运筹学

YUNCHOUXUE

陶谦坎　主编

西安交通大学出版社

本

运　　筹　　学

陶谦坎　主编

西安交通大学出版社

内 容 简 介

本书是介绍运筹学一些主要分支基本原理和方法的基本教材。全书除绪论外，主要包括：线性规划、动态规划、图与网络分析、排队论、存贮论以及计算机程序等六部分共十二章。书中除了有大量例题外，每一部分后面还附有一定数量的习题，以供教学之用。

本书可作为大专院校管理类、财经类各有关专业的教材或教学参考书；也可供管理干部进修班、研讨班以及广大自学者的教材和参考之用。

运 筹 学

陶谦坎 主编

责任编辑 赵世星

•

西安交通大学出版社出版

（西安市咸宁路28号）

国营五二三厂印装

陕西省新华书店发行 各地新华书店经售

•

开本787×1092 1/16 印张1.925 字数：470千字

1987年7月第1版 1988年1月第1次印刷

印数：1——8000册

ISBN7-5605-0012-9/O-7 定价：3.20元

书号：13340·135

前　言

本书是在编者为西安交通大学管理学院有关专业讲授《运筹学》课程而编写讲义的基础上，参照1985年7月，在西安交通大学召开的全国非运筹学专业运筹学教学大纲讨论会上，所通过的教学大纲（讨论稿）编写而成的。

运筹学是用数学方法研究各种系统最优化问题的学科；是系统工程的主要基础理论之一。运筹学是用数学语言来描述实际系统，建立数学模型，并据此求得合理运用人力、物力和财力等资源的最佳方案。

早在60年代初，国外一些大专院校的有关专业就陆续设置了运筹学的有关课程。我国早在50年代中，著名的数学家华罗庚教授就在有关企事业单位，积极推广和普及运筹学方法。70年代后期，由于大力提倡系统工程在各个领域中的应用，作为系统工程主要基础理论之一的运筹学也就更加受到重视。今天，我国有关院校的管理、财经类专业都普遍开设了运筹学课程，一些管理工程、系统工程类专业的硕士点，则把运筹学作为学位课程列入培养计划，大量的管理干部进修班和研讨班，也设置了有关这方面的课程。总之，运筹学正处在兴旺发达时期，运筹学对我国"四化"建设无疑会作出积极的贡献。

本书除绪论外，主要包括规划论、图与网络分析、排队论、存贮论等四部分，最后还有一章计算机程序。参加本书编写的有：陶谦坎（绪论，第八、九、十章），徐渝（第一、二、三、四、五章），李维岳（第六、七章），张正祥（第十一章），王定、王鹤（第十二章）等同志。陶谦坎同志担任主编。

本书由西安交通大学数学系教授、全国运筹学会常务理事、运筹学普及教育委员会主任邵济煦同志担任全书审稿。

本书可作为大专院校管理类、财经类有关专业的教材，也可供管理干部进修班、研讨班及自学者的教材和参考书。

本书虽是在使用多年的讲义基础上编写的，但鉴于所涉及的运筹学分支量多面广，限于我们的水平，书中不妥和错误之处在所难免，恳请广大读者批评指正！

编　者　识于

西安交通大学管理学院　1986.10.

lik794/15

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

绪 论

运筹学（Operations Research 缩写OR）是用数学方法研究各种系统最优化问题的学科。它是系统工程的基础理论之一。运筹学着重发挥已有系统的效能，应用数学模型来求得合理运用人力、物力和财力的最优方案，为决策者提供科学决策的依据。从上述对运筹学所下的定义可以看出：应用运筹学解决问题的动机是，为决策者提供科学决策的依据，即帮助主管人员科学地决定处理问题的方针和行动。目的是解决系统最优化问题，即制定合理地运用人力、物力和财力的最优方案。对象是各种系统，它可以是工农业、商业、民政、国防等部门的各种系统，特别是已经建立的各种系统。方法是应用数学语言来描述实际系统、建立数学模型并据此求得最优解。可以说，运筹学是一门在实践中得到广泛应用的学科。

英文“OR”一词，直译是“作业研究”。中国科学工作者从《史记·高祖本记》书中，“夫运筹于帷幄之中，决胜于千里之外”一语中，摘取“运筹”一词作为OR的意译，其含义是运用筹划，出谋献策，以策略取胜等。比较确切地反映了OR一词的内涵。

一、运筹学的历史

运筹学一词最早出现于1938年。当时，英国波得塞雷达站负责人A. P. 洛维（A. P. Rowe）提出对整个防空作战系统的运行问题需要进行研究，以解决各雷达站之间以及雷达站与整个防空作战系统之间应如何协调配合才能有效地防备德国飞机入侵的问题。为此专门成立了由各方面科学家组成的研究小组，并以“OR”命名这种研究活动。第二次世界大战期间，运筹学有了新的发展。当时，为了急待解决作战中所遇到的许多错综复杂的战略战术问题，英美一些具有不同学科和背景的科学家，组成了许多运筹学小组，专门从事军事运筹学的研究。研究的典型课题有：高射炮阵地火力的配置、护航舰队规模的大小，以及开展反潜艇作战的侦察等方面。由于受到战时需要的压力，也由于不同学科互相渗透而产生的协同作用，在上述几个方面都取得了不少研究成果，从而，为运筹学各种分支的开发和充实作出了很大贡献。战后，在军事运筹学小组工作过的一些科学家，转向研究在民用部门应用类似方法的可能性。因而，促进了在民用部门应用运筹学有关方法的研究和实践。1947年，美国数学家G. B. 丹捷格（G. B. Dantzig）在研究美国空军资源配置问题时，提出了求解线性规划的有效方法——单纯形法。50年代初，应用电子计算机求解线性规划问题获得了成功。50年代末，工业先进国家的一些大型企业已陆续应用了运筹学的方法以解决企业在生产经营活动中所出现的许多问题，取得了良好效果。各国民用部门率先采用运筹学方法的，一般是盈利性的大公司。例如，石油企业把大规模线性规划用来制定生产计划问题等。后来，又针对企业中一些普遍性的问题，如库存、资源分配、设备更新、任务分派等进行了研究，并提出了许多相应的方法付诸使用。运筹学用在服务性工业和公用事业，则是60年代

中期才蓬勃开展起来的。当时，一些银行、医院、图书馆等都已陆续认识到运筹学对帮助改进服务功能、提高服务效率所起的作用。随着电子计算机的迅速发展，为广泛应用运筹学方法提供了有力工具，运筹学的应用又开创了新的局面。

当前，运筹学在生产管理、工程建设、军事作战、科学试验、财政经济以及社会系统等各个领域中都得到了极为广泛的应用。一些发达国家的企业、政府、军事等部门都拥有相当规模的运筹学研究组织，专门从事运筹学的应用研究，并为上层决策部门提供科学决策所需的信息和依据。随着运筹学的兴起，各国都先后成立了运筹学研究的学术机构。早在 1948 年，英国成立了运筹学俱乐部，1954 年改名为英国运筹学会。美国运筹学会于 1952 年创立，为运筹学界的有关科学家服务，并出版《运筹学》的专门学术刊物。1957 年，在英国牛津大学召开了第一届国际运筹学会议。以后，每隔 3 年召开一次。1959年，成立了国际运筹学联合会（IFORS）。我国于 1956 年成立了第一个运筹学小组，1980年成立了全国运筹学会，对促进我国运筹学的应用和发展起了积极作用。

60年代初以来，美国愈来愈多的大专院校，都相继地开设了运筹学课程及其有关的一系列课程。许多主要大学还纷纷设立关于运筹学的理科硕士和哲学博士的研究生课程。我国早在 50 年代中，著名数学家华罗庚教授就在一些企业和事业单位积极推广和普及优选法、统筹法等运筹学方法，取得了显著成果。70年代后期，由于大力提倡系统工程在各个领域中的应用，作为系统工程主要基础理论之一的运筹学，也就更加受到重视。今天，我国有关高等院校不仅设置了运筹学专业，培养从事运筹学研究的人才，而且在管理类、财经类等的有关专业普遍开设了运筹学的必修课程。一些系统工程专业及其它专业的硕士生，也设置了运筹学作为学位课程。大量管理干部培训班、研讨班等也开设了有关这方面内容的课程。总之，当前运筹学正处在兴旺发达的时期。可以认为，运筹学在我国的应用和推广对“四化”建设将会作出积极的贡献。

二、运筹学模型

运筹学的实质在于模型的建立和使用。通常，模型可以定义为：对现实事物或问题的描述或抽象。一般模型有如下特点：

1. 模型只是对现实事物中某一局部问题的描述或抽象；因此，模型可以比现实本身描述得更为简单。

2. 模型是由与分析问题有关的主要因素所构成。

3. 模型既能反映各有关因素之间的逻辑关系，也能反映它们之间的定量关系。

运筹学模型多数是数学模型，但也有图象模型（如网络模型）和仿真模型。建立模型有许多优点，例如：将一个企业的生产计划问题用数学模型描述后，能使企业在计划实施前就可以检验所制定的计划是否符合原定要求，并可改变有关参数或约束条件，从而找到最优计划方案。另外，符号语言便于交流，因为它能正确地描述问题而不需冗长的文字陈述。应用数学公式有利于对事物作更好的描述和理解，它还能反映出用文字描述时易被忽略的因素和未包含的关系。

总之，运筹学模型是对客观现实的一种描述，它必须反映实际，但又是现实世界的一种抽象。这样，便于研究其共性，使模型达到现实性、简洁性和适应性的要求。

三、运筹学方法论

应用运筹学处理问题时，首先要求从系统观点来分析问题，即不仅要求提出需要解决的问题和希望达到的目标，而且还要弄清问题所处的环境和约束条件，包括：时间、地点、资金、原材料、设备、人力、动力、信息、技术等的环境和约束条件；以及要处理问题中的主要因素、各种环境和约束条件之间的逻辑关系。这就要求研究运筹学的人员同其他有关的行业专家一起，发挥各自的专业特长，从不同的角度出发，共同针对问题的性质，商讨问题的处理方法，并建立相应的运筹学模型，以寻找问题的最优解答。应用运筹学处理问题的步骤可以概括如下：

提出问题 提出需要解决的问题，确定目标；并分析问题所处的环境和约束条件。

↓

建立模型 用数学语言描述问题，建立目标函数，约束方程，确定决策变量等，并选用合适的方法，据此建立相应的运筹学模型。

↓

最 优 化 确定与数学模型有关的各种参数，选择求解方法，求出最优解。

↓

解的评价 通过灵敏度分析等方法，对所求得的解进行分析和评价，并据此修正各种参数。

↓

决　　策 最后，向决策者提供决策所需的数据、信息和方案，帮助决策者决定处理问题的方针和行动。

四、学科分支

运筹学是一门多分支的应用学科。其主要的分支有：线性规划、整数规划、非线性规划、动态规划、图论和网络分析、决策论、排队论、对策论、存贮论、搜索论和可靠性理论等。近年来，随着新的系统问题的不断出现，在运筹学有关分支的基础上，又开发了许多新的内容，如计划协调技术（PERT）、图解协调技术（GERT）等。

近年来，随着运筹学广泛应用于各种专业的学科，因而在各自的应用范围内发展了一些新的专业分支。同时，运筹学会议也包括了许多专业性会议，讨论的课题有："军事运筹学"、"运筹学在公共卫生计划中的应用"、"运筹学在公共交通中的应用"、"运筹学在旅游观光事业中的应用"、"运筹学在体育中的应用"、以及"能源运筹学模型"、"教育运筹学模型"、"刑事司法运筹学模型"等。看来这种发展趋势将会持续下去。另一方面，随着运筹学应用逐渐向复杂的社会大系统渗透，而社会大系统又往往存在着大量不确定因素和模糊因素。因此，仅仅依靠用数学模型来作定量分析，已很难处理好系统的最优化问题。所以运筹学的研究内容已出现了定量分析和定性分析相结合的发展趋势。

五、运筹学和计算机

最后，简单地谈论一下运筹学和计算机的紧密关系问题。前面已经提到，计算机的

产生是推动运筹学应用的基本因素。因为任何一个运筹学的实际问题没有现代计算机来算出其最终结果，那么，绝大多数的运筹学技术是不可能实现的。一个实际问题的运筹学模型的解算，若用现代计算机只需要几分钟、十几分钟、几十分钟的时间，而用人工计算则要化费几周、几个月甚至几年时间。更为重要的是，计算机能快速地提供运筹学建模所需的各种类型的管理信息；没有这些管理信息，运筹学建模就会变成毫无意义的一句空话。可以毫不夸张地说，运筹学家很难举出一个完全不靠计算机做工具的应用实例。

毫无疑问，随着时间的推移，计算机终将成为运筹学不可分割的一部分和不可缺少的工具。今天，不仅要求运筹人员能掌握使用计算机，而且进一步要求能编制有关的计算机程序。预计在今后的岁月中，运筹学和计算机之间的关系将会愈加密切，它们将以一种更广泛、更通用的管理科学形式出现在人类面前。

第一章 线性规划的概念及其数学模型

第一节 线性规划的概念

一、引 言

线性规划（Linear Programming）是运筹学的一个重要分支，也是研究较早、发展较快、应用较广而比较成熟的一个分支。

早在本世纪30年代后期，苏联数学家康特洛维奇（Канторович）为了解决生产组织中的一系列问题，如机器负荷分配、原材料的合理利用等等，提出了“解乘数法”，同时，发表了一系列文章，其中的代表作是“生产组织与计划中的数学方法”。

40年代到50年代中期，美国独立地、迅速地发展出这一分支，并于1947年提出了“线性规划”这一概念。当时正在空军担任数学顾问的丹捷格（Dantzig）面对《最优规划的科学计算》（SCOOP）项目中提出的“如何使规划过程机械化”的问题着手建立数学模型。他从改造投入产出模型入手，逐步研究形成了“单纯形法”，并于1953年提出“修正单纯形法”以解决计算机求解过程中的舍入误差问题。此后30多年来，以冯·诺依曼（Von Neumann）创立对偶理论，库恩（Kuhn）、塔克（Tucker）以及盖尔（Gale）最早给出其严格证明为标志，线性规划的理论逐步成熟，同时在军事活动、生产实际部门中得到了日趋广泛的应用，使之成为线性规划发展史中的黄金时代。

我国从1958年开始用线性规划来解决生产中的问题，取得了一定的效果，特别是在物资调运方面，总结出我国特有的“图上作业法”，运筹学工作者在此基础上作了进一步的发展和提高工作。随着我国四个现代化建设的需要，线性规划得到越来越广泛的普及，从事这方面理论研究和实际应用工作的队伍越来越壮大。

从70年代开始，线性规划的发展进入了一个新阶段。1979年苏联的哈奇扬（Хачиян）提出了“椭球法”，并从理论上证明了该算法是多项式算法。1984年9月Karmarkar又提出了一种新的多项式算法，称可以在$O(n^{3.5}L^2)$的多项式时间内求出解。

总之，寻找线性规划新算法的工作一直在继续，同时，单纯形法的优点至今仍在发挥着积极的作用。随着电子计算机的崛起，线性规划在实际应用方面也必将有更加广阔的前景。

线性规划所研究的问题主要有两类：一类是当一项任务确定后，如何统筹安排，尽量作到以最少的人力、物力资源去完成；另一类是已有一定数量的人力、物力资源，如何安排使用它们，使完成的任务（或创造的财富、利润）最多？这两类问题实际上是一个问题的两个方面，即所谓寻求整个问题的某个整体指标最优的问题。

在经济、管理工作中这类问题是很多的，我们先举一个简单的例子：

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

例 1-1 某工厂计划生产三种产品 A、B、C，生产所需的劳动力和原材料及所得利润如表 1—1 所示：

表 1—1

产　品	A	B	C
生产单位产品所需劳力 （小时）	7	3	6
生产单位产品所需原材料 （公斤）	4	4	5
单位产品利润 （元）	4	2	3

工厂每天只能保证供应 200 公斤原材料，能利用的劳动力为 150 工时，生产科提出了两个计划方案：

方案一：生产产品 A 12 件，产品 C 11 件。这样可获得总利润 81 元，节余原材料 97 公斤，150 工时劳动力全部安排满；如将这两种产品产量作一些调整，改为生产产品 A 18 件，产品 C 4 件，那么总利润还可提高到 84 元，节余原材料 108 公斤。这个方案的思想是，要尽量安排单产利润大的产品，这样总利润可能会高一些。

方案二：三种产品都安排生产，比如安排生产产品 A 12 件，产品 B 10 件，产品 C 6 件，则总利润可达 86 元，节余原材料 82 公斤，150 工时劳动力全部安排满。

现在的问题是：在不改变原材料供应和可利用劳动力的限制条件下，还能不能提高总利润呢？问题的回答是肯定的。

用“线性规划”的方法可以重新安排生产计划为：产品 A 和产品 C 都不生产，而仅安排生产 B 产品 50 件，这时总利润可达到 100 元，原材料及劳动力全部用完。

二、线性规划问题的概念

什么是线性规划呢？我们给出其一般定义如下：

对于求取一组变量 $x_j(j=1, 2, \cdots, n)$，使之既满足线性约束条件，又使具有线性的目标函数取得极值的一类最优化问题称为**线性规划问题**。

线性规划问题可以用数学语言来描述：

$$\max(\text{或 }\min) Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{1-1}$$

$$^{*}s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_2 \quad (1\text{-}2) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \quad (1\text{-}3) \end{cases}$$

这就是线性规划问题的数学模型。其中式（1-1）称为目标函数，式（1-2）称为约束条件，式（1-3）称为非负条件。

式中，Z 为目标函数，$x_j(j=1, \cdots, n)$ 为决策变量，c_1，c_2，…，c_n；b_1，b_2，…，

*s.t.指“subject to”，即“受限制于”，用以表示约束条件。

b_n; a_{11}, a_{12}, …, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, …, a_{2n}, …, a_{m1}, a_{m2}, …, a_{mn} 都是常数。

比如例 1-1 可以列出其线性规划的数学模型如下：

$$\max Z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$s.t.\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leqslant 150 \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leqslant 200 \\ x_1、x_2、x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

其中，x_1、x_2、x_3 分别为产品 A、B、C 的日产量，Z 表示总利润。

可以看出，该模型有下面一些特点：

1. 用一组未知变量 x_1、$x_2 \cdots x_n$ 表示要求的方案，这组未知变量的一组确定的值就代表一个具体的方案，我们称这些未知变量为决策变量。通常，决策变量的取值都要求是非负的。

2. 存在一定的限制条件，通常称为约束条件，这些约束条件可以用一组线性等式或者线性不等式来表达。

3. 有一个目标要求，并且这个目标可以表示为一组未知变量的线性函数，称为目标函数，按所研究问题的不同，要求目标函数实现最大化或者最小化。

线性规划的数学模型还可以用比较简洁的紧缩形式式（1-4）以及应用广泛的矩阵形式式（1-5）来表示：

$$\max(\text{或} \min) Z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$s.t.\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant (=, \geqslant) b_i & i = 1,2,\cdots,m \\ x_j \geqslant 0 & j = 1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{1-4}$$

$$\max(\text{或} \min) Z = \boldsymbol{CX}$$

$$s.t.\begin{cases} \boldsymbol{AX} \leqslant (=, \geqslant) \boldsymbol{b} \\ \mathbf{X} \geqslant \mathbf{0} \end{cases} \tag{1-5}$$

其中，$\boldsymbol{C} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$，$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

第二节 线性规划数学模型的建立

一、建模条件

线性规划作为一种现代化管理技术可以广泛地应用于企业管理的各个领域，而且实践证明它确实可以做到在生产条件不变的情况下，达到使经济效益提高的目的，这是当前众多企业乐意应用的提高经济效益的一项有效方法。但这并不意味着线性规划是“万

应灵药”，它的建模和使用是有一定的前提条件的。

一般来说，如果一个实际问题具备以下三个条件，那么，该问题就能用线性规划模型来处理：

1. 优化条件——问题所要达到的目标能用线性函数来描述且能够用极值（最大或最小）来表示。

2. 限制条件——达到目标的条件是有一定限制的，这些限制可以用决策变量的线性等式或者线性不等式来表示。

3. 选择条件——有多种可供选择的方案，以便从中找出最优方案。

二、建模步骤

建立一个实际问题的线性规划模型可以按下面三个步骤进行：

第一步：确定要求解的决策变量。这是很关键的一步，也是比较困难的一步。决策变量选取得当，不仅会使线性规划的数学模型建得好，而且会使求解比较方便，否则，很可能事倍功半。

第二步：找出所有的限制，即约束条件，并用决策变量的线性方程式或线性不等式来表示。一般，可以用表格形式列出所有的限制数据，然后根据所列数据写出相应的约束条件，以避免遗漏或重复规定的限制要求。

第三步：明确目标函数，并用决策变量的线性函数来表示。要求对此目标函数求极大或极小。

最后，根据问题的实际意义，确定是否添加决策变量的非负条件。

三、建模举例

下面，我们通过若干实例来说明建模的思想与方法。需要强调指出的是，模型的建立与其说是一种科学，倒不如说是一种艺术。要做到得心应手，必需经过大量的实践。

例 1-2 试列出下述产品规划问题的线性规划模型：某工厂生产 A、B、C 三种产品，每吨利润分别为 2000 元、3000 元、1000 元；生产单位产品所需的工时及原材料如表 1—2 所示。若供应的原材料每天不超过 3 吨，所能利用的劳动力日总工时是固定的，

表 1—2

生产每吨产品所需资源	产品		
	A	B	C
所需工时占总工时比例	1/3	1/3	1/3
所需原材料 （吨）	1/3	4/3	7/3

问如何制定日生产计划，使三种产品总利润最大？

解：第一步——确定决策变量。

“问什么，就确定什么为决策变量”，这是最简单的设置决策变量的直接法。只要问题不太复杂，我们总是尽可能采用这个办法来设置决策变量。现在，该例是问“如何制定生产计划”，也就是如何安排这三种产品的产量，因此，我们就可以这样来确定决

策变量：

x_1 为产品 A 的日产量。

x_2 为产品 B 的日产量。

x_3 为产品 C 的日产量。

第二步——明确约束条件。

在这个问题中，约束条件体现在两种资源——劳动力和原材料的供应有限制。生产一吨产品 A 需要 1/3 总工时，那么每天生产 x_1 吨产品 A 就需要 1/3 x_1 总工时；类似地，生产 x_2 吨产品 B 和 x_3 吨产品 C 就各需要 1/3 x_2 和 1/3 x_3 总工时。但是，这些需要的工时总数不能超过所能利用的总工时，于是得到劳动力约束条件为：

$$\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3\leqslant 1$$

仿照上面的分析，可得原材料的约束条件为：

$$\frac{1}{3}x_1+\frac{4}{3}x_2+\frac{7}{3}x_3\leqslant 3$$

第三步——明确目标。

问题的目标是要使生产的总利润为最大。假定生产出来的产品都能销售掉，则可得总利润（千元）为：

$$Z=2x_1+3x_2+x_3$$

最后，x_1，x_2，x_3 代表的是产品的产量，只能取非负值。于是，可得《产品规划问题》的线性规划模型为：

$$\max Z=2x_1+3x_2+x_3$$

$$s.t.\begin{cases}\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3\leqslant 1\\ \frac{1}{3}x_1+\frac{4}{3}x_2+\frac{7}{3}x_3\leqslant 3\\ x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0\end{cases}$$

例 1-3 某工厂生产 A、B 两种产品，均需经过两道工序，每生产一吨产品 A 需要经第一道工序加工 2 小时，第二道工序加工 3 小时；每生产一吨产品 B 需要经第一道工序加工 3 小时，第二道工序加工 4 小时。可供利用的第一道工序工时为 12，第二道工序工时为 24。

生产产品 B 的同时产出副产品 C，每生产一吨产品 B，可同时得到 2 吨产品 C 而毋需外加任何费用。这副产品 C 一部份可以盈利，剩下的只能报废。

出售产品 A 每吨能盈利 400 元、产品 B 每吨能盈利 1000 元，每销售一吨副产品 C 能盈利 300 元，而剩余要报废的则每吨损失为 200 元。经市场预测，在计划期内产品 C 最大销量为 5 吨。试列出本问题的线性规划模型，决定 A、B 两种产品的产量，使工厂总的盈利为最大。

本例中，由于副产品 C 的出现而使问题复杂化了。如果仍然简单地按照“问什么，就确定什么”的办法来设置决策变量，即只设 A、B 两种产品的产量分别为 x_1，x_2，则在列目标函数和约束条件时将会遇到困难。另外，由于产品 C 的单位利润是在 +300 元

或 - 200 元之间变化，因此，如果根据总利润和产量绘制关系图，可以清楚地看出目标函数是非线性函数，这是遇到的又一个障碍！但是我们只要适当地选取决策变量，就会使这些困难迎刃而解。

我们这样来设置决策变量：

x_1——产品 A 的产量

x_2——产品 B 的产量

x_3——产品 C 的销售量

x_4——产品 C 的报废量

由于把产品 C 的数量分成两个部分来表示，即 C 的产量可以表示成 x_3+x_4，于是，目标函数就可以表示成线性函数。即总利润（百元）为：

$$Z=4x_1+10x_2+3x_3-2x_4$$

由于生产一吨产品 B 可同时得到 2 吨产品 C，于是得到产品 B 与产品 C 的数量之间的约束关系：

$$x_3+x_4=2x_2$$

产品 C 的销售量约束条件为：

$$x_3\leqslant 5$$

此外，两道工序可利用的工时都是有限制的，生产 x_1 吨产品 A 需花费第一道工序的总工时为 $2x_1$，生产 x_2 吨产品 B 需要花费第二道工序的总工时为 $3x_2$，于是有：

$$2x_1+3x_2\leqslant 12$$

这就是第一道工序的工时约束 。

类似地分析，可得第二道工序的工时约束为

$$3x_1+4x_2\leqslant 24$$

最后，再考虑决策变量的非负条件。

综合上面的分析得到本例的线性规划模型为：

$$\max Z=4x_1+10x_2+3x_3-2x_4$$

$$s.t.\begin{cases}x_3+x_4=2x_2\\ x_3\qquad\leqslant 5\\ 2x_1+3x_2\leqslant 12\\ 3x_1+4x_2\leqslant 24\\ x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0\end{cases}$$

这个例子所给的条件比较多，因此在分析题意及建模之前，也可以先把已知的信息用表 1-3 的表格形式表示出来，以防建模时发生“遗漏”及“重复”而造成错误。表格的设计可以灵活多样，只要看起来清楚就行，没有固定的格式。

本例不仅给我们提供了一个恰当选取决策变量的示范，而且告诉我们，灵活地运用线性规划方法还可以处理一些非线性的问题。

例 1-4 某车站日夜服务旅社按不同时间段安排服务人员，据此，每天至少需要下列数量的服务员，如表 1—4 所示。

每班的服务员在轮班开始时到值班室报到，连续工作八小时。为满足每班所需的服务

表 1—3

工序 \ 产品 (单位产品所需工时)	A	B	C 销售	C 报废	每天可供利用的总工时
第一道工序	2	3	-	-	12
第二道工序	3	4	-	-	24
单位产品盈利 (百元)	4	10	2	-2	

表 1—4

班　　次	时　　间	最少需要人数
1	8：00—12：00	8
2	12：00—16：00	10
3	16：00—20：00	8
4	20：00— 0：00	5
5	0：00— 4：00	2
6	4：00— 8：00	4

员数，问该旅社服务员编制最少应为多少？从第一班开始排，试建立线性规划模型。

本例需要注意的是，在每一个时间段里上班的服务员中既包括在该时间段开始时报到的服务员，还包括上一个时间段工作的服务员，这是因为每一个时间段只有四小时，而每个服务员却要连续工作八小时，因此，每班的服务员应理解为该班次相应的时间段开始时到值班室报到的服务员。于是，我们可以这样设置决策变量：

设 x_i 为第 i 个班应报到的服务员人数（$i=1,2,\cdots,6$），应配备服务员总数就是：

$$Z=x_1+x_2+\cdots+x_6=\sum_{i=1}^{6}x_i$$

按所需人数最少的要求，可列出本例的线性规划模型为：

$$\min Z=\sum_{i=1}^{6}x_i$$

$$s.t.\begin{cases}x_1+x_6\geqslant 8\\ x_1+x_2\geqslant 10\\ x_2+x_3\geqslant 8\\ x_3+x_4\geqslant 5\\ x_4+x_5\geqslant 2\\ x_5+x_6\geqslant 4\\ x_1\geqslant 8\\ x_1,x_2\cdots,x_6\geqslant 0\end{cases}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com