研究生教学用书

教育部研究生工作办公室推荐

弹性力学与张量分析

Theory of Elasticity and Tensor Analysis

郭日修　编著

高等教育出版社

研究生教学用书
教育部研究生工作办公室推荐

弹性力学与张量分析

Theory of Elasticity and Tensor Analysis

郭日修　编著

高等教育出版社

内容简介

本书是“教育部推荐研究生教学用书”，包括弹性力学和张量分析两课程的内容。

本书第一篇张量分析，讨论张量的概念、张量代数和张量分析。本篇以普遍张量为讨论对象，引导读者在正确理解张量概念的基础上掌握张量分析这一数学工具。第一篇相对独立地可作为研究生张量分析课程教材。

本书第二、三篇合为弹性力学。第二篇弹性力学基本方程，含应力分析、应变分析、应力－应变关系、弹性力学基本方程。第三篇弹性力学问题及解题方法，含若干线弹性力学问题的精确解、几个应用弹性力学问题、能量原理、近似/数值解法。这部分内容的特点是：以普遍张量为工具阐述弹性力学基本理论和方法；加大了弹性力学应用问题和近似/数值解法的篇幅；讨论了有限应变张量和大变形应力张量。第二、三篇可作为研究生弹性力学课程教材。

本书可作为高等学校船舶与海洋工程、航空宇航、交通运输、土木、水利、机械等工程专业的研究生教材。也可供高等学校工程力学专业研究生和从事结构分析的科研、设计人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

弹性力学与张量分析／郭日修编著．—北京：高等教育出版社，2003.10

ISBN 7－04－013069－6

Ⅰ．弹…　Ⅱ．郭…　Ⅲ．①弹性力学－研究生－教材②张量分析－研究生－教材　Ⅳ．①O343②O183.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 080138 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2003 年 10 月第 1 版
印　　张	18.25	印　　次	2003 年 10 月第 1 次印刷
字　　数	310 000	定　　价	25.50 元

前　言

根据“教育部办公厅关于2001—2002年度研究生教学用书入选书目的通知”(教研厅函[2002]2号),《弹性力学与张量分析》一书入选“教育部推荐研究生教学用书”,这是对本书的高度评价。

本书开始成书并在教学使用中不断修改、充实,至今已20年。1981年,海军工程学院(海军工程大学前身)开始招收硕士研究生,作者担任船舶结构力学专业硕士研究生指导教师,并给研究生讲授弹性力学课程,它是该专业研究生的学位课程。研究生的弹性力学课程讲什么?怎么讲?在当时是个新问题。作者查阅了国内、外很多弹性力学书,经过分析,作者认为,研究生的弹性力学课程应该在本科专业的弹性力学和相关课程,如结构力学等的基础上开展教学。因此,研究生的弹性力学课程应当有新的起点,新的内容和新的深度。在这样的思想指导下,作者决定研究生的弹性力学课程采用张量(普遍张量)表示。因为:(1)弹性力学中基本的力学量,如应力、应变、弹性模量等都是张量,采用张量表示能更深刻地描述这些量的物理实质;(2)用普遍张量表示的方程具有不变性,坐标变换时方程不变,这提高了研究生针对问题的特点选择适当的坐标系的能力;(3)当代固体力学领域的文献,愈来愈多地采用张量表示,研究生掌握了张量分析这个工具,可以提高他们阅读文献的能力。

为此,作者给硕士研究生开设一门张量分析课程,作为弹性力学课程的先修课程。本书第一篇张量分析即是作者为研究生讲授张量分析课程的内容。这一篇的特点是:(1)以普遍张量为讨论对象,有广泛的适用性;(2)着重阐述张量的基本概念和基本运算方法,不过分追求数学上的严密,重在使研究生能正确理解和运用张量分析这一数学工具。

本书第二篇是弹性力学基本方程,包括应力分析,应变分析,应力-应变关系,弹性力学的基本方程等四章。第二篇的特点是:(1)用普遍张量建立弹性力学基本方程,使研究生通过这部分内容的学习掌握张量分析这个数学工具的应用;(2)采用张量表示,能更深刻地描述弹性力学基本概念和基本方程的物理实质,使研究生对弹性力学有更深刻的理解;(3)采用普遍张量表示的弹性力学基本方程在坐标变换时具有不变性,从而提高了研究生处理弹性力学问题的能力;(4)推导了有限变形的应变张量和大变形的应力张量的表示式,包括拉格朗日有限应变张量、欧拉有限

应变张量,以及拉格朗日应力张量和基尔霍夫应力张量。将非线性应变张量和应力张量纳入本课程,可以引导研究生由传统的线性弹性力学领域进入非线性弹性力学领域,拓宽研究生的基础理论。

本书第三篇是弹性力学问题及解题方法。这一篇的特点是:在内容选取上适当减少传统的弹性力学的理论性内容,加大弹性力学应用问题和近似解法及数值解法的分量,以提高研究生应用弹性力学解决工程问题的能力,并为应用计算机解弹性力学问题建立理论基础。因此,在第八章若干线弹性力学问题的精确解中,只选择球对称问题、轴对称问题、圣维南问题、平面问题等几个典型的线弹性力学问题,讨论求精确解的方法。第九章几个应用弹性力学问题,着重讨论铁木辛柯梁和赖斯纳板理论,它们在工程中广为应用;也使研究生认识如何从弹性力学基本方程出发建立实际工程问题的数学模型。第十章弹性力学的能量原理讨论三个基本的变分原理,它们不仅可以用来建立弹性力学基本方程和边界条件,而且是弹性力学近似解法和数值解法的理论基础。第十章近似解法和数值解法,讨论几种解弹性力学问题广为应用的近似方法和数值方法——里茨法、加权残量法、有限差分法、有限元法,为应用计算机解弹性力学问题建立理论基础。

本书各章后面附有一定数量的习题,其中证明定理和推导方程的题较多,其目的在于加深研究生对基本理论的理解和拓宽知识面。

本书可用作船舶与海洋工程、航空宇航科学与技术、交通运输工程、土木工程、水利工程、机械工程等专业研究生教材。本书第一篇可以相对独立地用作20学时张量分析课程的教材;第二篇和第三篇可以作为研究生40学时弹性力学课程的教材。

本书入选“教育部推荐研究生教学用书”过程中,全国学位与研究生教育发展中心组织专家进行评议,国务院学位委员会学科评议组召集人进行审定,教育部研究生办公室给予推荐,作者谨向他们致以衷心的感谢! 高等教育出版社承担本书出版工作,作者也致以衷心的感谢!

限于作者水平,书中不当之处在所难免,欢迎专家和读者批评指正。

郭日修

2002年12月于海军工程大学

策划编辑　黎绪萍
责任编辑　薛春玲
封面设计　李卫青
责任绘图　吴文信
版式设计　史新薇
责任校对　殷　然
责任印制　韩　刚

郑重声明

目　　录

第一篇　张量分析

第二篇 弹性力学基本方程

第三篇 弹性力学问题及解题方法

第一篇
张 量 分 析

第一章 张量的概念

§1.1 引 言

什么是张量？这是读者在开始学习本课程时会提出的问题.现从读者已有的力学知识出发,举例对这个问题作一些初步的阐述,使读者对张量这个新的概念,有个初步的理解.

在三维空间,一个矢量(例如力矢量、速度矢量等)在某参考坐标系中,有三个分量.这三个分量的集合,规定了这个矢量.当坐标变换时,这些分量按一定的变换法则变换.

在力学中还有一些更复杂的量.例如受力物体内一点的应力状态,有9个应力分量,如以直角坐标表示,用矩阵形式列出,则有

$$(\sigma_{ij})=\begin{pmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{pmatrix}$$

这9个分量的集合,规定了一点的应力状态,称为应力张量.当坐标变换时,应力张量的分量按一定的变换法则变换.再如,一点的应变状态,具有和应力张量相似的性质,称为应变张量.

把上述的力矢量、速度矢量、应力张量、应变张量等量的性质抽象化,撇开它们所表示的量的物理性质,抽出其数学上的共性,便得出抽象的张量概念.所谓张量是一个物理量或几何量,它由在某参考坐标系中一定数目的分量的集合所规定,当坐标变换时,这些分量按一定的变换法则变换.张量有不同的"阶"和"结构",这由它们所遵循的不同的变换法则来区

分.矢量是一阶张量;应力张量、应变张量是二阶张量;还有三阶、四阶、……等高阶张量.可以看出,张量是矢量概念的推广.关于张量的严密的解析定义,将在§1.8中讨论.

由张量的特性可以看出,它是一种不依赖于特定坐标系的表达物理定律的方式.采用张量记法表示的方程,在某一坐标系中成立,则在容许变换的其他坐标系中也成立,即张量方程具有不变性.这使它特别适合于表达物理定律,因为物理定律与人们为了描述它所采用的坐标系无关.因此,张量分析为人们提供了推导基本方程的有力工具.此外,张量记法简洁,是一种非常精炼的数学语言.

张量这个名词是沃伊特(Voigt)首先提出的,用来表示晶体的应力(张力)状态,可见张量分析与弹性力学关系的密切.张量分析在力学领域中有广泛的应用,是力学工作者的重要数学工具.

§1.2　符号与求和约定

一、指标

在张量分析中广泛运用指标.几个变量的集合 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 可表示为 $x_i, i=1,2,3,\cdots,n$.几个变量的集合 $y^1, y^2, y^3, \cdots, y^n$ 可表示为 $y^j, j=1,2,3,\cdots,n$.必须指出,$y^1, y^2, \cdots, y^n$ 是 n 个独立变量,而不是变量 y 的1到 n 次幂.写在字符右下角的指标,例如 x_i 中的 i 称为下标.写在字符右上角的指标,例如 y^j 中的 j 称为上标.在以后的讨论中将说明使用上标或下标的涵义是不同的.

用作下标或上标的拉丁字母或希腊字母,除非作特别的说明,一般取从1到 n 的所有整数,其中 n 称为指标的范围.本书采用下述关于范围的规定来表明三维空间和二维空间的量的区别:所有拉丁字母指标 i、j、k、l、m、…的范围是1,2,3;所有希腊字母指标 α、β、γ、δ、…的范围是1,2.例如坐标 x^i,指标 $i=1,2,3$ 的三维空间的坐标,坐标 x^α 是 $\alpha=1,2$ 的二维空间的坐标.

为了区别上标与乘幂,通常用括号表示乘幂,如 $(x^j)^2$ 表示 x^j 的二次方.

二、求和约定

若在一项中,同一个指标字母在上标和下标中重复出现,则表示要对这个指标遍历其范围 $1,2,3,\cdots,n$ 求和.这是一个约定,称为求和约定.

例如三维空间的平面方程为

$$a_1 z^1 + a_2 z^2 + a_3 z^3 = p \tag{1.2-1}$$

式中 a_i，p 是常数. 这个方程可写成

$$\sum_{i=1}^{3} a_i z^i = p \tag{1.2-2}$$

应用求和约定，则这个方程可写成如下形式

$$a_i z^i = p \tag{1.2-3}$$

遍历指标范围求和的重复指标称为哑指标或跑标. 由于哑指标只是表示求和，因此无论用哪个字母作哑指标都是一样的. 例如 $a_i z^i$ 可以写成 $a_j z^j$ 等. 相对于哑指标（求和指标）而言，不求和的指标称为自由指标.

为了避免混淆，在一项中，同一个指标字母的使用不能超过两次. 例如不能把 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x^i\right)^2$ 写成 $a_i x^i a_i x^i$，而应写成 $a_i a_j x^i x^j$.

三、克罗内克（Kronecker）符号 δ_j^k

克罗内克符号 δ_j^k 的定义是

$$\delta_j^k = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases} \tag{1.2-4}$$

这样

$$\begin{aligned} &\delta_1^1 = \delta_2^2 = \delta_3^3 = 1 \\ &\delta_2^1 = \delta_1^2 = \delta_3^2 = \delta_2^3 = \delta_3^1 = \delta_1^3 = 0 \end{aligned} \tag{1.2-5}$$

克罗内克符号也可写成 δ_{kj} 或 δ^{kj}.

下面举例说明克罗内克符号的应用. 例如空间直角坐标系中，分量为 dz^1, dz^2, dz^3 的线元长度的平方为

$$ds^2 = (dz^1)^2 + (dz^2)^2 + (dz^3)^2 \tag{1.2-6}$$

应用克罗内克符号，上式可写成

$$ds^2 = \delta_{ij} dz^i dz^j \tag{1.2-7}$$

应当注意，上式中有二重求和，一个是遍历指标 i 的范围，另一个是遍历指标 j 的范围.

克罗内克符号有一些明显的性质，如 $\delta_j^k A^j = A^k$；$\dfrac{\partial x^k}{\partial x^j} = \delta_j^k$；$\delta_j^i \delta_k^j = \delta_k^i$ 等.

四、置换符号

置换符号 $e_{ijk}=e^{ijk}$ 定义为

$$e_{ijk}=e^{ijk}=\begin{cases}1 & 当\ i,j,k\ 是\ 1,2,3\ 的偶置换(123、231、312)\\ -1 & 当\ i,j,k\ 是\ 1,2,3\ 的奇置换(213、132、321)\\ 0 & 当\ i,j,k\ 的任意二个指标相同\end{cases} \tag{1.2-8}$$

i,j,k 的这些排列分别叫做循环排列、逆循环排列和非循环排列.

置换符号也称为里奇(Ricci)符号,它只是一个指标符号,可用来展开三阶行列式.令

$$a=\begin{vmatrix}a_1^1 & a_2^1 & a_3^1\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2\\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3\end{vmatrix}=a_1^1a_2^2a_3^3+a_1^2a_2^3a_3^1+a_1^3a_2^1a_3^2-a_1^1a_2^3a_3^2-a_1^2a_2^1a_3^3-a_1^3a_2^2a_3^1$$

若以 a_j^i 表示行列式中的普遍项,以 $|a_j^i|$ 表示行列式,则上述行列式可写成

$$a=|a_j^i|=e_{rst}a_1^ra_2^sa_3^t \tag{1.2-9a}$$

若将上式中各项的下标作一置换,例如置换为 $a_2^ra_1^sa_3^te_{rst}$ 这就相当于把行列式的两列互相交换,因而行列式改变符号,等于 $-a$,再置换一次,又改变一次符号,回到 $+a$.这种性质可表示成如下的形式:

$$ae_{lmn}=e_{rst}a_l^ra_m^sa_n^t \tag{1.2-9b}$$

将(1.2-9a)与(1.2-9b)式结合,则

$$|a_j^i|e_{lmn}=e_{rst}a_l^ra_m^sa_n^t \tag{1.2-9c}$$

同理可以得到

$$|a_j^i|e^{lmn}=e^{rst}a_r^la_s^ma_t^n \tag{1.2-9d}$$

五、克罗内克符号与置换符号的关系

克罗内克符号与置换符号之间存在一定的关系.今讨论如下:

9 个量 δ_j^i 作为单位矩阵的元素,它们的行列式等于 1.

$$\begin{vmatrix}\delta_1^1 & \delta_2^1 & \delta_3^1\\ \delta_1^2 & \delta_2^2 & \delta_3^2\\ \delta_1^3 & \delta_2^3 & \delta_3^3\end{vmatrix}=1$$

若用更普遍的形式表示上面的行列式，则有

$$A=\begin{vmatrix}\delta_l^r & \delta_m^r & \delta_n^r\\ \delta_l^s & \delta_m^s & \delta_n^s\\ \delta_l^t & \delta_m^t & \delta_n^t\end{vmatrix}$$

上式中若 $r,s,t=l,m,n=1,2,3$，则 $A=1$. 由于这些排列中的任一置换都改变行列式的符号，所以行列式 A 为

$$A=\begin{vmatrix}\delta_l^r & \delta_m^r & \delta_n^r\\ \delta_l^s & \delta_m^s & \delta_n^s\\ \delta_l^t & \delta_m^t & \delta_n^t\end{vmatrix}=e^{rst}e_{lmn}$$

展开上述行列式，得

$$e^{rst}e_{lmn}=\delta_l^r\delta_m^s\delta_n^t-\delta_l^r\delta_n^s\delta_m^t+\delta_n^r\delta_l^s\delta_m^t-\delta_n^r\delta_m^s\delta_l^t+\delta_m^r\delta_n^s\delta_l^t-\delta_m^r\delta_l^s\delta_n^t \tag{1.2-10}$$

使上式中的一个下标和一个上标相等，并利用关系式 $\delta_j^i\delta_k^j=\delta_k^i$，可从上式导出下面的关系式，称为 $e-\delta$ 等式，

$$\begin{aligned}e^{rst}e_{rmn}&=\delta_r^r(\delta_m^s\delta_n^t-\delta_n^s\delta_m^t)+\delta_n^r(\delta_r^s\delta_m^t-\delta_m^s\delta_r^t)+\delta_m^r(\delta_n^s\delta_r^t-\delta_r^s\delta_n^t)\\&=\delta_m^s\delta_n^t-\delta_n^s\delta_m^t\end{aligned} \tag{1.2-11}$$

$$e^{rst}e_{rsn}=3\delta_n^t-\delta_n^s\delta_s^t=2\delta_n^t \tag{1.2-12}$$

$$e^{rst}e_{rst}=2\delta_t^t=6 \tag{1.2-13}$$

利用这些结果，可以将行列式的展开公式(1.2-9b)化成另一个很有用的形式. 以 e^{lmn} 乘(1.2-9b)式两边，得

$$ae_{lmn}e^{lmn}=6a=a_l^ra_m^sa_n^te_{rst}e^{lmn} \tag{1.2-14}$$

六、求和约定可以推广到微分公式

设 $f(x^1,x^2,\cdots,x^n)$为 n 个独立变量 $x^1,x^2,\cdots,x^n$ 的函数，则它的微分可写成

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i \tag{1.2-15}$$

在偏微商$\frac{\partial f}{\partial x^i}$中，$i$ 被认为是下标.

§1.3 曲线坐标

设 $z^k(k=1,2,3)$是点 $P(z)$的直角坐标. 若三个函数

$$x^k = x^k(z^1, z^2, z^3) \quad (k=1,2,3) \tag{1.3-1}$$

在区域 R 中有惟一的逆函数

$$z^k = z^k(x^1, x^2, x^3) \quad (k=1,2,3) \tag{1.3-2}$$

则点 P 有曲线坐标 x^k.

一般来说,从几何关系能写出(1.3－2)式.若 z^k 单值、连续,有连续的一阶偏导数,且雅可比(Jacobi)行列式 $J=\left|\dfrac{\partial z^k}{\partial x^l}\right|$ 在区域 R 内不等于 0,即

$$J=\left|\frac{\partial z^k}{\partial x^l}\right|=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial z^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial z^1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial z^1}{\partial x^3} \\ \dfrac{\partial z^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial z^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial z^2}{\partial x^3} \\ \dfrac{\partial z^3}{\partial x^1} & \dfrac{\partial z^3}{\partial x^2} & \dfrac{\partial z^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} \neq 0 \ (\text{在区域 } R) \tag{1.3-3}$$

则(1.3－2)式有惟一的逆函数(1.3－1)式.对应于 $x^1(z^1,z^2,z^3)=$ 常数;$x^2(z^1,z^2,z^3)=$ 常数;$x^3(z^1,z^2,z^3)=$ 常数,方程式(1.3－1)分别给出三个曲面,它们相交于 P 点.这三个曲面称为坐标曲面.任意两个坐标曲面的交线定义一坐标曲线.通过 P 点有 3 条不重合的坐标曲线,它们给出了点 P 的曲线坐标 (x^1,x^2,x^3),如图 1－1 所示.

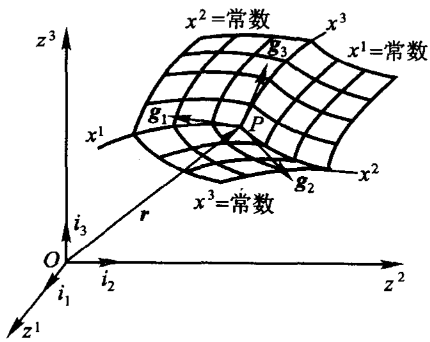

图　1－1

在曲线坐标系中,P 点的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 是曲线坐标 (x^1,x^2,x^3) 的函数.因为由图 1－1 及(1.3－2)式可知

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}(z^1,z^2,z^3) &= \boldsymbol{r}[z^1(x^1,x^2,x^3), z^2(x^1,x^2,x^3), z^3(x^1,x^2,x^3)] \\ &= \boldsymbol{r}(x^1,x^2,x^3) \end{aligned} \tag{1.3-4}$$

处理弹性力学问题时,由于物体的几何形状,对有些问题采用直角坐

标系并不适合，而必须采用曲线坐标系.最常用的曲线坐标系是正交曲线坐标系，如圆柱坐标系、球坐标系、平面极坐标系等.

例 1 圆柱坐标系(图 1-2)

圆柱坐标 x^i 由它们同直角坐标 z^i 的关系来定义.

从几何关系可以写出

$$z^1 = x^1\cos x^2$$
$$z^2 = x^1\sin x^2 \qquad (1.3-5)$$
$$z^3 = x^3$$

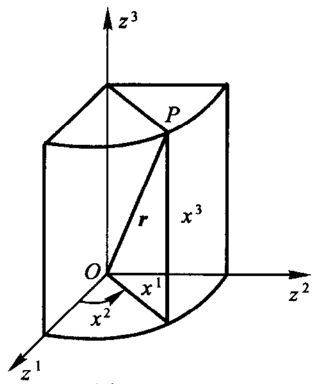

图 1-2

雅可比行列式

$$J = \begin{vmatrix} \cos x^2 & -x^1\sin x^2 & 0 \\ \sin x^2 & x^1\cos x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x^1$$

除在 z^3 轴上($x^1=0$)有 $J=0$ 外，(1.3-5)式在各处都有惟一的逆变换

$$x^1 = \sqrt{(z^1)^2 + (z^2)^2}$$
$$x^2 = \arctan\frac{z_2}{z_1} \qquad (1.3-6)$$
$$x^3 = z^3$$

对于圆柱坐标系，通常采用下面的坐标符号，

$$x^1 = r,\quad x^2 = \theta,\quad x^3 = z \qquad (1.3-7)$$

这样，圆柱坐标系的坐标面是 $r=$ 常数的圆柱面族，$\theta=$ 常数的半平面族，和 $z=$ 常数的平面族(图 1-2).

张量分析的中心问题是研究坐标变换时张量分量的变换法则.因此张量分析必然涉及坐标变换，尤其是在讨论普遍张量时，必然涉及曲线坐标系之间的变换.

独立变量 x^1,x^2,x^3 的集合可以看作是在某个坐标系中规定一点 P 的坐标.将 x^1,x^2,x^3 通过以下的方程变换成一个新变量 $\bar{x}^1,\bar{x}^2,\bar{x}^3$ 的集合

$$\bar{x}^k = \bar{x}^k(x^1,x^2,x^3) \quad (k=1,2,3) \qquad (1.3-8)$$

则上式规定了一个坐标变换.逆变换

$$x^k = x^k(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\bar{x}^3) \quad (k=1,2,3) \qquad (1.3-9)$$

按相反的方向进行.为了保证这样一个变换是可逆的，并且在变量(x^1,