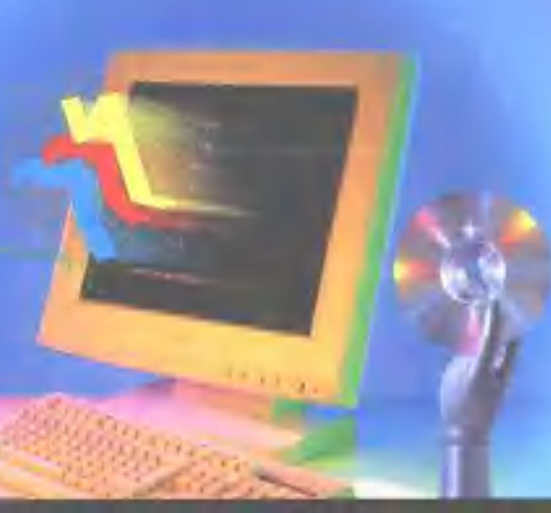
海淀名题

学习新思路

初二数学

北京市海淀区重点中学特级教师 编写



中国少年儿童出版社

海淀名题

学习新思路

初二数学

北京市海淀区重点中学特级教师 编写

中国少年儿童出版社

图书在版编目（CIP）数据

海淀名题学习新思路．初二数学 / 张秀峰主编．—
北京：中国少年儿童出版社，2000.9
ISBN 7－5007－5474－4

Ⅰ.海… Ⅱ.张… Ⅲ.数学课－初中－教学参考资料
Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 70359 号

海淀名题学习新思路

HAI DIAN MING TI XUE XI XIN SI LU

初二数学

出版发行： 中国少年儿童出版社
出 版 人：

责任编辑： 尚万春　　**封面设计：** 周建明

社　址： 北京东四十二条二十一号　　**邮政编码：** 100708
电　话： 010－64032266　　**传　真：** 010—64012262
24 小时销售咨询服务热线：010—65956688 转 31

印　刷： 招远新华彩印有限公司　　**经　销：** 全国新华书店

开　本： 850×1168　1/32　　**印 张：** 9 印张
2002 年 6 月北京第 1 次修订　　2002 年 7 月山东第 1 次印刷
字　数： 202 千字　　**印 数：** 1—10000 册

ISBN 7—5007—5474—4/G · 4266
(全四册)总定价：36.00 元　　本册定价：9.00 元

前　　言

海淀，名校林立，人杰地灵。这里既富有探索与创新的精神，又蕴含广阔的发展空间。海淀是无数青少年心驰神往的地方，是深造发展的梦之舞台。

为了使海淀深厚的教学优势得到传播和发扬，为了使广大同学走近海淀、感知海淀、融入无以伦比的学习氛围中，我们组织该地区多所重点中学的特、高级教师以现行人教社最新教学大纲为依据，并按照最新的中、高考《考试说明》和《考试纲要》的要求，为全国广大中学生精心编写了这部《海淀名题新思路》。

名题，是众多特、高级教师丰富的教学经验聚集的精华。名题意味着经典，不仅具有相当的权威性和含金量，而且随着时间的推移，名题的构成和解析方法也发生深刻的变化，更多地融入多元化、智能化的内容。本套丛书所收录的各种例题、试题正是严格地坚持与遵循了这一标准，力求向同学们展现一种全新的、富有创造性的学习新思路。

从书各册按单元而划分。各单元均由四个相互联系的知识板块组成。丛书以名题为基本内容，附以精炼的释疑，充分体现了讲练结合这一成功的辅导模式。本套丛书主要设有以下栏目：

知识网络 书中以凝炼的语言或精确的图表，对单元知识要点进行归纳和阐述，使同学从知识结构的高度进一步提高对各知识点的理解与掌握。

重点难点 这是学习过程中永恒的课题，本书摒弃传统意义上平铺直述的表达方式，而是通过对单元知识整合而提出具体问题，从而帮助同学深层次的理解重点和难点的来龙去脉及延伸轨迹。

典型例题解析 在典型例题的选择上，蕴含了两个基本层面：一

是以培养学生的思维能力为目标，选用了大量应用型和能力型的题型；二是以培养学生的应试能力为目标，重点选用了近年来中、高考的最新题型。在例题的解析过程中，除了对解题方法进行详尽的讲解之外，更注重对解题的思维过程进行深入的剖析。实践证明，通过这种方式，可迅速而有效地提高学生的思维能力与解题能力，使学生可以自如地应对各种类型的考试。

单元练习 这部分内容是以试题的形式对上述三项内容提出检验，也是一种特定的总结方式。习题设计遵循由浅入深、从易到难的原则。首先对知识点，特别是对中、高考的全部知识点进行全面覆盖，其次，有序安排重点难点问题，对同学的分析问题、解决问题的能力与演算试题的智能水平提出较高的要求。同时，通过期中、期末试卷设置较多的开放性、探索性、应用性的试题，由此激发创新意识，对同学的综合素质提出全面考核。最后，设置的试题、试卷与中、高考试题的难易程度相当，通过对试题、试卷的演练，可使同学熟悉考题思路，并有效地提高其应试能力。

参考答案 根据试题性质，备有详解和简答两种方式。对容易产生疑惑的问题均予科学、详尽地解释。另对部分试题，除做标准答案外，给同学留有广阔的思维空间。

海淀名题为莘莘学子提供了最佳的各类精典试题，海淀名师又为其指明了最佳的解题新思路，正所谓：

学得好必须学得巧，学得巧全靠思路妙；

磨刀不误砍柴功，《海淀名题新思路》为你一点通！

编者

2002 年 6 月

目 录

第 二 册

代数部分

几何部分

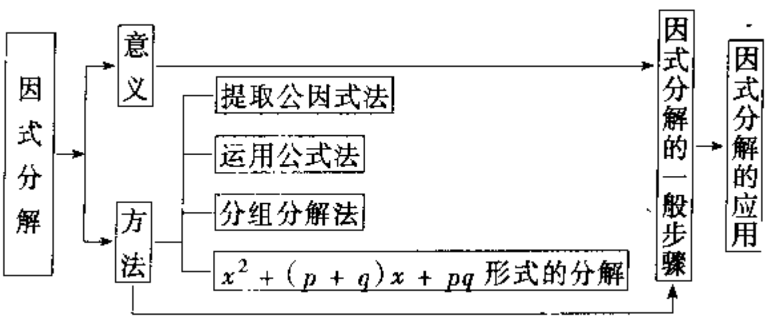
第二册

代数部分

第八章　因式分解

【知识网络】

1. 内容提要及知识联系



(1) 因式分解的概念

因式分解是一个重要的恒等变形，把一个多项式化为几个整式的积的形式，也叫做把这个多项式因式分解，这是因式分解的意义.

因为因式分解与整式乘法互为逆变形，所以学习多项式的因式分解一定要注意它们的区别，不要混淆.

(2) 因式分解的方法

①提取公因式法

提取公因式法是因式分解的最基本也是最常用的方法，它的

理论依据就是乘法分配律.

多项式各项都含有的相同的因式，叫做多项式各项的公因式.

一般地，如果多项式的各项有公因式，可以把这个公因式提到括号外面，将多项式写成因式乘积的形式，这种因式分解的方法叫做提公因式法，例如 $ma-mb+mc=m\ (a-b+c)$.

在用提公因式分解因式时应注意以下几点:①提公因式时要注意符号,遇到第一项系数为负数时,可先提出负号,使括号内的第一项系数是正数,在提出负号时,多项式各项都要变号,如 $-15ab-5bc+10bd=-5b(3a+c-2d)$;②不要漏掉“1”,如 $2a+6ab=2a(1+3b)$;③公因式要提尽,不能只提取字母,不提取公因数,并要分解到底,提公因式后能分解的要继续分解.

提取公因式法的关键，是准确地找出多项式中各项的公因式. 一般地，各项系数是整数时，取最大公约数做公因数，同时把各项中相同字母的最低次幂的积也取做公因式，一并提出来.

②运用公式法

把乘法公式反过来，就可以用来把某些多项式分解因式，这种分解因式的方法叫做运用公式法.

运用公式法的关键是熟悉并掌握好每一个公式.

本章要求熟练掌握的乘法公式是:

1) 平方差公式　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

2) 完全平方公式　$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

3) 立方和与立方差公式

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

运用公式法分解因式，必须从项数、次数、系数、符号几方面去准确地掌握每一个公式的特征.

运用公式法分解因式时，上述公式中的字母可以表示单项式（包括数）或多项式.

③分组分解法

一个多项式，它的各项没有公因式，也不能直接运用公式法来分解，这时可以把多项式分成几组，这种利用分组来分解因式的方法叫做分组分解法．

运用分组分解法分解因式，分组的原则是：①所分的各组能分解因式，或有的小组能分解因式；②各组之间有公因式，或可用公式法继续分解．

分组的方法：

1）根据系数分组：按相同的系数或相同系数比分组

例如：$3am+5bn+3bm+5an$

$=(3am+3bm)+(5bn+5an)$

$=3m(a+b)+5n(b+a)$

$=(a+b)(3m+5n)$

2）按照乘法公式分组

例如：$a^2-1-2ab+b^2$

$=(a^2-2ab+b^2)-1$

$=(a-b)^2-1$

$=(a-b+1)(a-b-1)$

3）根据字母次数分组

例如：$a^3+a^2+a-b^3-b^2-b$

$=(a^3-b^3)+(a^2-b^2)+(a-b)$

$=(a-b)(a^2+ab+b^2)+(a-b)(a+b)+(a-b)$

$=(a-b)(a^2+ab+b^2+a+b+1)$

4）拆项或添项后分组．以便分组后有公因式或运用公式分解因式

例如：$x^4-5x^2y^2+4y^4$

$=x^4-4x^2y^2+4y^4-x^2y^2$

$=(x^2-2y^2)^2-x^2y^2$

$= (x^2-2y^2+xy)(x^2-2y^2-xy)$

$= (x+2y)(x-y)(x-2y)(x+y)$

运用分组分解法的关键是合理选择分组方法，要预见到分组后能继续因式分解，切勿盲目分组，不顾后果.

运用分组分解法分解因式时，经常运用到加法的交换律、结合律及乘法对加法的分配律，在运用交换律、结合律时，要特别注意各项的符号.

④十字相乘法

二次三项式 x^2+ax+b 的因式分解，通常采用十字相乘法，分解成两个一次因式 $(x+m)(x+n)$ 的积的形式，其中 $m\cdot n=b$，$m+n=a$.

某些二次三项式 ax^2+bx+c $(a\neq 0)$，也可以用十字相乘法分解成两个一次因式 $(mx+n)(px+q)$ 的积，其中 $mp=a$，$nq=c$，$mq+np=b$.

把 x^2+px+q 分解因式时：

如果常数项 q 是正数，那么把它分解成两个同号因数，它们的符号与一次项系数 p 的符号相同；

如果常数项 q 是负数，那么把它分解成两个异号因数，其中绝对值较大的因数与一次项系数 p 的符号相同.

对于分解的两个因式，还要看它们的和是不是等于一次项的系数 p.

⑤配方法

对于某些二次三项式 ax^2+bx+c，除了可以用形如 $x^2+(p+q)x+pq=(x+p)(x+q)$ 分解因式外，还可以用"配方法"来分解，其中常用到完全平方公式和平方差公式以及添项、拆项的技巧，其配方的公式为：$ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$.

例如：分解因式：

1) $x^2+6x-16$

解：原式 $= x^2+6x+9-9-16$

$= (x+3)^2-25$

$= (x+3+5)(x+3-5)$

$= (x+8)(x-2)$

2) $4x^2-4x-3$

解：原式 $=4x^2-4x+1-3-1$

$= (2x-1)^2-4$

$= (2x-1+2)(2x-1-2)$

$= (2x+1)(2x-3)$

由上例可知，配方法的关键是利用完全平方公式，配出一个完全平方，再利用平方差公式分解因式.

因式分解是一个重要的恒等变形，除了以上几个基本方法外，有时还会用到换元法、双十字相乘法、待定系数法等，为了提高同学们的解题能力，本书在后面例题、练习中再作介绍.

多项式因式分解的一般步骤：

①如果多项式的各项有公因式，那么先提公因式；

②如果各项没有公因式，那么可以尝试运用公式来分解；

③如果用上述方法不能分解，那么可以尝试用分组；

④如果用上述方法不能分解，那么可以用形 $x^2+(p+q)x+pq=(x+p)(x+q)$ 方法.

分解因式，必须进行到每一个多项式因式在指定范围内都不能再分解为止.

因式分解没有一个统一的方法，解题时注意根据题目的特点，灵活运用各种方法，提高解题技巧.

2. 思想方法及规律

因式分解与整式乘法互为逆过程，这并非游戏，而是认识的提高和数学发展的需要. 如同算术中学了乘法后又学因数分解，乃是有利于求最大公约数、最小公倍数，有利于分数的约分、通

分一样，因式分解是为学习分式的有关知识及其运算、解方程、将三角函数式进行恒等变形等方面打下基础的，这是一种辩证思维过程，是事物发展的一种规律．换元的思想（即把一个多项式看成一项或一个字母）是数学中最有用的知识之一，在本章中体现很多，目的是简化分解过程，其运算过程也是化复杂问题为某种数学模型的一种能力．分组分解法是培养人们的科学地组合事物的一种能力，其方法灵活又有预测性，从而锻炼人们的思维．

【重点难点】

重点：掌握因式分解的四个基本方法，即提公因式法、运用公式法、分组分解法和十字相乘法．

难点：分组分解法和各种方法的综合运用．

【典型例题解析】

例1 把下列各式分解因式

(1) $x(x-y-z)+y(z-x+y)-z(y-x+z)$

(2) $(a-b+c)^{2n+1}-(b-c-a)^{2n}$（$n$ 是自然数）

■答案与题解

□**命题目的**：掌握利用提取公因式的方法分解因式．

□**解题关键**：一般地说公因式的系数是各项系数（整数时）取最大公约数，同时把各项中相同字母的最低次幂的积也取做公因式系数以外的部分．多项式中的某些项，看似没有公因式，其实变一下符号，或利用互为相反数的偶次方相等，就出现了公因式，所以解题时应善于观察，注意变形。

解：(1) 原式 $=x(x-y-z)-y(x-y-z)+z(x-y-z)=(x-y-z)(x-y+z)$

(2) 原式 $=(a-b+c)^{2n+1}-(a-b+c)^{2n}=(a-b+c)^{2n}(a-b+c-1)$

□**错解剖析**：常出现：$(a-b+c)^{2n+1}-(b-c-a)^{2n}=(a-b+c)^{2n+1}+(a-b+c)^{2n}$

$=(a-b+c)^{2n}(a-b+c+1)$ 其原因为没

有掌握互为相反数的偶次方相等.

例2 改错并写出错误原因

(1) $x^2y(x+y)-5xy(x+y)$

$=x(x+y)(xy-5y)$

(2) $2x^3+4x^2+8x+2=2(x^3+2x^2+4x)$

(3) $-ax^2+bx-cx=x(-ax+b-c)$

(4) $x(x-y)-y(y-x)=(x-y)^2$

解: (1) 原式 $=xy(x+y)(x-5)$ 公因式还有 y.

(2) 原式 $=2(x^3+4x^2+4x+1)$ 漏掉"1".

(3) 原式 $=-x(ax-b+c)$ 第一项的"$-$"号没提出来，应提出来，使首项符号为"$+$".

(4) 原式 $=x(x-y)+y(x-y)$

$=(x-y)(x+y)$ 符号错.

□**错解剖析**：运用提公因式法需注意：①公因式要都提出来；②不要漏掉"1"；③提取公因式后第一项要取正号；④注意符号.

例3 n 为正整数，证明 n^2+n 为偶数.

■答案与题解

□**命题目的**：要证明 n^2+n 为偶数，必须证明 n^2+n 分解为几个因式积的时候，至少有一个因式是偶数.

解: $n^2+n=n(n+1)$.

因为 n 为正整数，所以 n、$n+1$ 是两个连续正整数，所以 n 与 $n+1$ 中必有一个为偶数，所以 n^2+n 为偶数.

例4 把下列各式分解因式

(1) $(7a^2+2b^2)^2-(2a^2+7b^2)^2$

(2) $-\frac{1}{2}n^2+2m^2$

(3) $-(x+2y)^2+4(x+2y)-4$

(4) $x^{6n+2}+2x^{3n+2}+x^2$

(5) $m^4a^{n-1}-a^{n+1}$

(6) $9(x+1)^2(x-1)^2+6(x^2-1)+1$

■答案与题解

□**命题目的**：熟悉因式分解的方法.

□**解题关键**：①运用公式法分解因式之前，首先应考虑提取公因式，有时还需提取数字系数为公因数，如（2）题中提取 $-\frac{1}{2}$，便可用平方差公式分解. ②当一个二项式既能用平方差公式，又能用立方差公式时，一般先用平方差公式较简单、如（5）题即是. ③题中各式若没按公式顺序或符号与公式相反时，应交换各式的位置，使之符合公式，再运用公式法. ④公式中的字母 a、b 若以较复杂的单项式或多项式出现时，应把它看成一个整体，代替公式中的字母，然后再展开.

解：(1) 原式 $=[(7a^2+2b^2)+(2a^2+7b^2)][(7a^2+2b^2)-(2a^2+7b^2)]$

$=(9a^2+9b^2)(5a^2-5b^2)$

$=45(a^2+b^2)(a^2-b^2)$

$=45(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$

(2) 原式 $=-\frac{1}{2}(n^2-4m^2)$

$=-\frac{1}{2}(n+2m)(n-2m)$

(3) 原式 $=-[(x+2y)^2-2\cdot 2(x+2y)+2^2]$

$=-(x+2y-2)^2$

(4) 原式 $=x^2(x^{6n}+2x^{3n}+1)$

$=x^2[(x^{3n})^2+2x^{3n}+1]$

$=x^2(x^{3n}+1)^2$

(5) 原式 $=a^{n-1}(m^4-a^2)$

$=a^{n-1}(m^2-a)(m^2+a)$

(6) 原式 $=[3(x+1)(x-1)]^2-2\cdot 3(x+1)(x-1)+1$

$=[3(x+1)(x-1)-1]^2$

$=(3x^2-3-1)^2$

$=(3x^2-4)^2$

□**错解剖析**：真正理解因式分解的定义必须重点放在理解因式分解结果的形式上，左边应是多项式，右边化为几个整式的积的形式，特别是将公因式提出后，补因式中即括号中还有括号时要去括号进行整理如 (8) 题，合并同类项进行化简，如再能分解，则继续分解，否则不是因式分解的最后结果.

例 5 求证 $1997\times1998\times1999\times2000+1$ 是某个整数的平方.

■答案与题解

□**命题目的**：掌握例 5 题型的解题方法.

□**解题关键**：本题数值较大，不易直接计算，采用“换元法”把 1998 设为 n，证明就简单了.

证明：设 $n=1998$，则

原式 $=(n-1)\cdot n(n+1)(n+2)+1$

$=[(n-1)(n+2)][(n(n+1)]+1$

$=[(n^2+n)-2](n^2+n)+1$

$=(n^2+n)^2-2(n^2+n)+1$

$=(n^2+n-1)^2$

$\because n=1998$

$\therefore n^2+n+1$ 是一个整数,

$\therefore$ 原式是某个整数的平方.

例 6 把下列各式分解因式

(1) $3a^2+bc-3ac-ab$

(2) $a^2+2ab+b^2-c^2$

(3) $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

(4) a^5+a+1

(5) $mn(x^2-y^2)-xy(m^2-n^2)$

■答案与题解

□**命题目的**：掌握分组分解法分解因式的各种情况.

□**解题关键**：项数多于三项的多项式因式分解一般采用分组分解法，此例题中的5个小题都用此法解，分组时①注意符号法则，如(1)、(3)题；②有的题不能直接分组可拆项或添项后再分组，如第(5)题；③分组的关键是分组后每组都能分解，且各组间有公因式，或分组后可用公式法或十字相乘法继续分解.

解：(1) 原式 $=(3a^2-3ac)-(ab-bc)$

$=3a(a-c)-b(a-c)$

$=(a-c)(3a-b)$

(2) 原式 $=(a+b)^2-c^2=(a+b+c)(a+b-c)$

(3) 原式 $=(a^2+2ab+b^2)+(2bc+2ca)+c^2$

$=(a+b)^2+2c(a+b)+c^2$

$=(a+b+c)^2$

(4) 原式 $=a^5-a^2+a^2+a+1$

$=(a^5-a^2)+(a^2+a+1)$

$=a^2(a^3-1)+(a^2+a+1)$

$=a^2(a-1)(a^2+a+1)+(a^2+a+1)$

$=(a^2+a+1)(a^3-a^2+1)$

(5) 原式 $=mnx^2-mny^2-m^2xy+n^2xy$

$=(mnx^2+n^2xy)-(mny^2+m^2xy)$

$=nx(mx+ny)-my(ny+mx)$

$=(mx+ny)(nx-my)$

(或第一项和第三项结合，余下两项结合)