

JINGDIANCHANG
DE FENXI YU
JIEFA

静电场的分析与解法

包德修 罗耀煌 编著
江懋昌 审校

云南人民出版社

静电场的分析与解法

包德修 罗耀煌 编
江懋昌 审校

云南人民出版社

责任编辑：林德琼

封面设计：杨天祥

静电场的分析与解法

包德修 罗耀煌 编

江懋昌 审校

*

云南人民出版社出版

(昆明市书林街100号)

云南新华印刷二厂印 云南省新华书店发行

*

开本：850×1168 1/32 印张：17.25 字数：410,000

1984年10月第一版 1984年10月第一次印刷

印数：1—6,500

统一书号：13116·93 定价：3.25元

前 言

当你开始学习《电动力学》或《电磁场理论》的时候，你可能深深感到实现“既要弄懂，又要会用”这句话是多么地不容易。作为《静电场的分析和解法》一书的第一个读者，我愿意向有或者曾有过上述想法的读者们推荐这本书。

如果在学习基本理论的同时，适当地多看一些例题，你心里就会觉得踏实得多。倘若你能再多解一点习题，你更能体会到应用理论成功的乐趣。《静电场的分析和解法》这本书或许可以作为你所学教材的自然补充。

有哪一个初学者，不愿意把自己刚刚学到的知识加以深化呢？有哪一个学习者，不愿意让自己知道的理论应用自如呢？那末，对于已经了解电动力学或电磁场理论的读者来说，或许深入学习一下静电场的各种解法，既能使你对基本理论的认识进一步得到深化，又会使你对常用数学物理方法应用自如。尤其重要的是，这将为你学习其它部分的知识，奠定了一个真正坚实的基础。

该书是以解题为主要内容，它几乎把现在看到的几本中外经典电动力学书藉中静电场方面的典型题目都选编入册，共有116道示范例题和288道习题。不仅例题给出了详细的求解过程，大部习题也都给出了求解的步骤和结果。对于那些可用几种方法求解的题目，为节省篇幅，只给出一种，而且不一定是最简便的一种方法。

全书自始至终采用国际单位制 (SI)。

44296109

在本书出版过程中，云南人民出版社科技组的全体同志给予了大力支持和帮助，我们对此深表感谢。

由于编审者水平有限，书中错误和不足之处在所难免，谨请广大读者批评指正。

江懋昌 一九八三·七·一

目 录

第一章 静电场的基本理论	(1)
§1. 静电场的基本方程	(1)
§2. 静电场的势和势的唯一性	(6)
§3. 带电体系与感生电荷间的相互作用能	(12)
§4. 静电场中的导体	(20)
§5. 关于静电场问题解法的依据	(25)
习题	(28)
习题答案、提示、略解	(32)
第二章 直接积分法	(37)
§1. 泊松方程的积分解	(37)
§2. 直接积分法	(43)
§3. 点电荷	(53)
§4. 直接积分法的局限性	(63)
习题	(69)
习题答案、提示、略解	(73)
第三章 多极展开	(83)
§1. 电势的多极展开	(83)
§2. 电多极矩的物理意义	(86)
§3. 电多极子和外场的相互作用能	(90)
§4. 举例	(91)
习题	(107)
习题答案、提示、略解	(112)

第四章 一维泊松方程的解	(127)
§1. 平面对称场的电势	(127)
§2. 球面对称场的电势	(139)
§3. 柱面对称场的电势	(146)
§4. 小结	(153)
习题	(164)
习题答案、提示、略解	(171)
第五章 分离变量法	(192)
§1. 球坐标系中拉普拉斯方程的解	(192)
§2. 柱坐标系中拉普拉斯方程的解	(205)
§3. 直角坐标系中拉普拉斯方程的解	(215)
§4. 小结	(226)
习题	(238)
习题答案、提示、略解	(245)
第六章 椭球坐标系下拉普拉斯方程的解	(277)
§1. 椭球坐标系	(277)
§2. 一维问题的解	(279)
§3. 扁椭球坐标系下拉普拉斯方程的解	(285)
§4. 长椭球坐标系下拉普拉斯方程的解	(290)
习题	(296)
习题答案、提示、略解	(298)
第七章 电像法	(306)
§1. 电荷的平面镜像	(306)
§2. 电荷的球面镜像	(317)
§3. 电荷的柱面镜像	(337)
§4. 电像法小结	(343)
§5. 电轴法	(345)

习题	(356)
习题答案、提示、略解	(365)
第八章 格林函数法	(408)
§1. 格林函数和边值问题	(408)
§2. 简单边界的格林函数	(411)
§3. 由格林函数求电势	(414)
§4. 格林互易定理	(422)
习题	(427)
习题答案、提示、略解	(430)
第九章 解析函数法	(439)
§1. 解析函数	(440)
§2. 常用的解析函数	(444)
§3. 举例	(451)
§4. 保角变换	(460)
§5. 常用的变换	(463)
§6. 举例	(468)
§7. 介质分界面上的边界条件	(496)
习题	(499)
习题答案、提示、略解	(507)
主要参考书	(543)

第一章 静电场的基本理论

讲述物理，可以按两种方式组织材料：一种是按它的发展史组织材料；另一种则是遵循它自己的理论体系按逻辑结构组织材料。这两种方法都是有价值的。理论物理往往倾向于第二种方式，因为它符合于认识论的第二阶段，并充分应用数学所富有的抽象和概括性进行演绎和推论。

静电场是电动力学的一个特例，是属于理论物理的范畴。我们将采用第二种方式组织材料，即静电场的基本理论将由麦克斯韦方程组演绎获得，从而遵循了电动力学的理论体系。

本书限于篇幅，不一一论证，仅就一般教科书中忽视而又是非常重要的一些基本概念作较详细的阐述。

§ 1. 静电场的基本方程

一、真空中静电场的基本方程

静电场是处于静止平衡（非动态平衡）下的电磁现象，是普遍电磁现象中的一个特例。所以静电场的基本方程就是特定条件下的麦克斯韦方程。这里所讲的特定条件就是静止平衡条件，它要求一切物理量都处于静止平衡状态，即要求电流密度矢量 $\mathbf{j} = 0$ ；场的物理量对时间的导数等于零。静止平衡条件代入真空中的麦克斯韦方程组后，真空中的麦克斯韦方程分成两组相互独立的方程组，它们是

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho_f / \epsilon_0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

式中 ρ_f 表示自由电荷体密度， $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ 分别表示电场强度矢量和磁感应强度矢量； ϵ_0 是出现在库仑定律中的有量纲的比例常数，与将给出的介质中的静电场基本方程相比较， ϵ_0 称之为真空介电常数。（1—1）中的两组方程，不仅相互独立，而且第二组方程仅存在零解： $\mathbf{B} = 0$ 。于是，在静止平衡条件下，麦克斯韦方程组仅是一组纯粹电场的方程，称为静电场方程。即

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho_f / \epsilon_0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

二、介质中静电场的基本方程

介质指的是电介质，可以分为两类：一类是由无极分子（分子内部正电荷中心和负电荷中心相重合）构成；另一类则是由有极分子（分子内部正电荷中心和负电荷中心不重合，而具有一定的电矩 $\mathbf{p}$ ）构成。在无外场作用时，无论是哪一类介质，都不显电性质。当有外电场存在时，无极分子的正、负电荷中心沿外场方向有一个相对位移，有极分子的电矩变杂乱无章为沿外场方向作一定程度的整齐排列。这时，介质内部电矩的矢量和 $\Sigma \mathbf{p} \neq 0$ ，这样的物理现象，我们称之为介质的极化。极化的程度，可用极化强度矢量 $\mathbf{P}$ 表示。其定义为：在介质中任取一点 M ，围绕 M 取一宏观无限小体元 ΔV ，若 ΔV 中分子电矩的矢量和为 $\Sigma \mathbf{p}$ ，而且极限

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow M} \frac{\Sigma \mathbf{p}}{\Delta V}$$

存在，则 $\mathbf{P}$ 称为介质中 M 点的极化强度矢量。它表示单位体积中分子电矩的矢量和。

介质中任一点的极化强度矢量 $\mathbf{P}$ ，不完全由外电场 $\mathbf{E}_0$ 决定，

而是由该点的总电场强度 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$ 决定, 其中 $\mathbf{E}'$ 是介质极化后极化电荷在该点产生的附加电场。对不同的介质, $\mathbf{P}$ 与 $\mathbf{E}$ 的关系 (极化规律) 是不同的。实验表明, 对于大多数常见的各向同性介质有:

$$\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (1-3)$$

比例常数 χ_e 叫做极化率, 它与场强 $\mathbf{E}$ 无关, 仅由介质的电学性质决定。可证: 同一介质的极化强度矢量与极化电荷 (束缚电荷) ρ_p 之间有如下的关系:

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (1-4)$$

此时介质中的场方程应为

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_f + \rho_p) \text{ 或 } \nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_f$$

引入一个辅助量 $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$,

则上式仅含 ρ_f , 于是

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$$

$\mathbf{D}$ 称为电位移矢量。从而介质中的场方程化简为:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_f, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

对于各向同性的介质

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$

式中 $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$, 称为介质的相对介电常数; $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$, 则称为介质的介电常数; 在这个意义上, ε_0 就是真空介电常数。

〔例题1·1〕证明: 在均匀介质内任一点的极化电荷体密度 ρ_p 总是和该点的自由电荷体密度 ρ_f 成正比, 比例常数为 $-(1 - \varepsilon_0/\varepsilon)$ 。

$$\text{〔证明〕} \because \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

对于各向同性的均匀介质 ε 应为常数, 故可得:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_f / \epsilon$$

$$\text{又} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = (\rho_f + \rho_p) / \epsilon_0,$$

$$\therefore \frac{\rho_f}{\epsilon} = \frac{\rho_f + \rho_p}{\epsilon_0}$$

$$\rho_p = -\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \rho_f$$

若空间充有两种不同的介质，在其分界面上，由于介质的物理性质发生突变，导致各场矢量也发生突变，（1—5）式在分界面上将不成立。因此，必须将（1—5）式中的体散度和体旋度过渡到面散度和面旋度，同时等式右边的物理量由体密度过渡到面密度，若该物理量不存在面密度则为零，从而获得分界面上的麦克斯韦方程式，通常称为电磁场的边界条件。于是在两种介质的分界面上，（1—5）式过渡为：

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) &= \sigma_f, \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

式中 $\mathbf{n}$ 表示分界面的法线方向的单位矢，在这里 $\mathbf{n}$ 规定为由第一种介质指向第二种介质如图1—1所示； σ_f 为介质分界面上的自由电荷面密度。

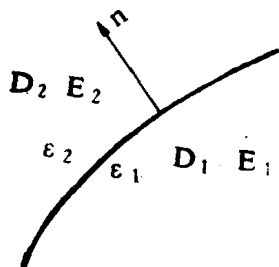


图 1—1

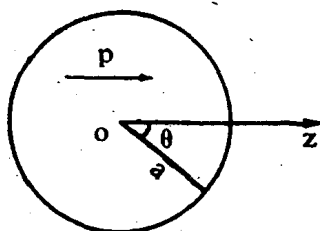


图 1—2

同理，由（1—4）式可导出介质界面上极化电荷面密度 σ_p

与极化强度矢量 $\mathbf{P}$ 间的关系:

$$\sigma_p = -\mathbf{n} \cdot (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \quad (1-7)$$

〔例题1·2〕一半径为 a 的介质球均匀极化,其极化强度为 $\mathbf{P}$ 。若球外是真空,试求极化电荷的分布及总极化电荷。

〔解〕由于球外是真空,故 $\mathbf{P}_2 = 0$,极化电荷只会分布在介质球内及其表面上。但因介质均匀极化, $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}$ 为常矢,所以 $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$,即无极化体电荷分布,只可能有极化面电荷存在。

为计算极化面电荷,可选球心为原点, $\mathbf{P}$ 方向为 z 轴的球坐标系,则极化电荷是以 z 轴为对称轴的轴对称分布,即 σ_p 与 α 无关。于是,球面上任一点的极化面电荷密度为:

$$\sigma_p = -\mathbf{n} \cdot (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} = p \cos \theta$$

从上式可以看出,电荷分布被过 O 点而与 z 轴垂直的平面分成两部分,左半球面上是正电荷,右半球面上是负电荷,而且极化电荷的分布是不均匀的。

整个球面上的总极化电荷应为

$$Q = \oint \sigma_p ds = p \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos \theta a^2 \sin \theta d\theta d\alpha = 0$$

这正是意料中的结果。

〔例题1·3〕当两种绝缘介质的分界面上 $\sigma_f = 0$ 时,电力线的曲折满足

$$\operatorname{tg} \theta_2 : \operatorname{tg} \theta_1 = \epsilon_2 : \epsilon_1$$

其中 ϵ_1 和 ϵ_2 分别为两种介质的介电常数, θ_1 和 θ_2 分别为界面两侧电力线与法线的夹角。

〔解〕在介质分界面上应有

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 0, \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$$

由此可得

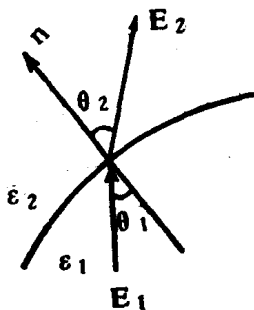


图 1—3

$$D_2 \cos \theta_2 - D_1 \cos \theta = 0, \quad E_2 \sin \theta_2 - E_1 \sin \theta_1 = 0。$$

注意到 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, 故第一式可改写为

$$\epsilon_2 E_2 \cos \theta_2 - \epsilon_1 E_1 \cos \theta_1 = 0,$$

$$\therefore \frac{E_2 \sin \theta_2}{\epsilon_2 E_2 \cos \theta_2} = \frac{E_1 \sin \theta_1}{\epsilon_1 E_1 \cos \theta_1}。$$

即
$$\frac{\operatorname{tg} \theta_2}{\operatorname{tg} \theta_1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}。$$

§ 2. 静电场的势和势的唯一性

一、静电场的势和势方程

综上所述, 在各向同性介质中, 静电场的基本方程是

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_f, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0, \\ \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E}。 \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

这是一组数目较多的微分方程组。原则上, 当给定空间中电荷分布和介质的性质时(即 ρ_f 和 ϵ 都是已知的函数时), 结合边界条件, 可直接求解 (1-8) 式, 获得 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{D}$ 的空间分布。可是, 解一数目较多的微分方程组, 在数学方法上是十分繁琐的, 而更多的情况是行不通的, 因此这一方法是不适用的。

现在我们来讨论 (1-8) 式的一般解法。由矢量分析的理论可知: 任何一个无旋场均可引入一个标量函数来描述该矢量场。而静电场正好是一个无旋场, 必存在一个标量函数 φ 使

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi \quad (1-9)$$

恒满足 $\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \nabla \varphi = 0$ 。

这个标量函数 φ 称作静电场的静电标势函数, 简称电势。从而静

电场可以通过 φ 来描述。注意，(1—9)式前面的负号并非矢量分析理论所要求，而是根据传统，静电场强度矢量 $\mathbf{E}$ 的指向与电势梯度的方向相反给出的。

既然静电场的势函数 φ 是必然存在的，那么，求解一个标量函数，一般说来比求解一个矢量函数要容易得多。因此，为了使静电问题获得简化，往往把求解 $\mathbf{E}$ 归结为求解 φ 。为此，我们导出电势所满足的方程。在实际问题中，绝大多数介质都是分块均匀或完全均匀的，介电常数 ε 在同一种介质内部是一个常数。于是(1—8)式的第一式可改写为

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_f / \varepsilon。$$

将(1—9)式代入上式得：

$$\nabla^2 \varphi = -\rho_f / \varepsilon。 \quad (1-10)$$

可见电势 φ 满足有名的泊松方程。如果所求解的空间中没有体电荷存在（不排除面电荷存在），泊松方程化简为拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \varphi = 0。 \quad (1-11)$$

(1—10)和(1—11)式是求解静电问题的基本方程，即静电问题变成为求解泊松方程和拉普拉斯方程。此后各章将结合静电问题的特点把最主要的几种解法逐一介绍给读者。

二、静电场中势函数 φ 的性质

为了解决具体问题时的需要，先对势函数 φ 的性质作简单的讨论。

首先讨论场中任意两点P、Q之间的电势差。由(1—9)式，有

$$-\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = (\nabla \varphi) \cdot d\mathbf{l} = d\varphi，$$

$$\therefore \varphi_P - \varphi_Q = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}。 \quad (1-12)$$

其次由(1—9)式所定义的势函数 φ 并不唯一，可以相差

任一常数 C 。为了用单值的势函数来描述电场，可以通过电势参考点的选取，使场中每一点都有一个而且只有一个确定的电势值与之对应。所谓电势的参考点是指选取该点的电势为零。原则上讲，电势参考点的选取是任意的。如选 Q 点为电势参考点，则(1—12)式变成

$$\varphi_p = \int_p^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-13)$$

一般说来，电势参考点的选取所遵循的原则是：(1) 要使势的表达式有意义；(2) 要使势的表达式尽可能简单；(3) 同一个问题只能选取一个参考点。对于电荷有限分布（是指无穷远处的电荷密度为零），通常将无穷远处选作电势的参考点，则

$$\varphi_p = \int_p^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-14)$$

当无限远处的电荷分布不为零时，则不能选无限远处作电势参考点，如何选取要视具体情况而定。

最后，讨论势函数 φ 在两种介质分界面上的性质。在真空或均匀介质中 $\mathbf{E}$ 是连续的，根据(1—9)式，势函数 φ 及其一阶导数在真空或均匀介质中也是连续的。由(1—6)、(1—9)和(1—13)式可得，在介电常数为 ϵ_1 、 ϵ_2 的两种介质分界面 s 上势函数所满足的关系式：

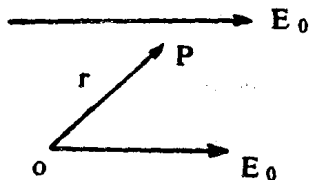
$$\left. \begin{aligned} \varphi_1|_s &= \varphi_2|_s, \\ \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \Big|_s - \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \Big|_s &= \sigma_f \end{aligned} \right\} \quad (1-15)$$

(1—15)式表明在两种介质的分界面上势函数是连续的，势函数的法线导数却是不连续的。

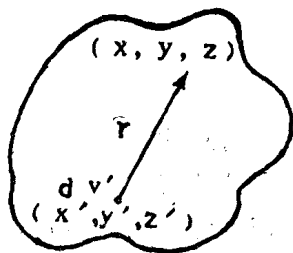
〔例题1·4〕求均匀场 $\mathbf{E}_0$ 的电势分布。

〔解〕要求空间任一点 P 的电势 φ_p ，可另任选一点 O 作坐标原点，由(1—12)式

$$\begin{aligned}\varphi_P - \varphi_0 &= \int_P^0 \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{E}_0 \cdot \int_P^0 d\mathbf{r} \\ &= -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} \text{。}\end{aligned}$$



(图 1—4)



(图 1—5)

对于均匀电场不能选无限远处作电势的参考点，若选 0 为电势参考点，则 $\varphi_0 = 0$ ，于是

$$\varphi_P = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} \text{。} \quad (1-16)$$

〔例题 1·5〕证明在无界均匀介质中函数

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{V'} \frac{\rho_f(x', y', z')}{r} dv' \quad (1-17)$$

满足泊松方程式 (1-10)。

〔证明〕因为 $\nabla^2 \varphi$ 的 ∇ 算符是对观察点 (x, y, z) 求导数，而与源头点 (x', y', z') 的积分无关，故

$$\begin{aligned}\nabla^2 \varphi(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \nabla^2 \iiint_{V'} \frac{\rho_f(x', y', z')}{r} dv' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{V'} \nabla^2 \left\{ \frac{\rho_f(x', y', z')}{r} \right\} dv' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{V'} \rho_f(x', y', z') \left\{ \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) \right\} dv' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{V'} \rho_f(x', y', z') \left\{ \nabla'^2 \left(\frac{1}{r} \right) \right\} dv'\end{aligned}$$