固体力学有限元理论、方法及程序

固体力学有限元理论、方法及程序

徐次达　华伯浩

水利电力出版社

内 容 提 要

本书系统地介绍了有限元理论、方法及有关的程序技巧。全书以固体力学位移法为主，兼及有限元混合法、加权残数法、有限条法及边界元法等。其中对杆系结构、板壳问题、动力学问题、稳定性问题与非线性问题等作了较详细的讨论。对实施有限元方法方面，作者进一步描述了变带宽解法、波前法、子结构法、子空间迭代法和网格自动形成技术等。书中还给出了709机的有关算法程序与结构静力分析程序包。书中对近年来国内外有限元法新的科研成果和新的进展，也给予一定的注意。

本书不仅可供高等院校有关专业师生及从事有限元计算工作的研究人员及工程技术人员参考，同时也可供自学。

本书内容通俗，说理清楚，比较全面，并附有图表、例题和程序，可供使用。

固体力学有限元理论、方法及程序
徐次达　华伯浩
*
水利电力出版社出版
（北京三里河路6号）
新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售
水利电力印刷厂印刷
*
787×1092毫米　16开本　32.25印张　733千字
1983年12月第一版　1983年12月北京第一次印刷
印数 0001—7610册　定价 3.30 元
书号 15143·5222

序

有限元法的理论及其在计算机上的实施组成了一个复杂而完整的体系，涉及到诸如力学、计算数学、软件技术等学科领域，为了适应教学及有关科研工作的需要，本书将作较系统的论述。

本书前十章内容介绍固体力学有限元法概念及理论，是作者于同济大学为计算力学研究生讲授的“固体力学数值计算”课程的内容，并经过修改补充而完成的。这部分内容的编写意图是将杆件系统的有限元法与连续体的有限元法并重；静力问题与动力稳定问题并重；线性问题与非线性问题并重；广义坐标法与等参元法并重；以有限元位移法为主，亦兼顾其它有限元法（有限元混合法）及非有限元的数值解法（如加权残数法、有限条法及边界元法等）。但在实际编写过程中，往往受到篇幅限制，一些非有限元数值计算方法只能作一般的介绍；而有些方法，如有限元混合法，由于应用广泛，成效卓著，介绍比较详细。

本书后七章内容介绍有限元法的实施技术与程序，侧重于有限元应用中求解静力和动力平衡方程组的数值方法和信息处理技术。这部分内容反映了国内有限元应用研究中较新的成果与经验。其中，第十一章介绍了大型有限元方程组的存储技巧与有限元通用程序的发展；第十二章、第十三章与第十五章讨论了有限元导出的大型稀疏线性代数方程组与特征方程组的求解技术，包括变带宽解法、波前法、子结构法、子空间迭代法以及较适合于中小型计算机的共轭斜量法与松弛法；第十四章讨论了有限元方法的信息处理技术，包括网格自动形成方法、带宽极小化方法以及初始数据检查算法；第十六章与第十七章介绍了作者与他们的合作者于1977年～1978年间研制的一个结构分析程序包。有关章节内还列入了几个算法程序，供读者参考与应用。

第十六章与第十七章的结构分析程序系作者与叶文龙同志合作完成的。

全书初稿完成后承唐伟枫以及刘万勋、孙业杨、唐军、蒋炜（笔划序）等同志审阅，并提出了修改意见，谨致谢意。

本书前十章由徐次达执笔，后七章由华伯浩执笔。

限于作者水平，书中难免存在缺点与错误，恳请批评指正。

徐次达　　　　华伯浩

（同济大学）　（上海计算技术研究所）

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　有限元法的数学与力学基础

§1.1　矩阵与矩阵运算

一、定义

实数或复数的集合排列成矩形的阵式称为**矩阵**。我们常以方的括号或曲线括号把排列成矩形阵式的数的集合左右围起来。如下的形式就是矩阵的例：

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -4 & 7 \\ 5 & -3 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix},\quad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 1+i & 4-i & 7+2i \\ 2+i & 5-i & 8+3i \\ 3+i & 6-i & 9+4i \end{bmatrix} \tag{1.1.1}$$

矩阵内单独的数称为**元素**（简称为**元**），如上面几个矩阵中 6，－4，…；a, e, …；x_1…；$1+i$, …等都是元素。

一个矩阵中横的元素的集合称为**行**，竖的元素的集合称为**列**。如式（1.1.1）中第一个矩阵有三行二列，第一行为[6，－1]等。若一个矩阵$\boldsymbol{A}$有m行n列，可表示为：

$$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \quad a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.1.2$_1$}$$

其中$m\times n$称为矩阵$\boldsymbol{A}$的**阶**。如毋须表示出阶，$\boldsymbol{A}$亦可写为：

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij}) \tag{1.1.2$_2$}$$

其中a_{ij}表示矩阵$\boldsymbol{A}$中下标为i，j的元素。

二、矩阵相等

矩阵$\boldsymbol{A}$与矩阵$\boldsymbol{B}$相等，只有当$\boldsymbol{A}$的每一个元素与对应地位的$\boldsymbol{B}$的元素一一相等时才成立。以式表示为：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\Longleftrightarrow a_{ij}=b_{ij}(1\leqslant i\leqslant m,\quad 1\leqslant j\leqslant n) \tag{1.1.3}$$

三、矩阵加减

两个矩阵相加或相减，只有当它们的阶相同时才可能进行。两个矩阵相加或相减，即将两个矩阵中对应的元素相加或相减，于是有：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n} \tag{1.1.4$_1$}$$

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n} \tag{1.1.4$_2$}$$

例如有：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & 6 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -3 & -7 & -10 \end{bmatrix} \tag{a}$$

则有：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2+0 & 5+4 & -1+2 \\ -2-3 & 3-7 & 6-10 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 9 & 1 \\ -5 & -4 & -4 \end{bmatrix} \quad (b)$$

矩阵的加减是可以交换的，即有：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A} \quad (1.1.5)$$

以上两个矩阵加减的法则可以推广到二个以上的矩阵的加减问题，例如：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}=(a_{ij}+b_{ij}-c_{ij}-d_{ij}) \quad (1.1.6)$$

四、矩阵相乘

矩阵$\boldsymbol{A}$与矩阵$\boldsymbol{B}$相乘只有当$\boldsymbol{A}$的列数与$\boldsymbol{B}$的行数相等时才属可能。定义矩阵$\boldsymbol{C}$为矩阵$\boldsymbol{A}$与矩阵$\boldsymbol{B}$的乘积，记为$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{C}$中的$ij$项系$\boldsymbol{A}$的$i$行的元素与$\boldsymbol{B}$的$j$列元素一一相乘的和：

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{C})_{ij}&=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}\\ &=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj} \quad \begin{matrix}(1\leqslant i\leqslant m)\\(1\leqslant j\leqslant p)\end{matrix}\end{aligned} \quad (1.1.7)$$

式中m是$\boldsymbol{A}$的行数，p是$\boldsymbol{B}$的列数。所得到的矩阵的阶是$m\times p$。例如有：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} \end{bmatrix} \quad (1.1.8)$$

$\boldsymbol{AB}$的阶是3×2。读者试自行证明上例$\boldsymbol{BA}$是不能运算的。

由矩阵理论，容易证明：

$$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA} \quad (1.1.9)$$

所以矩阵的相乘是不可以交换的。但矩阵的相乘在保持矩阵的次序的条件下是可以任意结合的，即可以证明有：

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) \quad (1.1.10)$$

下列矩阵乘法可加以证明：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC} \quad (1.1.11)$$

五、转置矩阵

若一个矩阵的行与列对换，则我们得到了一个原来的矩阵的**转置矩阵**。矩阵$\boldsymbol{A}$的转置矩阵以$\boldsymbol{A}^T$表示，上角标T即表示矩阵转置的意思：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \quad a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21}\cdots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22}\cdots a_{m2} \\ \vdots & \vdots \quad\ \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} \quad a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1.1.12)$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

原来矩阵$\boldsymbol{A}$的阶为$m\times n$，转置矩阵$\boldsymbol{A}^T$的阶变为$n\times m$。可以证明：

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{AB})^T&=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T\\(\boldsymbol{ABC})^T&=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T\end{aligned}\qquad(1.1.13)$$

六、数量乘矩阵

定义一个数量C乘一矩阵$\boldsymbol{A}$为这矩阵的每一元素a_{ij}都乘上这个数量C，亦即有：

$$\boldsymbol{CA}=(Ca_{ij})\ \begin{matrix}(1\leqslant i\leqslant m)\\(1\leqslant j\leqslant n)\end{matrix}\qquad(1.1.14)$$

七、矩阵的种类

1.列矩阵和行矩阵

一个只有一列或一行的矩阵分别称为**行矩阵**或**列矩阵**，又称为行向量或列向量。例如行矩阵$\boldsymbol{a}$及列矩阵$\boldsymbol{b}$如下：

$$\boldsymbol{a}=\{a_1a_2\cdots a_n\}\qquad(1.1.15)$$

$$\boldsymbol{b}=\left\{\begin{matrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{matrix}\right\}=\{b_1b_2\cdots b_m\}^T\qquad(1.1.16)$$

这里n，m又称为向量的维数。

2.方矩阵及对角线矩阵

若一个矩阵的行数与列数相等，如等于m，则这个矩阵称为**m阶方矩阵**，简称**m阶矩阵**：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\cdots a_{1m}\\a_{21}&a_{22}\cdots a_{2m}\\\vdots&\vdots\quad\ \vdots\\a_{m1}&a_{m2}\ \ a_{mm}\end{bmatrix}=[a_{ij}]_{m\times m}\qquad(1.1.17)$$

如果一个方矩阵除了从左上角到右下角的主对角线上的元素外，其他元素都为零，则这个矩阵称为**对角线矩阵**：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&0&0\cdots\cdots0\\0&a_{22}&0\cdots\cdots0\\0&0&a_{33}\cdots\cdots0\\\vdots&\vdots&\vdots\quad\ddots\quad\vdots\\0&0&0\cdots\cdots a_{nn}\end{bmatrix}\equiv diag\ (a_{11},\cdots,\ a_{nn})\qquad(1.1.18)$$

如果对角线矩阵的对角线元素都等于1，则称为**单位矩阵**。例如3阶单位矩阵为：

$$\boldsymbol{I}_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

n阶单位矩阵是n阶矩阵：

$$\boldsymbol{I}_n=\begin{bmatrix}1&0&0\cdots0\\0&1&0\cdots0\\\vdots&\vdots&1\cdots0\\\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0\cdots1\end{bmatrix}\qquad(1.1.19)$$

单位矩阵一般以I表示，右下标是它的阶。

零矩阵的每一个元素都等于零。n阶零矩阵是每个元素都等于零的n阶矩阵：

$$\mathbf{0}_n=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{1.1.20}$$

3.对称矩阵、三角形矩阵及汉弥登矩阵

一个实数方矩阵$\boldsymbol{A}$中，如果位于主对角线两边对称地位的元素一一相等，则这个方矩阵称为**对称矩阵**，可表示为：

$$\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}\Longleftrightarrow a_{ij}=a_{ji}\quad(1\leqslant i,j\leqslant n) \tag{1.1.21}$$

如果在一个实数方矩阵$\boldsymbol{A}$中位于对角线两边对称地位的元素绝对值相等但符号相反，便称为**反对称矩阵**，即有：

$$\boldsymbol{A}^T=-\boldsymbol{A}\Longleftrightarrow a_{ij}=-a_{ji}\quad(1\leqslant i,\ j\leqslant n) \tag{1.1.22}$$

一个方矩阵中若位于主对角线某一侧的元素全为零则这个矩阵称为三角形矩阵，例如：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{1.1.23}$$

一个矩阵内的元素都是复数，则这个矩阵称为**复数矩阵**，以$\boldsymbol{A}$表示。若有一矩阵的每一个元素是$\boldsymbol{A}$的元素的共轭复数则称它为$\boldsymbol{A}$的**复共轭矩阵**，可以$\boldsymbol{A}^*$表示。如果有一矩阵既是$\boldsymbol{A}$的复共轭矩阵又经过转置，则称它为**汉弥登矩阵**，以$\boldsymbol{A}^H$表示。若一个矩阵$\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{A}^H$则称之为**反汉弥登矩阵**。

八、逆矩阵

如果一个方矩阵$\boldsymbol{A}$与另一个方矩阵$\boldsymbol{B}$有下列关系存在：

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}_n \tag{1.1.24}$$

式中$\boldsymbol{I}_n$为单位矩阵，则$\boldsymbol{A}$便是非奇异的❶，并且$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{B}$的逆矩阵或$\boldsymbol{B}$为$\boldsymbol{A}$的逆矩阵。否则$\boldsymbol{A}$便是奇异的❷。逆矩阵的符号是$\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{B}^{-1}$，于是有：

$$\boldsymbol{A}^{-1}\equiv\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{B}^{-1}\equiv\boldsymbol{A} \tag{1.1.25}$$

如果$\boldsymbol{A}$是非奇异的，则总可以按下列步骤找到$\boldsymbol{A}$的逆矩阵$\boldsymbol{B}^{-1}$。

（1）首先按行列式方法求出$\boldsymbol{A}$的代数余子式，组成余子式矩阵如下：

$$\boldsymbol{A}_c=\begin{bmatrix} A^{11} & A^{12}\cdots A^{1n} \\ A^{21} & A^{22}\cdots A^{2n} \\ \vdots & \\ A^{n1} & A^{n2}\cdots A^{nn} \end{bmatrix} \tag{1.1.26}$$

（2）求$\boldsymbol{A}_c^T$即$\boldsymbol{A}_c$的转置矩阵；

---

❶ $det\boldsymbol{A}\neq 0$；

❷ $det\boldsymbol{A}=0$（det表示行列式）。

$$A_c^T = \begin{bmatrix} A^{11} & A^{21} \cdots & A^{n1} \\ A^{12} & A^{22} & A^{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A^{1n} & A^{2n} & A^{nn} \end{bmatrix} \tag{1.1.27}$$

（3）以行列式$detA$除A_c^T，即得A的逆矩阵：

$$B \equiv A^{-1} = A_c^T / detA \tag{1.1.28}$$

例题1：求下列矩阵的逆矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{a}$$

解：这矩阵的行列式$detA = 10 \neq 0$，故矩阵不是奇异的，逆矩阵存在。其余子式矩阵如下：

$$A_c = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -11 \\ -1 & 3 & 3 \\ 11 & -3 & -13 \end{bmatrix} \tag{b}$$

上式转置后除以$detA = 10$，即得到A的逆矩阵如下：

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 7 & -1 & 11 \\ -1 & 3 & -3 \\ -11 & 7 & -13 \end{bmatrix} \tag{c}$$

读者可以验证$AA^{-1} = I_3$。

例题2：试求下列矩阵的逆矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \tag{d}$$

解：由于$detA = 0$，故矩阵A是奇异的，逆矩阵不存在。

九、正交矩阵及正交变换

一个实数矩阵A满足下列关系：

$$AA^T = A^T A = I_n \tag{1.1.29}$$

则A称为**正交矩阵**。正交矩阵是非奇异的，也即A^{-1}存在。将式（1.1.29）乘A^{-1}后可以证明有：

$$A^{-1} = A^T \tag{1.1.30}$$

可以证明，一个正交矩阵中不同二列元素相乘之和等于零，而任意一列元素的平方之和等于一。

设将一个$n \times 1$的列向量x左乘一个$n \times n$的正交矩阵A，则变换成为另一个$n \times 1$的列向量y：

$$y = Ax \tag{1.1.31}$$

这种变换称为**正交变换**。我们若于上式两边左乘以y的转置矩阵$y^T = x^T A^T$即有：

$$y^T y = x^T A^T A x = x^T x \tag{1.1.32}$$

于是有：

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{1.1.33}$$

这表明**正交变换后向量的模不变**。

现考虑向量的坐标变换问题。设有两个坐标系，如果$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$是用第一种坐标表示的向量，$\boldsymbol{x}'$，$\boldsymbol{y}'$是用第二种坐标表示的同样的向量，具有关系：

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \tag{1.1.34}$$

及

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}',\quad \boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}' \tag{1.1.35}$$

式中$\boldsymbol{P}$称为**变换矩阵**，是一个方矩阵。$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{P}$一般是**正交矩阵**。于是从上式可得：

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}' \tag{1.1.36}$$

于是可知，在第一种坐标系中从$\boldsymbol{y}$变换为$\boldsymbol{x}$的变换矩阵为$\boldsymbol{A}$；而于第二种坐标中从$\boldsymbol{y}'$变换为$\boldsymbol{x}'$的变换矩阵为$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$。

十、分块矩阵

一个矩阵$\boldsymbol{A}$可以用纵横的线分隔成为几个阶次较小的矩阵，称为**分块矩阵**。例如阶为$m\times n$的矩阵$\boldsymbol{A}$可以分成四个小矩阵如下：

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{c|c}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2\\ \hline \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4\end{array}\right] \tag{1.1.37}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}a_{11}\cdots a_{1l}\\ \vdots \quad\ \vdots\\ a_{k1}\quad a_{kl}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}a_{1,l+1}\cdots a_{1n}\\ \vdots \quad\ \vdots\\ a_{k,l+1}\cdots a_{kn}\end{bmatrix}\\ &\boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}a_{k+1,1}\cdots a_{k+1,l}\\ \vdots \quad\ \vdots\\ a_{m1}\quad \cdots a_{ml}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_4=\begin{bmatrix}a_{k+1,l+1}\cdots a_{k+1,n}\\ \vdots \quad\ \vdots\\ a_{m,l+1}\quad \cdots a_{mn}\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{1.1.38}$$

其中k、l是任意整数，$1\leqslant k\leqslant m$，$1\leqslant l\leqslant n$。

若$\boldsymbol{B}$也是一个$m\times n$阶的矩阵，且与矩阵$\boldsymbol{A}$同样大小地分隔成为四个小矩阵：

$$\boldsymbol{B}=\left[\begin{array}{c|c}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2\\ \hline \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{B}_4\end{array}\right] \tag{1.1.39}$$

则我们说$\boldsymbol{A}$及$\boldsymbol{B}$是**等同分块的**。两个等同分块矩阵的加法（或减法）就是对应的子矩阵的加（或减）。例如我们有：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\left[\begin{array}{c|c}\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{B}_2\\ \hline \boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{A}_4+\boldsymbol{B}_4\end{array}\right] \tag{1.1.40}$$

关于分块矩阵的乘法亦须注意其中子矩阵$\boldsymbol{A}_i$的列数须与子矩阵B_i行数相等的问题。例如$m\times n$阶的矩阵$\boldsymbol{A}$与$n\times p$阶的矩阵$\boldsymbol{B}$分块后相乘，则有：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}&=\begin{array}{r}k\{\\ m-k\{\end{array}\left[\begin{array}{c|c}\overbrace{\boldsymbol{A}_1}^{l} & \overbrace{\boldsymbol{A}_2}^{n-l}\\ \hline \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c}\overbrace{\boldsymbol{B}_1}^{r} & \overbrace{\boldsymbol{B}_2}^{p-r}\\ \hline \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{B}_4\end{array}\right]\begin{array}{l}\}\,l\\ \}\,n-l\end{array}\\ &=\begin{array}{r}k\{\\ m-k\{\end{array}\left[\begin{array}{c|c}\overbrace{\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_3}^{r} & \overbrace{\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_2+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_4}^{p-r}\\ \hline \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_2+\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{B}_4\end{array}\right]\end{aligned} \tag{1.1.41}$$

至于分的块数并不限定只分为四块，可以任意确定。

可以证明，若矩阵A，B，C及D的阶分别为$m\times m$，$m\times n$，$n\times m$，$n\times n$则下列分块矩阵的逆矩阵为：

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]^{-1}=\left[\begin{array}{c|c} (A-BD^{-1}C)^{-1} & A^{-1}B(CA^{-1}B-D)^{-1} \\ \hline D^{-1}C(BD^{-1}C-A)^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{array}\right] \quad (1.1.42)$$

十一、子矩阵及秩

上述矩阵A的分块矩阵都是（A的）子矩阵。若一个矩阵A的阶为$m\times n$，则在A内任意除去若干行或列的矩阵都是A的子矩阵。

如果有一个矩阵A至少有一个其阶为r的非奇异的方的子矩阵，但是每一个阶大于r的子矩阵都是奇异的，则r称为矩阵A的秩。

例题3：求下列矩阵的秩。

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 5 & -6 \\ 4 & -1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

解：求A的行列式得$\det A=0$，所以A的秩比4为小，又求出A的各个3×3方子矩阵（共有16个）的行列式都等于零，于是A的秩小于3，最后可以求出A的2×2子矩阵有一个不是奇异的，故知A的秩为2。

有关矩阵的进一步知识请参见文献[1.1.1]，[1.1.2]。

§1.2 线性代数方程组

一、定义

线性代数方程组系指联系n个变量x_1，$x_2\cdots x_n$幂次为一，系数为常数的代数方程组，在最一般情况下方程式的数目m不一定等于变量的数目n：

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right\} \quad (1.2.1)$$

若以矩阵表示，上式为：

$$Ax=b \quad (1.2.2)$$

式中

$$\left.\begin{array}{l} A\equiv[a_{ij}]_{m\times n} \\ x\equiv[x_i]_{n\times 1} \\ b=[b_i]_{m\times 1} \end{array}\right\} \quad (1.2.3)$$

若$\neq b=0$，则这个方程组称为是齐次的；若$b\neq 0$，则这个方程组称为是非齐次的。

二、二元线性方程组的解

具有二个变量的线性方程组：

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{aligned}\right\} \qquad (1.2.4)$$

的解可作如下讨论：

情况（1）：行列式 $detA=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$，则有解：

$$x=\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}=A^{-1}b \qquad (1.2.5)$$

情况(1_a)：$b=0$，则得零解 $x_1=x_2=0$；

情况(1_b)：$b\neq 0$，可从式（1.2.5）中得唯一解x_1及x_2；

情况(2)：行列式 $detA=0$，则须视系数a_{ij}及b_{ij}而定：

情况(2_a)：$b\neq 0$，且有下列关系存在：

$$a_{11}/a_{21}=a_{12}/a_{22}=b_1/b_2 \qquad (1.2.6)$$

这说明式（1.2.4）二个方程式是重复的，它们二者之间只差一常数。于是方程组(1.2.4)有无穷多的解，给予x_1任意值，即能求出相应的x_2值。

情况(2_b)：$b\neq 0$，但有下列关系：

$$a_{11}/a_{21}=a_{12}/a_{22}\neq b_1/b_2 \qquad (1.2.7)$$

此时式（1.2.4）无解。

情况(2_c)：$b=0$，且有下列关系存在：

$$a_{11}/a_{21}=a_{12}/a_{22} \qquad (1.2.8)$$

则，式（1.2.4）也有无穷多的解。

上列五种情况绘于图1.2.1。

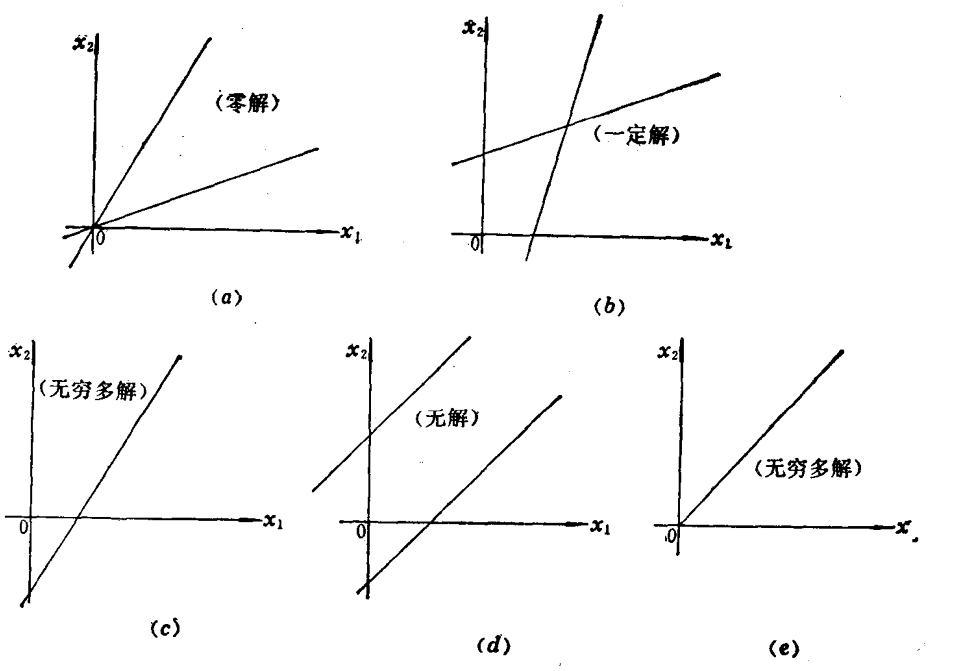

图 1.2.1 二元联立方程（1.2.4）的解

(a)情况(1_a)，交于原点；(b)情况(1_b)，有一交点；(c)情况(2_a)，二线重迭；(d)情况(2_b)，二线平行；(e)情况(2_c)，二线重迭经原点

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com