射影曲面概论

苏步青著

上海科学技术出版社

內容提要

本书是著者继《射影曲綫概論》后的又一本射影微分几何专著，概括了作者在 1935 年左右和近年来在这方面的研究成果。

全书計有：曲面的基本元素；所有主切曲綫全属于綫性丛的曲面；射影极小曲面；某些构图 (T) 和其有关变换等四章。其中第二、三章是本书的重点。特别是第三章，基本內容圍繞交扭定理編成，还涉及到奥克塔夫、万叶尔和戈德的工作，著者在这里作出了一些有关定理和公式的补充。对射影极小曲面論本身，以及对研究高維射影空間共軛网論都提供了丰富的內容。

射影曲面概论

苏步青 著

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路 450 号）
上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

中华书局上海印刷厂印刷　新华书店上海发行所发行

开本 787×1092 1/23　印張 16 16/23　插頁 4　排版字数 329,000
1964 年10月第 1 版　1964 年10月第 1 次印刷
印数 1—5,000

統一书号 13119·597　定价（科七）2.80 元

序　言

自从笔者的《射影曲綫概論》一书于一九五四年出版（一九五八年中国科学院英文版）以来，时間又經过了十年．在这个期間里一直想把以往关于普通空間射影曲面論的一些成果，如同射影曲綫論一样，加以整理，但迟迟未能动笔．从文献上看来，尽管福比尼和捷赫早在一九二六年就已奠定了射影曲面論的基础，三十多年来国际上仍然不断出現这方面的論著，被写成各国文字（見卷末所附参考书籍），而用中文写成的专著只有上面一本，显得太少了．何况，我国有过一些致力于射影微分几何研究的数学家，他們的不少研究成果虽已被介紹于各国論著中，但大都語焉不詳．因此，整理出版这些成果是一件重要工作．

本书采用的叙述方法不是象各国著书那样地仅局限于所謂“純粹的”一种，而是針对不同的研究对象，运用各种方法到所討論的問題中去．例如，在第一章里基本上运用了福比尼的方法来推导一些基本公式，但也不排斥另外方法，如戈德的方法就被利用于戈德織面序列的探討．对第三章射影极小曲面論的处理也是这样：本来可以一貫运用福比尼的規范坐标系和基本方程，可是由于采取了戈德的表达方式，对几个有关的拉普拉斯序列便得到更明显的公式和其間关系．又例如，对伴随織面的推导和应用則选擇了嘉当規范标形（第一章 §6、§8），而且在第四章全部应用活动标形法作为研究某些构图 (T) 的有效工具．这样采用多种多样方法进行研究，既能充分发揮各种方法的优点，又能較

快地明确它們之間的联系.

本书共分四章. 第一章叙述曲面的基本元素，从头假定了曲面是非直紋、非退縮的，而且选用的参数是曲面的主切曲綫参数. 在簡单推导出以后常用的一些公式和定理之后，重点地导入笔者最初发現，而且后来已被驗証为重合于第二个戈德織面的伴随織面，为第二章做好准备工作. 其次，詳細介紹白正国、張素誠等关于姆塔儿織面的研究，并指出这些結論与曲面平截綫的密切二次曲綫分层(§15)之間的关系. 最后，作为姆塔儿織面的进一步推广，还叙述了窪田錐面和有关构图，特别是这錐面与塞格勒錐面的联系(§19). 第二章內容基本上是根据笔者一九三五年到一九三六年发表的六篇文章写成的. 仅在討論两曲面在对应点具有共同的杜慕兰四边形的問題中，結合近年戈德和波尔的研究做了必要的修訂(見第二章§6)，而对于其他部分仍保持原有形式，未加任何改动. 中心定理是：在各点的伴随織面都変为固定在空間的織面，这种曲面只能是S曲面，就是：主切曲綫全属于綫性丛的曲面. 最后一节(§9)引进了白正国关于单系主切曲綫属于綫性丛的曲面的重要研究. 第三章射影极小曲面主要是叙述笔者近年来的研究結果，基本內容是圍繞交扭定理(§4)編成的. 它还牽涉到奥克塔夫・迈叶尔和戈德的工作，所以在§2和§3作出了一些有关定理和公式的补充. 这些研究不但极大地丰富了射影极小曲面論的內容，而且还提供了作为研究高維射影空間共軛网論的典型范例，有利于有关方面工作的发展. 第四章闡述了从菲尼可夫构图(T)出发，經过构图(T_4)、(T^*)和其加拉普秦变换的討論而最后到达于伴随构图(T)的研究. 这样，連接了笔者二十多年前的工作和近年来的研究編出較有系統的內容.

由此可見，本书所收集的資料有相当一部分是来自笔者論文的. 为便于讀者查考，特別地把这些論文連同白正国、張素誠、吳祖基三位教授的有关于射影曲面論的著作列成《部分参考文献》，附于卷后. 至于其他論文只在引用的有关章节里就地注明其作者姓名、刊物名称、卷数、頁数和年份. 凡在本书中未及引用的論著，包括我国一些几何学家的工作在內，因篇幅关系都未予列入. 关于这部分，請讀者参考卷后所

列的《参考书籍》、国内外数学专刊和国内各大学自然科学学报.

在本书編写过程中,笔者曾經作了一番努力,务使讀者在学完高等几何和微分几何的基础上能夠领会本书的內容. 但是,限于笔者的学术水平和表达能力,說理不夠严密,叙述不夠深入淺出,欠妥甚至誤謬之处还在所难免,希望讀者随时加以指正.

苏 步 青

1964 年 在上海

目　录

第一章

曲面的基本元素

§1 主切曲綫

設 x, y, z, t 是三維射影空間一点 (x) 的齐次坐标，如果它們都是两个自变量 u, v 的函数：

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v), \quad t=t(u, v),$$

那末点 (x) 的軌迹是一个曲面 σ，而且曲綫 u（单独变动 u 而固定 v 时的点 (x) 的軌迹）和曲綫 v（单独变动 v 而固定 u 时的称呼）称为 σ 的参数曲綫或坐标曲綫．以下单用

$$x=x(u, v) \tag{1·1}$$

代替上列四个方程，并規定函数 $x(u, v)$ 在研究范圍内都是連續的，而且有連續的导来函数

$$x_u=\frac{\partial x}{\partial u}, \quad x_v=\frac{\partial x}{\partial v}, \quad x_{uu}=\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \quad \cdots.$$

在 σ 的任意正常点 (x) 引曲面的切綫，其全体形成一平面，就是 σ 的切平面．从

$$dx=x_u\,du+x_v\,dv$$

得出切平面的方程

$$(X\ x\ x_u\ x_v)=0, \tag{1·2}$$

其中的括号表示四阶行列式，括号中所列出的是它的第一行，其余三行顺次是 Y, y, y_u, y_v; Z, z, z_u, z_v; T, t, t_u, t_v, 并且 (X, Y, Z, T) 表示动点 (X) 的坐标.

在曲面 σ 上取一曲綫 Γ, 設它的方程是

$$u=u(\tau), \quad v=v(\tau), \tag{1·3}$$

那末 Γ 的密切平面决定于下列三点:

$$x, \quad dx, \quad d^2x.$$

为了 Γ 要变成曲面 σ 的**主切曲綫**，充要条件是：它在每一点的密切平面恒与曲面在这点的切平面重合，也就是

$$(x\ x_u\ x_v\ d^2x)=0. \tag{1·4}$$

当 σ 經受到直射变换时，(1·4)式的左边行列式仅添加一个不等于0的因子，所以曲面的主切曲綫是射影协变曲綫.

按照曲面的共軛曲綫也可定义主切曲綫，从此容易看出：主切曲綫关于曲面的逆射变换也是协变的.

从(1·3)获得

$$dx=x_u\,du+x_v\,dv,$$

$$d^2x=x_{uu}\,du^2+2x_{uv}\,du\,dv+x_{vv}\,dv^2+x_u\,d^2u+x_v\,d^2v.$$

代入(1·4)，便可改写主切曲綫的微分方程：

$$(x\,x_u\,x_v\,x_{uu})du^2+2(x\,x_u\,x_v\,x_{uv})du\,dv+(x\,x_u\,x_v\,x_{vv})dv^2=0. \tag{1·5}$$

方程(1·4)也可表成为另外的形式. 从(1·2)首先导入

$$\xi=\rho(x,\ x_u,\ x_v), \tag{1·6}$$

式中 ρ 表示不等于0的因子，(x, x_u, x_v) 表示行列式 $(X\quad x\quad x_u\quad x_v)$ 关于第一列四个元的小行列式. 这样，方程(1·2)可以写成

$$\xi X+\eta Y+\zeta Z+\tau T=0,$$

或簡单地

$$\xi\cdot X=0.$$

按照定义得知，ξ 是切平面的坐标，而且它满足

$$\xi\cdot x=x_u\cdot\xi=x_v\cdot\xi=0, \tag{1·7}$$

从而(1·4)变为

$$\xi\cdot d^2x=0. \tag{1·4$'$}$$

由(1·7)得出

$$\xi\cdot dx=x\cdot d\xi=0,\quad x\cdot d^2\xi=-dx\cdot d\xi=\xi\cdot d^2x.$$

因而,(1·4)$'$ 也可写为

$$x\cdot d^2\xi=0. \tag{1·4$''$}$$

由于 $x\cdot\xi=x\cdot d\xi=0$, 便有

$$x=r(\xi,\ \xi_u,\ \xi_v), \tag{1·8}$$

式中 r 表示一个不等于 0 的比例因子. 从而(1·4)$''$ 又可改写为

$$(\xi\ \ \xi_u\ \ \xi_v\ \ d^2\xi)=0. \tag{1·4$'''$}$$

由此可見,主切曲綫关于曲面的逆射变换是协变曲綫.

原来,曲面 σ 上一点的齐次坐标除了一个比例因子 $h=h(u,\ v)$ 而外是完全决定的. 同样地, 在 (1·6) 中函数 $\rho=\rho(u,\ v)$ 的选擇也是任意的. 如果取 ρ' 以代 ρ, 且同时取 r' 以代(1·8)式中的 r, 就有

$$\xi'=\rho'(x,\ x_u,\ x_v)=\frac{\rho'}{\rho}\xi,$$

从而

$$(\xi',\ \xi'_u,\ \xi'_v)=\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^3(\xi,\ \xi_u,\ \xi_v),$$

$$x=r'(\xi',\ \xi'_u,\ \xi'_v)=r'\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^3(\xi,\ \xi_u,\ \xi_v).$$

最后式和(1·8)相比較,便得到

$$r'\rho'^3=r\rho^3.$$

如果取 $\rho'=\sqrt[4]{|r\rho^3|}$, 就有 $r'=\pm\rho'$, 从而 ρ' 的絕对值已經确定, 只是它的正負号还有任意选擇的余地. 現在, 仍沿用 ρ 和 ξ 以代 ρ' 和 ξ', 我們导出

$$\xi=\rho(x,\ x_u,\ x_v),\quad x=\varepsilon\rho(\xi,\ \xi_u,\ \xi_v)\quad(\varepsilon=\pm1), \tag{1·9}$$

式中 ρ 和 ε 都是往后待定的.

其次,将証明: 这样决定 ξ 的方法对于参数 $u,\ v$ 的任何变换是不变的.

实际上，$u=u(u',v')$，$v=v(u',v')$；其中雅可比式

$$J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(u',v')}\neq 0,$$

便有

$$(x,x_{u'},x_{v'})=J(x,x_u,x_v),$$
$$(\xi,\xi_{u'},\xi_{v'})=J(\xi,\xi_u,\xi_v),$$

所以

$$\xi=\rho'(x,x_{u'},x_{v'}),\quad x=\varepsilon\rho'(\xi,\xi_{u'},\xi_{v'})\quad(\rho'=\rho J^{-1}).\qquad(1\cdot 9)'$$

如上所述，从点(x)的坐标除了符号而外，可以完全决定切平面(ξ)的坐标ξ. 称这ξ为对应于x的切平面坐标. 当x乘以一因数时，很明显地对应的ξ也乘以同一因数. 这是捷赫首創的方法（参看福-捷，导論，40）.

最后，我們来决定ρ和ε. 为此，置

$$F_2=\xi\cdot d^2x=a_{11}\,du^2+2a_{12}\,du\,dv+a_{22}\,dv^2,$$

并假定$a_{12}=a_{21}$，$u=u_1$，$v=v_2$，那末

$$F_2=\xi\cdot d^2x=-d\xi\cdot dx=x\cdot d^2\xi=a_{rs}\,du_r\,du_s,\qquad(1\cdot 10)$$

$$\left.\begin{aligned}&a_{11}=\xi\cdot x_{uu}=-\xi_u\cdot x_u=x\cdot\xi_{uu},\\&a_{12}=a_{21}=\xi\cdot x_{uv}=-\xi_u\cdot x_v=-\xi_v\cdot x_u=x\cdot\xi_{uv},\\&a_{22}=\xi\cdot x_{vv}=-\xi_v\cdot x_v=x\cdot\xi_{vv}.\end{aligned}\right\}\qquad(1\cdot 11)$$

主切曲綫的微分方程$(1\cdot 4)'$可以写为$F_2=0$. 假定点(x)不是曲面σ的抛物点，那末

$$A=a_{11}a_{22}-a_{12}^2\neq 0,$$

而且过这点有两条主切曲綫.

从$(1\cdot 9)$和$(1\cdot 10)$得到

$$F_2=\rho(x\,x_u\,x_v\,d^2x)=\varepsilon\rho(\xi\,\xi_u\,\xi_v\,d^2\xi),\qquad(1\cdot 12)$$

应用行列式的乘法定理，便导出

$$F_2^2=\varepsilon\rho^2\begin{vmatrix}0&0&0&F_2\\0&-a_{11}&-a_{12}&*\\0&-a_{21}&-a_{22}&*\\F_2&*&*&*\end{vmatrix}=-\varepsilon\rho^2AF_2^2,$$

因而

$$\varepsilon=-\operatorname{sgn} A,\quad \rho=\frac{1}{\sqrt{|A|}},\quad A=a_{11}a_{22}-a_{12}^2. \tag{1·13}$$

置

$$(x\,x_u\,x_v\,d^2x)=b_{rs}\,du_r\,du_s, \tag{1·14}$$

我們获得

$$a_{rs}=\rho b_{rs},\quad A=\rho^2(b_{11}b_{22}-b_{12}^2),$$

且从此导出

$$\rho=\frac{1}{\sqrt[4]{|b_{11}b_{22}-b_{12}^2|}},\quad \varepsilon=-\operatorname{sgn}(b_{11}b_{22}-b_{12}^2).$$

当曲面的参数方程 (1·1) 是給定时，按照最后两方程可以算出 ρ 和 ε.

很明显，如果 x 乘以一因数 $\sigma(u,v)\neq 0$, F_2 必乘以因数 σ^2. 另外，对于参数 u, v 的变换 F_2 至多只能更改一个符号，而实际上只当雅可比式 $J<0$ 时更改符号.

从(1·13)看出，对于虚的主切曲綫所在的曲面 $\varepsilon=-1$; 而在相反的情况下 $\varepsilon=+1$.

§ 2 主切参数表示和基本微分方程

为完整起見，首先討論以后必須除外的两种情况，就是 $F_2\equiv 0$ 和 F_2 分解为一次微分式的平方. 在后一情况下，只要适当地选取参数 u, v, 就可把 $F_2=0$ 化为 $dv^2=0$, 从而得到

$$a_{11}=\xi\cdot x_{uu}=-\xi_u\cdot x_u=0,$$
$$a_{12}=\xi\cdot x_{uv}=-\xi_u\cdot x_v=0.$$

比較这些方程和 $\xi_u\cdot x=0$, 并注意到

$$\|x_u,\ x_v,\ x\|\neq 0,$$

便得出 $\xi_u=\lambda'\xi$. 再取 ξ 的适当比例因数，还可把这方程化为 $\xi_u=0$. 这就是說，原曲面是可展面.

根据同样的方法，可以証明：在 $F_2\equiv 0$ 的假定下，$\xi_u=\xi_v=0$; 所以

主切曲綫不定的曲面必須退縮为平面.

下文中除去可展面和平面，而且取曲面 σ 的两系主切曲綫做坐标曲綫 u 和 v；这一来，

$$a_{11}=\xi\cdot x_{uu}=-\xi_u\cdot x_u=x\cdot\xi_{uu}=0, \tag{2·1}$$

$$a_{22}=\xi\cdot x_{vv}=-\xi_v\cdot x_v=x\cdot\xi_{vv}=0, \tag{2·2}$$

$$\left.\begin{aligned}&A=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=-a_{12}^2,\\&a_{12}=\xi\cdot x_{uv}=-\xi_u\cdot x_v=-\xi_v\cdot x_u=x\cdot\xi_{uv}.\end{aligned}\right\} \tag{2·3}$$

我們还假定 $\varepsilon=1$，就是实的主切曲綫存在．但是，所得到的公式在虛的主切曲綫的情况下也同样成立.

从(2·1)～(2·3)得出

$$\left.\begin{aligned}&(x\,x_u\,x_v\,x_{uu})=(\xi\,\xi_u\,\xi_v\,\xi_{uu})=0,\\&(x\,x_u\,x_v\,x_{vv})=(\xi\,\xi_u\,\xi_v\,\xi_{vv})=0,\end{aligned}\right\} \tag{2·4}$$

$$\left.\begin{aligned}&\xi=\rho(x,\ x_u,\ x_v),\quad x=\rho(\xi,\ \xi_u,\ \xi_v),\\&\rho=\frac{\omega}{a_{12}}\quad(\omega=\pm1),\end{aligned}\right\} \tag{2·5}$$

$$\left.\begin{aligned}&a_{12}=\rho(x\,x_u\,x_v\,x_{uv})=\frac{\omega}{a_{12}}(x\,x_u\,x_v\,x_{uv}),\\&\omega a_{12}^2=(x\,x_u\,x_v\,x_{uv})=(\xi\,\xi_u\,\xi_v\,\xi_{uv})\quad(\omega=\pm1).\end{aligned}\right\} \tag{2·6}$$

如果 $u,\ v$ 是实数，而且避免使用复数，就必須取定

$$\omega=\operatorname{sgn}(x\,x_u\,x_v\,x_{uv}), \tag{2·7}$$

从而，对調 $u,\ v$，便要更改 ω 的符号.

由于主切綫 $(x,\ x_u)$ 和它的共軛切綫 $(\xi,\ \xi_u)$ 重合，而且主切綫 $(x,\ x_v)$ 和它的共軛切綫 $(\xi,\ \xi_v)$ 也重合，

$$(x,\ x_u)=\lambda(\xi,\ \xi_u),\quad(x,\ x_v)=\mu(\xi,\ \xi_v),$$

式中 $\lambda,\ \mu$ 表示待定的比例因数．可是

$$\begin{aligned}\omega a_{12}^2&=(x\,x_u\,x_v\,x_{uv})=(x,\ x_u)\cdot(x_v,\ x_{uv})\\&=\lambda(\xi,\ \xi_u)\cdot(x_v,\ x_{uv})\\&=\lambda\begin{vmatrix}\xi\cdot x_v&\xi\cdot x_{uv}\\\xi_u\cdot x_v&\xi_u\cdot x_{uv}\end{vmatrix}=\lambda a_{12}^2,\end{aligned}$$

所以 $\lambda=\omega$．同样，得到 $\mu=-\omega$．因此，

$$(x,\ x_u)=\omega(\xi,\ \xi_u),\quad (x,\ x_v)=-\omega(\xi,\ \xi_v). \tag{2·8}$$

当曲面的点(x)沿曲面的任意方向$du:dv$进行时，我們获得

$$(x,\ dx)=(x,\ x_u)du+(x,\ x_v)dv=\omega[(\xi,\ \xi_u)du-(\xi,\ \xi_v)dv].$$

从此看出：两直綫

$$(x,\ dx)\pm(\xi,\ d\xi) \tag{2·9}$$

就是主切綫．这个結果显然是与参数的选擇无关的(参看福-捷，导論，46)．

根据(2·4)一定有u, v的函数α, β, γ, ε, p_{11}, p_{22}，使得

$$x_{uu}=\alpha\, x_u+\beta\, x_v+p_{11}\, x,$$
$$x_{vv}=\gamma\, x_u+\varepsilon\, x_v+p_{22}\, x.$$

微分的結果是

$$\left.\begin{aligned}
x_{uuu}&=(\alpha_u+\alpha^2+p_{11})x_u+(\beta_u+\alpha\beta)x_v\\
&\quad+(p_{11u}+\alpha\, p_{11})x+\beta\, x_{uv},\\
x_{uuv}&=(\alpha_v+\beta\gamma)x_u+(\beta_v+\beta\varepsilon+p_{11})x_v\\
&\quad+(p_{11v}+\beta\, p_{22})x+\alpha\, x_{uv},\\
x_{uvv}&=(\gamma_u+\gamma\alpha+p_{22})x_u+(\varepsilon_u+\beta\gamma)x_v\\
&\quad+(p_{22u}+\gamma p_{11})x+\varepsilon\, x_{uv},\\
x_{vvv}&=(\gamma_v+\varepsilon\gamma)x_u+(\varepsilon_v+\varepsilon^2+p_{22})x_v\\
&\quad+(p_{22v}+\varepsilon\, p_{22})x+\gamma\, x_{uv}.
\end{aligned}\right\} \tag{I$_1$}$$

从此容易算出第四阶导来函数，使表成为x, x_u, x_v, x_{uv}的一次齐式，并且按照

$$\frac{\partial}{\partial u}x_{uvv}=\frac{\partial}{\partial v}x_{uuv}$$

得到可积分条件．特别是，注意到x_{uv}的系数，一方是ε_u而他方是α_v，所以$\alpha_v=\varepsilon_u$．因此，存在一函数θ，使$\alpha=\theta_u$, $\varepsilon=\theta_v$.

从另外方面也可以求出θ．微分(2·6)，

$$2\omega a_{12}\frac{\partial a_{12}}{\partial u}=(x\, x_{uu}\, x_v\, x_{uv})+(x\, x_u\, x_v\, x_{uuv})$$
$$=2\alpha(x\, x_u\, x_v\, x_{uv})=2\theta_u\,\omega a_{12}^2,$$

即

$$\theta_u=\frac{\partial}{\partial u}\log|a_{12}|.$$

同样地，得到

$$\theta_v=\frac{\partial}{\partial v}\log|a_{12}|.$$

我們不妨取定 $\theta=\log|a_{12}|$，而且 $\alpha=\theta_u$，$\varepsilon=\theta_v$，从而 x 满足下列微分方程組：

$$\left.\begin{aligned}x_{uu}&=\theta_u x_u+\beta x_v+p_{11}x,\\ x_{vv}&=\theta_v x_v+\gamma x_u+p_{22}x;\end{aligned}\right\}\tag{I}$$

$$\left.\begin{aligned}&|a_{12}|=e^{\theta},\\ &(x\,x_u\,x_v\,x_{uv})=(\xi\,\xi_u\,\xi_v\,\xi_{uv})=\omega a_{12}^2=\omega e^{2\theta}.\end{aligned}\right\}\tag{I$_2$}$$

这組方程称为**曲面的基本方程**．从(I)容易求出可积分条件，在下节将詳細討論．

应用上述方法到 ξ，同样得到类似方程組

$$\xi_{uu}=\theta_u\xi_u+\beta'\xi_v+\pi_{11}\xi,$$
$$\xi_{vv}=\theta_v\xi_v+\gamma'\xi_u+\pi_{22}\xi,$$

式中 θ 就是在(I$_2$)所决定的同一函数．

为确定 β'，γ'，π_{11} 和 π_{22}，微分(2·1)并利用 $\xi\cdot x_u=\xi_u\cdot x=0$；从此得到

$$\begin{aligned}0&=\xi_u\cdot x_{uu}+x_u\cdot\xi_{uu}=\xi_u\cdot(\theta_u x_u+\beta x_v+p_{11}x)\\ &\quad+x_u\cdot(\theta_u\xi_u+\beta'\xi_v+\pi_{11}\xi)\\ &=\beta\xi_u\cdot x_v+\beta' x_u\cdot\xi_v=-(\beta+\beta')a_{12},\end{aligned}$$

所以 $\beta'=-\beta$．同样，成立 $\gamma'=-\gamma$．因此，ξ 所满足的基本方程組是

$$\left.\begin{aligned}\xi_{uu}&=\theta_u\xi_u-\beta\xi_v+\pi_{11}\xi,\\ \xi_{vv}&=\theta_v\xi_v-\gamma\xi_u+\pi_{22}\xi.\end{aligned}\right\}\tag{II}$$

其次，我們来确定 π_{11} 和 π_{22}．为此，注意到关系式：

$$\begin{aligned}\xi_u\cdot x_{uv}&=\frac{\partial}{\partial u}(\xi_u\cdot x_v)-x_v\cdot\xi_{uu}\\ &=-\frac{\partial a_{12}}{\partial u}-x_v\cdot(\theta_u\xi_u-\beta\xi_v+\pi_{11}\xi)\\ &=-\frac{\partial a_{12}}{\partial u}+\theta_u a_{12}=0\end{aligned}$$

和其类似式，便导出

$$\xi_u\cdot x_{uv}=\xi_v\cdot x_{uv}=x_u\cdot\xi_{uv}=x_v\cdot\xi_{uv}=0. \tag{2·10}$$

經微分的結果，

$$\begin{aligned}\xi_u\cdot x_{uuv}&=-\xi_{uu}\cdot x_{uv}=-(\theta_u\xi_u-\beta\xi_v+\pi_{11}\xi)\cdot x_{uv}\\&=-\pi_{11}\xi\cdot x_{uv}=-\pi_{11}a_{12}.\end{aligned}$$

可是从(I_1)和(2·10)看出

$$\xi_u\cdot x_{uuv}=\xi_u\cdot(\beta_v+\beta\theta_v+p_{11})x_v=-(\beta_v+\beta\theta_v+p_{11})a_{12},$$

所以

$$\pi_{11}=p_{11}+\beta_v+\beta\theta_v, \tag{2·11}$$

且同样，

$$\pi_{22}=p_{22}+\gamma_u+\gamma\theta_u. \tag{2·11}'$$

如果給定了方程組(I)，就能求出方程組(II)，并且反过来也成立.

从方程(2·10)还可导出一个重要公式．从

$$x_{uv}\cdot\xi_{uv}=\frac{\partial}{\partial v}(\xi_u\cdot x_{uv})-\xi_u\cdot x_{uvv}=-\xi_u\cdot x_{uvv}$$

和(I)获得

$$x_{uv}\cdot\xi_{uv}=(\theta_{uv}+\beta\gamma)a_{12}=a_{12}^2\Omega, \tag{2·10}'$$

式中

$$\Omega=\frac{1}{a_{12}}(\theta_{uv}+\beta\gamma). \tag{2·10}''$$

当 $\beta,\ \gamma,\ p_{11},\ p_{22}$ 順次改为 $-\beta,\ -\gamma,\ \pi_{11},\ \pi_{22}$ 时，方程(2·11)和(2·11)′保持不变.

此外，从(I)和(I_1)得到

$$(x\,x_u\,x_{uu}\,x_{uuu})=\beta^2(x\,x_u\,x_v\,x_{uv})=\omega\beta^2a_{12}^2.$$

同样，

$$(\xi\,\xi_u\,\xi_{uu}\,\xi_{uuu})=\omega\beta^2a_{12}^2.$$

因此，

$$(x\,x_u\,x_{uu}\,x_{uuu})=(\xi\,\xi_u\,\xi_{uu}\,\xi_{uuu}). \tag{2·12}$$

微分方程(I)是福比尼和其学派常用的，因而有**福比尼型的基本方程**的称謂．如果置

$$x=e^{\frac{1}{2}\theta}y,$$

(I)便化为

$$\left.\begin{aligned}y_{uu}&=\beta y_v-c_1 y,\\ y_{vv}&=\gamma y_u-c_2 y,\end{aligned}\right\}\tag{2·13}$$

式中β和γ保持不变．置

$$\beta=-2b,\quad \gamma=-2a,\tag{2·14}$$

又可改写(2·13)为**維尔清斯基型的基本方程**：

$$\left.\begin{aligned}y_{uu}+2b\,y_v+c_1 y=0,\\ y_{vv}+2a\,y_u+c_2 y=0.\end{aligned}\right\}\tag{2·15}$$

作为这組方程的应用，在这里将决定一曲面的主切曲綫要全属于綫性丛的条件.

从(2·13)得到

$$\beta y_v=y_{uu}+c_1 y,$$

$$\beta y_{uv}=y_{uuu}-(\log\beta)_u y_{uu}+c_1 y_u+\{c_{1u}-c_1(\log\beta)_u\}y,$$

从而，在$\beta\gamma\neq 0$的假定下得出

$$y_{uuuu}+4b_1 y_{uuu}+6c_2 y_{uu}+4d_3 y_u+e_4 y=0,$$

其中已置

$$b_1=-\frac{1}{2}(\log\beta)_u,$$

$$c_2=-\frac{1}{6}[(\log\beta)_{uu}-(\overline{\log\beta})_u^2-2c_1+\beta_v],$$

$$d_3=\frac{1}{4}[2c_{1u}-\beta^2\gamma-2c_1(\log\beta)_u].$$

又导入

$$p_2=\frac{1}{3}(\log\beta)_{uu}-\frac{1}{12}(\overline{\log\beta})_u^2+\frac{1}{3}c_1-\frac{1}{6}\beta_v,$$

$$\begin{aligned}q_3=\frac{1}{2}c_{1u}-\frac{1}{4}\beta^2\gamma-\frac{1}{4}(\log\beta)_u(\log\beta)_{uu}\\ +\frac{1}{2}(\log\beta)_{uuu}-\frac{1}{4}\beta(\log\beta)_u(\log\beta)_v,\end{aligned}$$

$$\theta_3=q_3-\frac{3}{2}p_{2u},$$