医用高等数学

YIYONG GAODENG SHUXUE

龚芳　韩明　编著

陕西科学技术出版社

前　言

本书是编者在多年为临床医学、口腔、预防医学、法医、护理、妇幼等系讲授医用高等数学的基础上编写而成的，是一本针对医学五年制各专业通用性较强的教材。全书共七章，包括一元函数微积分、常微分方程及概率论等内容，这些都是医学科学进行量化研究所必备的最基础的知识，理论讲授约需 50 学时。

该教材既符合教学大纲的要求又不失数学知识的系统性。基本概念及理论描述深入浅出，文字通俗易懂，例题和习题配置适当，书后附有答案和部分数学用表，便于自学，同时可供医学工作者学习医用高等数学时参考。

本书由龚芳与韩明合编，其中龚芳编写了第一、二、三、七章，韩明编写了第四、五、六章。限于编者的水平，加之时间仓促，错误和不妥之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

一九九五年三月

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　函数的极限与连续性

函数与极限的概念是高等数学中最重要、最基本的两个概念。函数是微积分学研究的主要对象，极限方法则是高等数学研究变量的一种基本方法。本章将复习并深化函数的概念，然后给出极限的概念及与它有关的无穷小量、无穷大量的概念、极限运算法则和两个重要极限公式。本章要介绍的另一个重要的基本概念是函数的连续性，它是函数的重要性质之一，与极限概念密切相关，今后所讨论的函数大多是具有连续性的函数。

§1.1　函　　数

一、函数的概念

在中学已经学习过各种各样的函数，如一元二次函数 $y=ax^2+bx+c$，三角函数 $y=sinx$，对数函数 $y=lgx$，等等。函数的严格定义如下：

定义　设 x 和 y 是两个变量，如果对于 x 在集合 D 中所取的每一个值，依某一法则有确定的 y 值与之对应，则称变量 y 是变量 x 在 D 上的一个函数(*function*)，记作

$$y=f(x)\quad(x\in D),$$

并称 x 为自变量。集合 D 为函数的定义域，y 的取值范围称为值域，记作 R。

函数的常用表示法有三种，本课程主要研究以解析法(即公式法)表示的函数。

定义域或值域的表示一般有不等式、区间、集合三种形式，本

书中多采用区间或不等式表示．下面给出有限区间和无穷区间的表示法及相应的不等式。

有限区间：

闭区间	$[a,b]$	$(a\leqslant x\leqslant b)$
开区间	(a,b)	$(a<x<b)$
半开区间	$(a,b]$	$(a<x\leqslant b)$
	$[a,b)$	$(a\leqslant x<b)$

无穷区间：

$(-\infty,b)$	$(-\infty<x<b)$
$(-\infty,b]$	$(-\infty<x\leqslant b)$
$(a,+\infty)$	$(a<x<+\infty)$
$[a,+\infty)$	$(a\leqslant x<+\infty)$
$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty<x<+\infty)$

关于函数需要特别说明以下两点：

1. 常函数(*constant function*)．即对定义域 D 中的每一个 x 值，y 恒取一确定的常数 C，通常记作

$$y=C \qquad (x\in D).$$

其图形是一条过点$(0,C)$且平行于 x 轴的直线。常函数是一种最简单又很有用的函数。

2. 分段函数(*piecewise function*)，是应用中常见的函数解析形式，即对于自变量 x 的一切值，函数 y 与之对应的法则不是由一个公式给出，而是两个或两个以上的公式给出的。这时，不应认为这是几个函数的合并，应看作是对 x 的一部分值，y 与之对应的法则是一个公式，而对 x 的另一部分值，y 与之对应的法则是另一公式。如分段函数

$$y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 1+x, & \text{当 } x>1,\end{cases}$$

是确定在$[0,+\infty)$上的一个函数，它的图形如图 1.1(a)。在区间

$[0, 1]$上，y 依法则 $2\sqrt{x}$ 与 x 对应；在区间$(1,+\infty)$内，y 又依法则 $1+x$ 与 x 对应。点 $x=1$ 称为函数的联结点或分段点。

求分段函数的函数值时，要先看 x 属于哪个区间段，再按相应的对应法则求值。如求 $f(0)$，因为 $0\in[0, 1]$，所以 $f(0)=2\sqrt{x}\,\big|_{x=0}=0$。同理，$f(\frac{1}{4})=2\sqrt{x}\,\big|_{x=\frac{1}{4}}=1$，$f(1)=2\sqrt{x}\,\big|_{x=1}=2$，$f(3)=(1+x)\big|_{x=3}=4$。

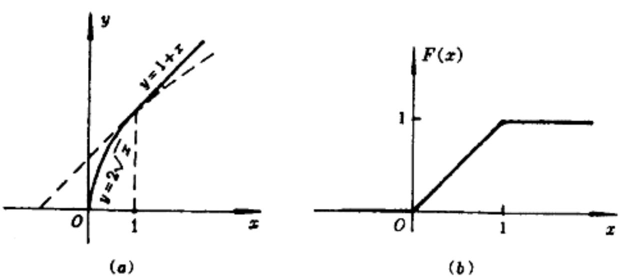

图 1.1

又例如分段函数

$$y=F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ x, & 0\leqslant x<1;\\ 1, & x\geqslant 1,\end{cases}$$

是确定在$(-\infty, +\infty)$上的一个函数，它的图形如图 1。1(b)。当 $x\in(-\infty, 0)$时，$F(x)\equiv 0$；当 $x\in[0, 1)$时，$F(x)=x$，当 $x\in[1,+\infty)$时，$F(x)\equiv 1$。0，1 是函数的两个联结点。

容易求出 $F(-2)=0$，$F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，$F(2)=1$。

分段函数不是一类新的函数，它只是函数的一种表达形式。由于分段函数是医学应用中常见的函数形式，以后还将继续对它进行讨论。

二、函数的几种特性

为了今后讨论问题方便起见，简单介绍函数的一些特性。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook

1. 有界性

设 $y=f(x)$在 D 上有定义，若存在一个常数 K，使对于每一个 $x\in D$，都有

$$|f(x)|\leqslant K,$$

则称 y 是 D 上的有界函数(*bounded function*)。否则称为无界函数。

如函数 $y=sinx$ 是在$(-\infty,+\infty)$内有界的，因为对任意的 x 都有 $|sinx|\leqslant 1$，故称 $y=sinx$ 是其定义域内的有界函数。而函数 $y=tgx$ 在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$内是无界函数。但 tgx 在$[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$上是有界的，所以，在考察函数的有界性时，应同时指出自变量的取值范围。

2. 单调性

如果函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有定义，当 x_1、$x_2\in(a,b)$，且 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数在区间(a,b)内是单调增加的；若有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数在区间(a,b)内是单调减少的。单调增加或单调减少的函数统称为单调函数(*monotonic function*)。

例如 $y=x^2$ 在$(0,+\infty)$内是单调增加的，在$(-\infty,0)$内是单调减少的，而在其整个定义域$(-\infty,+\infty)$上不是单调函数。

3. 奇偶性

对函数 $y=f(x)$的定义域内的每一个 x 值，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为奇函数(*odd function*)；若有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为偶函数(*even function*)。

如 $y=sinx$，$y=x^3$ 是奇函数。$y=cosx$，$y=1+x^2$ 是偶函数。$y=1-x^3$，$y=a^x$ 是非奇非偶函数。

4. 单值性与多值性

如果对 x 在定义域内的每一个确定值，函数 y 都有唯一确定的值与之对应，这种函数叫单值函数(*single valued function*)，否

则就叫做多值函数(*many-valued function*)。

如 $y=x^3$，$y=lgx$ 都是单值函数。

而 $y=\pm\sqrt{x}$，$y=Arcsinx$ 都是多值函数。

在研究函数时，常将多值函数拆成一些单值函数，每一个单值函数称为多值函数的单值支。例如 $y=arcsinx$ 就是 $y=Arcsinx$ 的一个单值支。以后如无特别说明，所称函数均指单值函数。

三、反函数的概念

设已知 $y=f(x)$，若将 y 看作自变量，x 看作 y 的函数，则由 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=\varphi(y)$ 叫做函数 $f(x)$ 的反函数(*inverse function*)，而 $y=f(x)$ 叫做直接函数。

习惯上以 x 表示自变量，y 表示函数，故常将 $x=\varphi(y)$ 写作 $y=\varphi(x)$ 或 $y=f^{-1}(x)$.

反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形与直接函数 $y=f(x)$ 的图形对称于直线 $y=x$.

值得注意，如果函数 $y=f(x)$ 是单值的，其反函数 $y=\varphi(x)$ 不一定是单值的。例如 $y=x^2$ 的反函数 $y=\pm\sqrt{x}$ 就是双值的。三角函数是单值的，反三角函数均是多值的。但是如果单值函数在某个区间上是单调的，则它的反函数在相应的区间上也是单值单调的。

四、初等函数

1. 基本初等函数

基本初等函数是指下列五种函数。

a. 幂函数

$$y=x^{\alpha}\quad(\alpha\text{ 是实数}),$$

其定义域随 α 的不同而异，但在 $(0,+\infty)$ 内函数总有定义。

b. 指数函数

$$y=a^{x}\quad(a>0,\ a\neq1),$$

x 可取任何实数。

高等数学中常见的指数函数是 $y=e^x$，这里 $e=2.7182817\cdots$ 是一个无理数。

c. 对数函数

$$y=\log_a x \quad (a>0,\ a\neq 1),$$

与指数函数互为反函数，定义域是区间$(0,\ +\infty)$。

本课程中常见的是以 e 为底的自然对数函数，记作 $y=\ln x$.

d. 三角函数

正弦 $y=\sin x$，$x\in(-\infty,\ +\infty)$，是以 2π 为周期的奇函数；

余弦 $y=\cos x$，$x\in(-\infty,\ +\infty)$，是以 2π 为周期的偶函数；

正切 $y=tg x$，$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$，是以 π 为周期的奇函数；

余切 $y=ctg x$，$x\neq k\pi(k=0,\pm1,\ \pm2,\ \cdots)$，是以 π 为周期的奇函数；

正割 $y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$，$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，是以 2π 为周期的偶函数；

余割 $y=\csc x=\frac{1}{\sin x}$，$x\neq k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，是以 2π 为周期的奇函数。

这里 x 都是以弧度为单位的，这样 x 和 y 都是十进制的数，讨论问题比较方便。

e. 反三角函数

反正弦 $y=Arcsin x$，反余弦 $y=Arccos x$，反正切 $y=Arctg x$，反余切 $y=Arcctg x$，它们都是多值函数。今后遇到这类函数，我们总取它们的一个单值支，即主值

$y=\arcsin x$，$x\in[-1,\ 1]$，$y\in[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$；

$y=\arccos x$，$x\in[-1,\ 1]$，$y\in[0,\ \pi]$；

$y=arctg x$，$x\in(-\infty,\ +\infty)$，$y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$；

$y=arcctgx$，$x\in(-\infty, +\infty)$，$y\in(0, \pi)$.

上述五种基本初等函数的定义、性质和图形已为大家所熟知，不再一一重述。

2. 复合函数

定义 设 y 是 u 的函数，$y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数，$u=\varphi(x)$，如果对于 x 值所对应的 u 值，函数 $y=f(u)$是有定义的，则 y 成为 x 的函数，记作

$$y=f[\varphi(x)],$$

这时称 y 是 x 的复合函数(*compound function*)或函数的函数，并称 u 是中间变量，x 是自变量。

如 $\sqrt{1-x^2}$、$lgsinx$、a^{x^2}都是复合函数，它们分别由 $y=\sqrt{u}$，$u=1-x^2$；$y=lgu$，$u=sinx$；$y=a^u$，$u=x^2$，复合而成。

复合函数的定义域就是使 $u=\varphi(x)$的值包含在 $y=f(u)$的定义域内的那些 x 值的全体。

例如 $y=\sqrt{u}$ 的定义域是$[0, +\infty)$，而 $u=1-x^2$ 的定义域是$(-\infty, +\infty)$，值域是$(-\infty, 1]$。使 $y=\sqrt{u}$ 有意义的 x 的取值范围应该是 $\sqrt{u}$ 的定义域与 $u=1-x^2$ 的值域的交集，即$[0, +\infty)\cap(-\infty, 1]=[0, 1]$所对应的 x 值的全体$[-1, 1]$，故 $y=\sqrt{1-x^2}$的定义域是$[-1, 1]$，而不是$(-\infty, +\infty)$。

又如 $y=arcsinu$，$u=2+x^2$，则 $y=arcsin(2+x^2)$无意义，此复合函数不成立，因为 $2+x^2$ 的值均不在 $y=arcsinu$ 的定义域内。

构成一个复合函数只要将中间变量代入函数式即可。如已知 $y=e^u$，$u=sinx$，将后一式代入前式就得复合函数 $y=e^{sinx}$.

复合函数中还有中间变量多于一个的多层复合，如 $y=u^2$，$u=cosv$，$v=2-w^3$，$w=lnx$，由最后一式逐层代入，便可得有三个中间变量的复合函数 $y=cos^2(2-ln^3x)$.

分析复合函数的构成即分解复合函数，常以基本初等函数为基形，由外向里逐层分解。

例如，$y=tg\sqrt{\frac{x^2+3}{x-1}}$，可分解为 $y=tgu$，$u=v^{\frac{1}{2}}$，$v=\frac{x^2+3}{x-1}$. 最后一式是两个多项式函数之商，称为有理分式函数，一般不再对这类函数进行分解。

再如，$y=ln[sin^2(a^x+1)]$，可分解为 $y=lnu$，$u=v^2$，$v=sinw$，$w=z+1$，$z=a^x$.

3. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算以及有限次的函数复合步骤而形成的一个解析式子所表示的函数称为初等函数（*elementary function*）。例如，

$$y=\frac{2+\sqrt[3]{x}}{3-x^2}, \qquad y=arctg\sqrt{\frac{1+sinx}{1-sinx}}$$

等等都是 x 的初等函数。

分段函数不是由一个解析式子表示的函数，因此，它不是初等函数。但通常大多数分段函数就其每一段而言是初等函数。凡有关初等函数的结论，对分段函数的每一段都是适用的，只是在分段区间的联结点（分段点）处要对函数的相应性质作专门讨论。

§1.2 函数的极限

一、数列的极限

定义 设$\{a_n\}$是一个数列，如果当 n 无限增大时，a_n 趋近于某一个定数 A，则称数列$\{a_n\}$当 $n\to\infty$时，以 A 为极限（*limit*），记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n=A，或 a_n\to A \quad (n\to\infty).$$

当 $n\to\infty$时，a_n 趋近于定数 A，是说 n 越大，$|a_n-A|$越小，只要 n 足够大，$|a_n-A|$就可以任意小。此时，也称数列$\{a_n\}$的极限存在。

例 1 数列$\{\frac{1}{n+1}\}$，当 $n\to\infty$ 时，以 0 为极限。因为 $\left|\frac{1}{n+1}-0\right|=\frac{1}{n+1}$ 随 n 的增大可以变得任意小。若想使 $\left|\frac{1}{n+1}-0\right|<0.01$，只要$\frac{1}{n+1}<0.01$，$n>99$ 即可。同样，想使 $\left|\frac{1}{n+1}-0\right|<0.0002$，只要 $n>4999$ 即可。

例 2 数列$\{\frac{n+(-1)^n}{n}\}$，当 $n\to\infty$时，以 1 为极限。因为 n 在无限增大的过程中交替取奇数和偶数，$\frac{n+(-1)^n}{n}$的分子交替出现 $n-1$ 和 $n+1$，其值总是随 n 的增大在数 1 的两侧充分接近于 1。这里，$\left|\frac{n+(-1)^n}{n}-1\right|=\frac{1}{n}$随 n 的增加可以变得任意小。

例 3 数列$\{(-1)^n+1\}$，当 n 无限增大时，$(-1)^n+1$ 交替取 0，2 两值，不趋向于一个定数，故此数列无极限，也称数列的极限不存在。

例 4 数列$\{2n\}$，当 n 无限增大时，$2n$ 也无限增大，不可能趋向某一定数，所以此数列的极限也不存在，但这种情形可记作

$$\lim_{n\to\infty}2n=\infty.$$

二、函数的极限

数列$\{a_n\}$可以看作是以自然数为定义域的函数，即 $a_n=f(n)$。因此，仿照数列的极限定义，不难得出当$|x|\to+\infty$时，函数 $f(x)$的极限定义。

定义 如果当$|x|$无限增大时，$f(x)$趋近于某一常数 A，则称函数 $f(x)$当 $x\to\infty$时以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A，\text{或 } f(x)\to A(x\to\infty).$$

若所考虑的 x 值全是正的，就可记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A.$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook