用线段的长度表示向量的大小，并取线段的方向为所表向量的方向．为了避免和熟知的有向线段的记法相混淆，我们用带有箭头的线段表示向量，如图1·1．从点A到点B的有向线段记为$\overline{AB}$；它的长度记为$|AB|$；而它的量数（或代数长，即它的长度连同表示它的方向的正负号）记为AB．从点A到点B的向量，则记为$\overrightarrow{AB}$．A、B分别叫做这向量的起点和终点．为了应用上的方便，我们也常用黑体字$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、……来表示向量．向量的大小，也叫做向量的长度或模，记为$|\overrightarrow{AB}|$、$|\boldsymbol{a}|$等．有时为了简便，还将$\boldsymbol{a}$的长度就记为a．

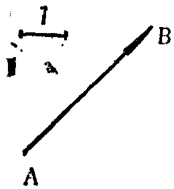


图 1·1

值得注意的是，向量的长度是非负实数，可以比较大小．但方向却无所谓大小．因此，式$\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$及$\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$是毫无意义的．

三、几种特殊向量

起点固定的向量叫固定向量．例如，当我们谈到运动物体的速度时，必须指明我们所考虑的是它在哪点上的速度（物体在不同点的速度——包括大小和方向都可能不同）．谈到物体的位移，也要交代它是从那点开始的．所以，速度、位移都是固定向量．起点可以在它本身所在的直线上任意移动的向量（如图1·2中的$\boldsymbol{f}$），叫滑动向量．例如，作

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

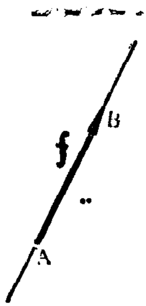


图 1·2

用在一个刚体上的力就是滑动向量．因为只要保持了力的大小和方向，作力点可以在作用线上任意移动而不改变对刚体作用的效果．

我们着重研究向量的基本特征，即大小和方向．往往不计及它们的起点在何处．这种可以保持大小和方向而任意移动（简称平移）的向量，叫自由向量．今后如无特别声明，我们说的向量，都是指自由向量．

我们把长度相等、方向相同的两个向量叫做相等向量．如图1·3中的$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{A_1B_1}$，可记为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$．两向量如果相等，则经过平移必可使一个与另一个重合；反之，若一个向量可经过平移与另一个向量重合，则这两个向量必是相等的．长度相等而方向相反的两个向量，叫做相反向量．如图1·3中的$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{A'B'}$．记作

$$\overrightarrow{A'B'}=-\overrightarrow{AB} \quad 或 \quad -\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}.$$

显然，对任意向量$\overrightarrow{AB}$，有$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

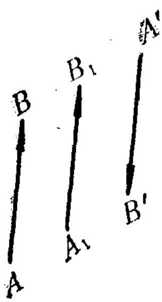


图 1·3

长度为1的向量，叫做单位向量；而长度为零的向量（可视为起点与终点重合的向量），叫零向量．记为**0**．零向量没有确定的方向，或者说它的方向可任意给定．我们规定，一切零向量都相等．

习　题　1·1

1．下列诸量哪些是数量，哪些是向量？

(1) 线段的长度； (2) 磁场强度；
(3) 重力加速度； (4) 物体的体积；
(5) 物体的重量； (6) 物体的重力.

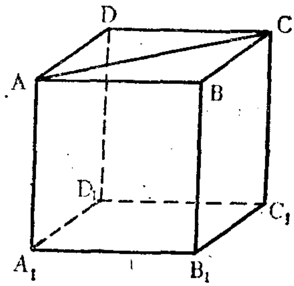
2. 作长度为$\sqrt{2}$、方向为南45°西的向量及其相反的向量.

3. 在以立方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的顶点为起、终点的向量中

(1) 写出所有与$\overrightarrow{AB}$相等的向量；

(2) 写出所有与$\overrightarrow{CB}$相反的向量；

(3) 写出与$\overrightarrow{AC}$相等及相反的向量.



第3题

4. 设O为正六边形$ABCDEF$的中心，试问向量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$、$\overrightarrow{OD}$、$\overrightarrow{OE}$、$\overrightarrow{OF}$、$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{CD}$、$\overrightarrow{DE}$、$\overrightarrow{EF}$与$\overrightarrow{FA}$中哪几对向量是相等的？哪几对向量是相反的？

§1·2 向量的线性运算

一、向量的加法

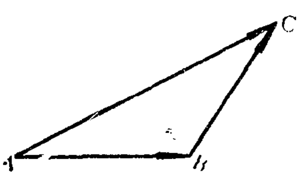


图 1·4

质点从点A到点B的直线位移，可表为向量$\overrightarrow{AB}$. 若一质点先后作了两次直线位移：从点A到点B，再从点B到点C（图1·4）. 其结果显然等同于这质点从A到C的一次直线位移. 这就启发我们得出向量加法的如下定义.

定义 平移已知向量$\boldsymbol{b}$，使它的起点重合于已知向量$\boldsymbol{a}$

的终点，那么以 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点、$\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量 $\boldsymbol{c}$，叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之和，记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（图 1·5）.

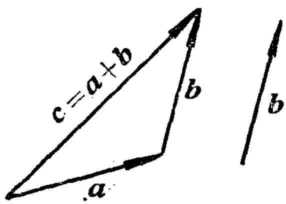


图 1·5

求两个已知向量之和的运算，叫做向量的加法.

定义中规定的向量求和的方法，叫做三角形法则.

定理 1·1 以向量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 为邻边组成一个平行四边形 $OACB$，则对角线向量 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$（图1·6）.

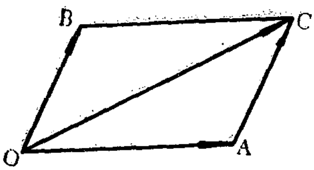


图 1·6

〔证明〕 ∵ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$，故由定义知

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}.$$ ▌

定理给出的求两向量之和的方法，叫做平行四边形法则. 它正是力学中常用的、求两个力的合力的方法.

由定义立即可知

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},\\&\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},\\&\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}\end{aligned}\qquad(1)$$

由定义还可知

两个同向的向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 之和 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 仍与 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 同向，而其长度 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$（图 1·7）.

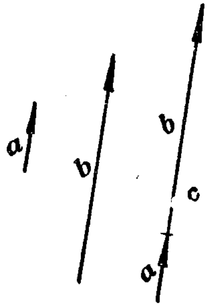


图 1·7

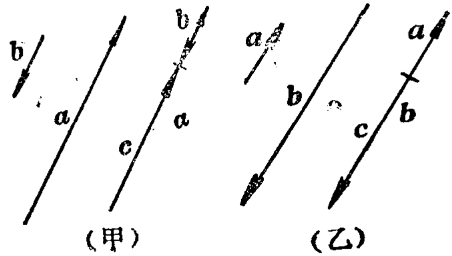


图 1·8

设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是两个方向相反的向量，而 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，则当 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$ 时〔图1·8(甲)〕，$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向且 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$；而当 $|\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{b}|$ 时〔图1·8(乙)〕，$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，且 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|$.

由于三角形的两边之和大于第三边而两边之差小于第三边，由图 1·5 及上段关于图 1·7、1·8 的讨论得

$$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \tag{2}$$

我们常称此式为三角不等式.

从中学代数已知，实数加法满足交换律和结合律，向量加法也有类似性质.

定理 1·2 （加法交换律）设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为任意二向量，则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.$$

事实上，由平行四边形法则（定理 1·1，在图 1·6 中令 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$）即知，上式左、右两边乃是同一平行四边形的同一对角线向量（$\overrightarrow{OC}$）. ∎

由于两向量之和仍为一向量，它又可与其它向量作加法

运算．我们有

定理 1·3 （加法结合律） 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为任意三向量，则

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

〔证明〕 根据加法的定义，由图 1·9 可知

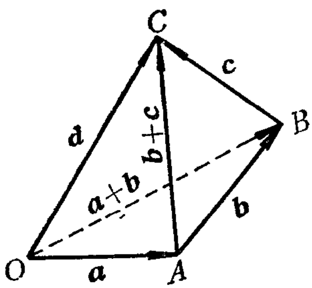


图 1·9

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d},$$

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{d},$$

$$\therefore\quad (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}). \blacksquare$$

由此定理，我们乃可认为三向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的加法有意义，且将它们的和就记为

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}.$$

图 1·9 还可看出，**向量 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 实际上是向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 顺次首尾相衔接（即以 $\boldsymbol{a}$ 的终点作为 $\boldsymbol{b}$ 的起点，再以 $\boldsymbol{b}$ 的终点作为 $\boldsymbol{c}$ 的起点）所得折线 $OABC$ 的封闭向量．**且有（参看图 1·10）

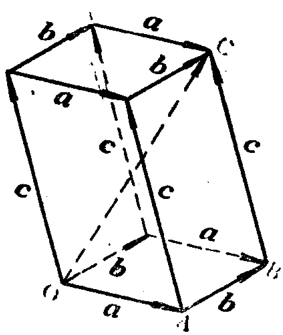


图 1·10

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}&=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\\&=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\\&=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

即三向量的次序可以任意颠倒．

上面对三向量之和的讨论，完全可以类似地推广到求任意有限个向量之和中去．一般，由于向量加法满足交换律和结合律，$n(n\geqslant 3)$ 个向量 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、…、

$\boldsymbol{a}_n$ 之和仍为一向量 $\boldsymbol{d}$，可以将它写成

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n.$$

右边不需加任何括号，向量的次序也可任意颠倒．要作 $\boldsymbol{d}$，只要把求和的众向量 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、…、$\boldsymbol{a}_n$ 任意编号，而后以第一个向量的终点作为第二个向量的起点、再以第二个向量的终点作为第三个向量的起点……，这样作下去，最后我们得到第 n 个向量的终点 P，那末以第一个向量的起点 O 为起点，以第 n 个向量的终点 P 为终点的向量 $\overrightarrow{OP}$（它是要求和的 n 个向量依次首尾相衔接所构成的折线的封闭向量）即为所求(图1·11)．

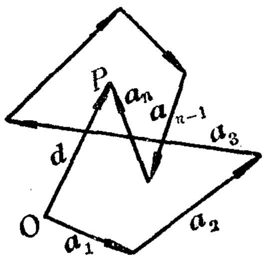


图1·11

例 1　证明：三向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 恰能首尾相衔接构成一个三角形的充要条件为

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$$

〔证明〕（必要性）设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 首尾衔接所构成的三角形为 $\triangle ABC$(图 1·12)．由于折线 $ABCA$ 的封闭向量的起点、终点都是点 A，故这封闭向量为零向量，得

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\boldsymbol{0},$$

即　　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$

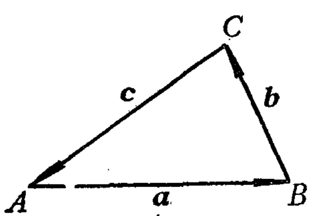


图　1·12

（充分性）设 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$．作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 CA，则（由必要性证明）

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{0}.$$

试读结束：需要全本请在线购买：　www.ertongbook.c