符　号　表

$X, Y\cdots\cdots$	随机变量
$x, y\cdots\cdots$	随机变量的观测值
f	事件出现的频率
p	事件出现的概率
$f(x)$	随机变量X在x处的概率密度函数
$F(x)$	随机变量X在x处的分布函数
$f(x, y)$	二维随机变量（X, Y）在（x, y）处的联合概率密度函数
$F(x, y)$	二维随机变量（X, Y）在（x, y）处的联合分布函数
$f_X(x)$	二维随机变量（X, Y）关于X的边缘概率密度函数
$F_X(x)$	二维随机变量（X, Y）关于X的边缘分布函数
$E(X^k)$, μ_k	随机变量X的k阶原点矩
$E(X)$, μ_X, μ	随机变量X的期望（均值）
γ_k	随机变量X的k阶中心矩
$D(X)$, σ_X^2, σ^2	随机变量X的方差
σ_X, σ	随机变量X的标准差
C_V	随机变量X的变差系数
$Ccv(X, Y)$	随机变量（X, Y）的协方差或（1, 1）阶联合中心矩
x_i	X按大小排列的第i个观测值
$\overline{x}$	样本均值
n	样本大小
s^2	样本方差
s	样本标准差
Cv_s	样本变差系数
r	样本相关系数或经验相关系数
$\hat{\mu}$、$\hat{\sigma}$、$\cdots\cdots$	随机变量期望、标准差、……的估计值
H_0	假设
α	显著性水平
$1-\alpha$	置信系数，置信水平
u	遵从标准正态分布的随机变量
$\Phi(u)$	标准正态分布函数值
$u_{\frac{\alpha}{2}}$	上侧概率为$\frac{\alpha}{2}$的标准正态分布的分位数
$t_{(\nu)}$	遵从自由度为ν的t分布的随机变量
$t_{(\nu, \frac{\alpha}{2})}$	自由度为ν和上侧概率为$\frac{\alpha}{2}$的t分布的分位数，或简写为$t_{\frac{\alpha}{2}}$

$t_p(\nu)$	自由度为ν和下侧概率为p的t分布的分位数
$\chi^2(\nu)$	遵从自由度为ν的χ^2分布的随机变量
$\chi^2_{(\nu,\frac{\alpha}{2})}$	自由度为ν和上侧概率为$\frac{\alpha}{2}$的χ^2分布的分位数，或简写为$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$
$\chi^2_p(\nu)$	自由度为ν和下侧概率为p的χ^2分布的分位数
$F(\nu_1, \nu_2)$	遵从自由度为(ν_1, ν_2)的F分布的随机变量
$F(\nu_1, \nu_2, \frac{\alpha}{2})$	自由度为(ν_1, ν_2)和上侧概率为$\frac{\alpha}{2}$的F分布的分位数，或简写为$F_{\frac{\alpha}{2}}$
$F_p(\nu_1, \nu_2)$	自由度为(ν_1, ν_2)和下侧概率为p的F分布的分位数

前　　言

本书是根据高电压技术专业教材编审会议的意见编写的。

全书分七章。第一章、第二章扼要地介绍了有关概率论、数理统计的基础知识；第三章介绍对试验数据进行误差分析的方法；第四章至第六章对操作过电压及有关数据（例如间隙在操作冲击下放电的伏秒特性）、对绝缘放电电压的数据及自恢复绝缘配合的统计方法等，进行了较为全面的分析；第七章结合实际应用叙述蒙特卡洛法及其在高电压技术中的应用。

本书由清华大学、西安交通大学合编，是在总结两校多年来教授“数理统计在高电压技术中的应用”选修课经验的基础上，考虑了高压工作者的实际需要而编写的。

本书编写分工如下：西安交通大学王秉钧编写第一、二、四、六章；清华大学王昌长编写第三、七章及附录，谈克雄编写第五章。全书由王秉钧进行统稿。

上海交通大学雷新陶教授对全书进行了认真细致的审查，提出了许多宝贵意见，编者在此深表谢意。另外，本书中的某些例子系引自一些单位的研究资料，编者除在正文中注明其来源外，在此对这些单位也谨表谢意。

限于水平，书中不妥和错误之处可能不少，恳切希望读者不吝赐教，以便改正。

编　者

1989年12月

目　录

第一章 概 率 论 基 础

第一节 概　　述

在我们分析、研究的现象或事件中，既有实现了一定的条件组（即进行了一次试验）时必然发生的现象、事件（用U表示），或必不可能发生的现象、事件（用V表示），还有既可能发生、也可能不发生的（亦即试验结果无法预先确定）随机现象、随机事件（用A、B、C……等表示）。用来表明随机现象、随机事件结果的数量称为随机变量。

例如，在给定的电力系统中，进行同一类型的操作，在给定点出现的操作过电压值是随机变量。又如对给定的绝缘结构，连续施加一定幅值、波形的操作冲击电压时，绝缘放电的次数、频率（放电次数与加压次数之比）也是随机变量。

某一类随机现象的个别试验结果，粗略地看，似无确定的规律，但在同样条件组下，进行大量的、相互独立的重复性试验之后，就可以找出其统计规律性。

概率论就是研究当试验数极多时某一类随机现象所遵从的统计规律的数学。

对某一事件出现的可能性，只能用试验数极多时该事件出现频率的稳定值，即其出现的概率来表示。显然

$$P(U)=1,\ P(V)=0$$

$$0<P(A)<1 \tag{1-1-1}$$

即必然事件U出现概率为1，必不可能事件V出现概率为0，随机事件A出现概率在1与0之间。

随机变量按其取值可分为离散型和连续型两大类。属于前者的有：连续加冲击电压时，绝缘的放电次数；雷电日（或小时）数；线路、变电站内某一类型的年操作数等。属于后者的有：雷电流的幅值I（kA）、陡度I'（kA/μs）、操作过电压的绝对值、倍数等。

第二节 事件的相互关系，概率运算的规则

分析一复杂事件时，首先应注意其中各个事件的相互关系。下面仅以两个事件A、B为例作说明，但所得结果可推广至多个事件的情况。为了便于分析研究，将随机试验所有基本事件组成的集合称为试验的“样本空间”，记为S（用图1-1中单位面积的正方形表示）。S中的样本点（元素）为所分析的基本事件A，B，……。用S_A、S_B的大小表明$P(A)$、$P(B)$；用图形A、B的相互关系，表明事件A、B的相互关系。

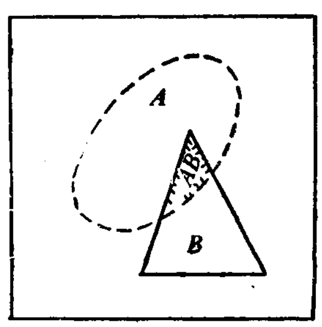

图 1-1

一、事件的相互关系

（1）事件A、B同时发生所构成的事件，称为它们的积（或交），记为AB或$A\cap B$。

（2）事件A、B至少发生一个（即或A，或B，或AB）所构成的事件，称为它们的和（或并），记为$A+B$或$A\cup B$。

（3）如事件A发生时，事件B必定发生，则称事件A招致B(或事件B包含事件A)，记为$A\subset B$。如同时有$A\subset B$及$B\subset A$，则称事件等价或等效，记为$A=B$。

（4）$\overline{A}$（读作负A），该事件只有当A不出现时才能出现。

（5）如事件A、B中的一个发生时，另一个即不能发生，则称两事件互不相容或互斥，亦即$AB=V$。

如事件A、B互不相容，但一次试验中，其中的一个必然出现，则称它们相互对立，亦即此时有$AB=V$及$A+B=U$。称满足此两条件的A、B组成样本空间。例如A、$\overline{A}$相互对立，A、$\overline{A}$组成样本空间。

二、概率运算的规则

（一）条件概率、事件相互独立的概念

如事件A、B中的一个出现与否对另一事件出现的概率无影响，则称它们是相互独立的，反之、则为相依的。例如，当事件B（或A）对A（或B）为相依，通常要考虑在一事件已出现的情况下，对其相依的另一事件出现的条件概率$P(B/A)$或$P(A/B)$。以图1-1所示情况为例，有

$$\left.\begin{aligned}P(B/A)&=\frac{S_{AB}}{S_A}=\frac{P(AB)}{P(A)}\\ P(A/B)&=\frac{S_{AB}}{S_B}=\frac{P(AB)}{P(B)}\end{aligned}\right\}\tag{1-2-1}$$

当事件A、B相互独立，例如对同一空气间隙，在相同条件下，进行两次相互独立的试验，用A、$\overline{A}$分别表示间隙在第一次试验时放电、耐受，B表示间隙在第二次试验时放电，根据规定，此时有

$$P(B/A)=P(B/\overline{A})=P(B)\tag{1-2-2}$$

（二）概率运算规则

用概率乘法规则来决定两事件同时出现的概率，由（1-2-1）式得

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B)\tag{1-2-3}$$

用概率加法规则来决定两事件之和的概率，由图1-1可见

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)\tag{1-2-4}$$

如A、B互不相容时，因为$AB=V$，$P(AB)=0$，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B)\tag{1-2-5}$$

如A、B相互对立，则因$A+B=U$，$AB=V$，由（1-2-4）式得

$$P(A)=1-P(B)\tag{1-2-6}$$

由（1-2-6）式可见，如直接计算事件A出现的概率$P(A)$过繁时，可先计算与其对立的事件B出现的概率$P(B)$，由（1-2-6）式解得$P(A)$。

第三节　随机变量的分布规律

随机变量除按其类型分为离散、连续型外，有时还需要根据表明随机事件数量的“维数”（即个数）区分为一维、二维、……随机变量。例如，为计算雷击点的过电压的分布规律，就需要知道二维的雷电参数（幅值、波前部分的陡度）的规律；又例如，间隙的放电电压、放电时间亦是二维随机变量等。本节中说明有关它们的概率分布规律的一些基本概念。

这些基本概念及其相应的表达式，对离散、连续型随机变量而言，并无本质的不同。因此，下面只对连续型随机变量进行讨论。

一、一维连续型随机变量的分布规律

对一维的连续型随机变量X，其分布规律可由下述形式之一来确定，即：

（1）微分的分布规律，即X在x点的概率密度函数值$f_X(x)$，定义为

$$f_X(x)dx = P(x < X \leqslant x+dx) \tag{1-3-1}$$

（2）积分的分布规律$F_X(x)$定义为

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx \tag{1-3-2}$$

$F_X(x)$又称为X的分布函数。由（1-3-1）、（1-3-2）式得

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \tag{1-3-3}$$

考虑到$X \leqslant x$与$X > x$是相互对立事件，由（1-2-6）式可知

$$Q_X(x) = P(X > x) = 1 - F_X(x) \tag{1-3-4}$$

有时也分别称$F_X(x)$，$Q_X(x)$为X的下侧与上侧概率。

当不会引起误解时，为简化，以上诸式中的$f_X(x)$、$F_X(x)$、$Q_X(x)$也可写为$f(x)$、$F(X)$、$Q(X)$。

例 1-1　根据我国过电压保护规程，雷电流I_{ld}超过I的概率为：$P(I_{ld} > I) = 10^{-\frac{I}{108}}$（式中$I$的单位用kA）。试求其分布函数与概率密度函数。

解：由（1-3-4）、（1-3-3）式得

$$F(I) = 1 - 10^{-\frac{I}{108}}$$

$$f(I) = 0.02132 \times 10^{-\frac{I}{108}}$$

二、二维连续型随机变量的分布规律

多维连续型随机变量的主要特点与二维的无本质差别，故只讨论二维时的情况。

参看图1-2，二维随机变量（X，Y）落入座标为（x，y）、面积为$dx \cdot dy$内的概率为

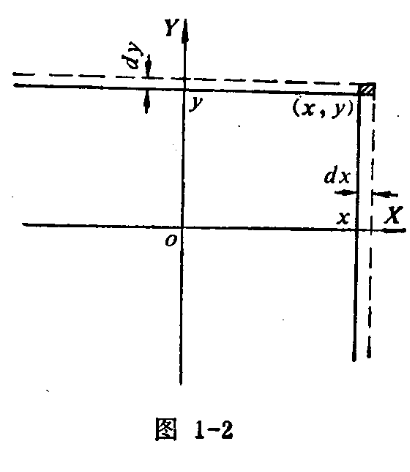

图 1-2

$$f_{XY}(x,y)dxdy=P(x<X\leqslant x+dx,y<Y\leqslant y+dy) \tag{1-3-5}$$

而(X,Y)落入图1-2中两条实线限定面积内的概率为

$$F_{XY}(x,y)=P(X\leqslant x,Y\leqslant y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f_{XY}(x,y)dxdy \tag{1-3-6}$$

由（1-3-5）、（1-3-6）式得

$$f_{XY}(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_{XY}(x,y) \tag{1-3-7}$$

$f_{XY}(x,y)$、$F_{XY}(x,y)$分别称为二维随机变量(X,Y)的联合概率密度函数与分布函数。

为了讨论问题的需要，必须研究或X、或Y（此时Y或X分别取全部可能值）的分布规律，例如X落于座标为x的垂直线以左的概率为

$$F_X(x)=P(X\leqslant x,Y<\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f_{XY}(x,y)\,dy\right]dx \tag{1-3-8}$$

由（1-3-8）式得

$$f_X(x)=\frac{dF_X(x)}{dx}=\int_{-\infty}^{\infty}f_{XY}(x,y)dy \tag{1-3-9}$$

$f_X(x)$、$F_X(x)$分别为二维随机变量(X,Y)关于X的边缘概率密度函数与分布函数。

类似地，关于Y有

$$F_Y(y)=P(X<\infty,Y\leqslant y)=\int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f_{XY}(x,y)dx\right]dy \tag{1-3-10}$$

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\int_{-\infty}^{\infty}f_{XY}(x,y)dx \tag{1-3-11}$$

此外，有时还需要分析二维随机变量(X,Y)，当$X=x$时Y的条件分布规律，或$Y=y$时X的条件分布规律。以前者为例，由（1-2-3），（1-3-1）、（1-3-7）式得

$$f_{XY}(x,y)dxdy=f_X(x)dx\cdot f_Y(y/x)dy$$

由上式及（1-3-9）式，$X=x$时，Y的条件概率密度函数为

$$f_Y(y/x)=\frac{f_{XY}(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty}f_{XY}(x,y)\,dy} \tag{1-3-12}$$

类似地，$Y=y$时，X的条件概率密度函数为

$$f_X(x/y)=\frac{f_{XY}(x,\ y)}{\int_{-\infty}^{\infty}f_{XY}(x,\ y)dx} \tag{1-3-13}$$

参看（1-2-2）式，X、Y相互独立的条件是

$$\left.\begin{aligned}f_X(x/y)&=f_X(x)\\ f_Y(y/x)&=f_Y(y)\\ f_{XY}(x,y)&=f_X(x)\cdot f_Y(y)\end{aligned}\right\} \tag{1-3-14}$$

三、随机变量的分布函数、概率密度函数的基本性质

一维连续型随机变量X的分布函数、概率密度函数的基本性质是

$$F_X(-\infty)=P(X<-\infty)=P(V)=0$$

$$F_X(+\infty)=P(X<+\infty)=P(U)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx=1$$

当$x_2>x_1$时，有

$$P(x_1<X\leqslant x_2)=F_X(x_2)-F_X(x_1)\geqslant 0$$

亦即$F_X(x)$对自变数x非降，由此可知

$$f_X(x)\geqslant 0$$

类似地，对二维连续型的随机变量（X,Y）的$F_{XY}(x,y)$、$f_{XY}(x,y)$有

$$F_{XY}(-\infty,-\infty)=0,\ F_{XY}(-\infty,y)=0,\ F_{XY}(x,-\infty)=0$$

$$F_{XY}(+\infty,+\infty)=P(X<\infty,Y<\infty)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dxdy=1$$

$$f_{XY}(x,y)\geqslant 0$$

第四节　随机变量的数字特征

为便于理解、处理所研究的问题，对随机变量X可算得它的一些有代表性的特征量（数字特征）。本节介绍它们的计算方法、基本性质。

一、矩、几个常用的特征量

对离散型随机变量X，设已知其全部可能的值及对应的概率，令$P(X=x_i)=p_i$，它的k阶原点矩μ_k定义为

$$\mu_k=E(X^k)=\sum_i x_i^k p_i \tag{1-4-1}$$

当$k=1$时，算得的μ_1为X的分布中心，或X的期望。在讨论多个随机变量时，为便于区分，改记X、Y的一阶原点矩为μ_X、μ_Y。

X的k阶中心矩ν_k则定义为

$$\nu_k=E[(X-\mu_X)^k]=\sum_i (x_i-\mu_X)^k p_i \tag{1-4-2}$$

对连续型随机变量X，设已知其概率密度函数$f(x)$，参看（1-3-1）式及上述的定义，其μ_k、ν_k分别为

$$\mu_k=E(X^k)=\int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx \tag{1-4-3}$$

$$\nu_k=E[(X-\mu_X)^k]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)^k f(x)dx \tag{1-4-4}$$

由于（1-4-1）与（1-4-3）式、（1-4-2）与（1-4-4）式是相似的，以下只对连续型随机

变量作进一步的讨论。

称X的二阶中心矩ν_2为X的方差，记为$D(X)$，用以表明随机变量对其分布中心的离散程度。在（1-4-4）式中令$k=2$，考虑到（1-4-3）式及概率密度函数$f(x)$的性质，可得

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)^2f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx-\mu_X^2$$

$$=E(x^2)-[E(x)]^2 \tag{1-4-5}$$

对一些有单位的随机变量而言，由于$D(X)$与X的单位不一致，为表明随机变量对其分布中心的离散程度，常用的是

$$\left.\begin{array}{ll}X\text{的标准差} & \sigma_X=+\sqrt{D(X)}=\sigma \\ X\text{的变差系数} & C_{v_X}=\dfrac{\sigma_X}{\mu_X}\end{array}\right\} \tag{1-4-6}$$

由于$(x-\mu_X)^2$、$f(x)$均非负及（1-4-6）式中的规定，故总有$D(x)>0$，$\sigma>0$。

一些工程资料中，用符号σ_X表示X的变差系数，称为“相对标准差”，例如合闸过电压的相对标准差为10%等。

随机变量X、(X,Y)的函数$\varphi(X)$、$\varphi(X,Y)$的期望，由（1-4-3）式可推得

$$E[\varphi(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)dx \tag{1-4-7}$$

$$E[\varphi(X,Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,y)f_{XY}(x,y)dxdy \tag{1-4-8}$$

当$\varphi(X,Y)=X\pm Y$时，由（1-4-8）及（1-3-9）、（1-3-11）式可得

$$E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)=\mu_X\pm\mu_Y \tag{1-4-9}$$

（1-4-9）式表明，无论X、Y是相互独立还是相依，它们的和的期望总是等于各自期望的和。不难推得，对任意多个随机变量的情形，仍有同样的结论。

下面讨论随机变量X、Y积的期望，即$\varphi(X,Y)=XY$的情形。此时需先定义X、Y的协方差或（1,1）阶联合中心矩$Cov(X,Y)$

$$Cov(X,Y)=E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]=E(XY)-\mu_X\mu_Y \tag{1-4-10}$$

由（1-4-10）式可得

$$E(XY)=\mu_X\mu_Y+Cov(X,Y) \tag{1-4-11}$$

亦即随机变量积的期望为期望的积与协方差之和。

如X、Y相互独立，由（1-3-14）式可知

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf_{XY}(x,y)dxdy=\left[\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty}yf_Y(y)dy\right]$$

$$=E(X)\cdot E(Y)=\mu_X\mu_Y \tag{1-4-12}$$

将（1-4-12）与（1-4-11）式对比可见，当X、Y相互独立时必然有$Cov(X,Y)=0$；相反，当X、Y相依时，$Cov(X,Y)\neq 0$。

下面讨论随机变量X、(X,Y)的函数$\varphi(X)$、$\varphi(X,Y)$的方差。由（1-4-4）式得

$$D[\varphi(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}\{\varphi(x)-E[\varphi(X)]\}^2 f(x)dx \tag{1-4-13}$$

$$D[\varphi(X,Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{\varphi(x,y)-E[\varphi(X,Y)]\}^2 f_{XY}(x,y)dxdy \tag{1-4-14}$$

设a、b为任意常数，当$\varphi(X)=aX+b$时，由（1-4-13）式有

$$D(aX+b)=a^2\sigma_X^2 \tag{1-4-15}$$

$$\sigma_{(aX+b)}=|a|\,\sigma_X \tag{1-4-16}$$

设a、b为任意常数，当$\varphi(X,Y)=aX+bY$时，由（1-4-10）、（1-4-14）式得

$$D(aX+bY)=a^2\sigma_X^2+b^2\sigma_Y^2+2abCov(X,Y) \tag{1-4-17}$$

当$\varphi(X,Y)=XY$，且X、Y相互独立时，由（1-4-12）、（1-4-14）式得

$$\begin{aligned}D[XY]&=E[X^2]E[Y^2]-\mu_X^2\mu_Y^2=[\sigma_X^2+\mu_X^2][\sigma_Y^2+\mu_Y^2]-\mu_X^2\mu_Y^2\\&=\sigma_X^2\sigma_Y^2+\mu_X^2\sigma_Y^2+\mu_Y^2\sigma_X^2\end{aligned} \tag{1-4-18}$$

当X、Y相依时，$D[XY]$无简单的表达式。

二、随机变量的标准化、相关系数及其性质

以随机变量X为例，标准化后的X，以X^*表示，$X^*=\dfrac{X-\mu_X}{\sigma_X}$。由(1-4-7)、(1-4-15)式不难看到：$E[X^*]=0$，$D(X^*)=\sigma_{X^*}^2=1$。同样，令$Y^*=\dfrac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}$，则有$E(Y^*)=0$，$D(Y^*)=\sigma_{Y^*}^2=1$。

令X^*、Y^*的协方差$Cov(X^*,Y^*)$为X、Y两随机变量间的相关系数ρ_{XY}，参看(1-4-10)式，有

$$\rho_{XY}=Cov[X^*,Y^*]=\frac{1}{\sigma_X\sigma_Y}E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]=\frac{1}{\sigma_X\sigma_Y}Cov(X,Y)$$

故
$$Cov(X,Y)=\rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y \tag{1-4-19}$$

如上述，当X、Y相互独立（不相关）时，必有$Cov(X,Y)=0$，而σ_X、σ_Y不小于零，故此时只有$\rho_{XY}=0$。但$\rho_{XY}=0$并不一定表明X、Y是相互独立的。

下面讨论ρ_{XY}值的范围问题。参看（1-4-17）式，令$a=1$，$b=\pm1$，则有

$$D(X^*\pm Y^*)=2(1\pm\rho_{XY})$$

因为$D(X^*\pm Y^*)\geqslant0$，故ρ_{XY}的取值范围为

$$-1\leqslant\rho_{XY}\leqslant+1 \tag{1-4-20}$$

可以证明，只有当$Y=aX+b$（a、b任意常数），即Y与X有确定的线性关系时，才有$|\rho_{XY}|=1$，即当$a>0$时，$\rho_{XY}=1$；$a<0$，$\rho_{XY}=-1$。

第五节　随机变量函数的分布规律

在本节中，对一维随机变量X，我们讨论如何根据已知的$F_X(x)$、$f_X(x)$决定其函数Y

的分布规律$F_Y(y)$、$f_Y(y)$。对二维随机变量X、Y，分别令$Z=X\pm Y$、XY、$\frac{X}{Y}$，则讨论如何根据已知的$f_{XY}(x,y)$决定Z的分布规律$f_Z(z)$。此外，还将讨论X、Y进行函数变换后，即令$X=\varphi_1(w,z)$、$Y=\varphi_2(w,z)$时的联合概率密度函数$f_{WZ}(w,z)$等问题。

一、$Y=\varphi(x)$ 由已知的$f_X(x)$求$f_Y(y)$

（一）X对Y的反函数、$X=\psi(Y)$为单值时的情况

此时Y或为X的单调上升函数（图1-3），或为X的单调下降函数（图1-4）。

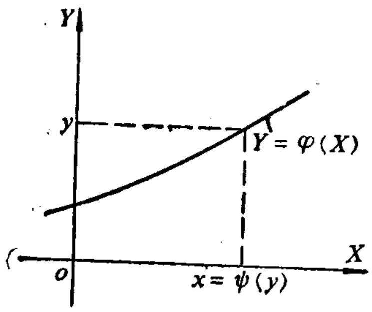

图 1-3

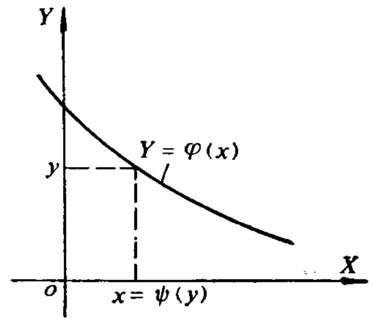

图 1-4

参看图1-3，当Y为X的单调上升函数时，有

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(X\leqslant x)=F_X(x)=\int_{-\infty}^{\psi(y)} f_X(x)dx \tag{1-5-1}$$

$$f_Y(y)=f_X[\psi(y)]\psi'(y) \tag{1-5-2}$$

参看图1-4，当Y为X的单调下降函数时，有

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(X>x)=1-F_X(x)=1-\int_{-\infty}^{\psi(y)} f_X(x)dx \tag{1-5-3}$$

$$f_Y(y)=-f_X[\psi(y)]\psi'(y) \tag{1-5-4}$$

注意到（1-5-2）式中$\psi'(y)=\frac{dx}{dy}$为正，（1-5-4）式中$\psi'(y)=\frac{dx}{dy}$为负，则

$$f_Y(y)=f_X[\psi(y)]\cdot|\psi'(y)| \tag{1-5-5}$$

（二）X对Y的反函数$X=\psi(Y)$为非单值的情况

如图1-5所示，在某一区间内，一个Y值与k个X对应，由（1-5-5）式得

$$f_Y(y)=\sum_{i=1}^{k} f_X[\psi_i(y)]\cdot|\psi_i'(y)| \tag{1-5-6}$$

例 1-2 已知 $f_X(x)=\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right]$，$\mu_X$为任意常数，$\sigma_X$为大于零的常数，令$Y=\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}$，求$f_Y(y)$。

解：此时$X=\mu_X+\sigma_Y Y$，$\psi'(y)=\sigma_X>0$，由（1-5-5）式得

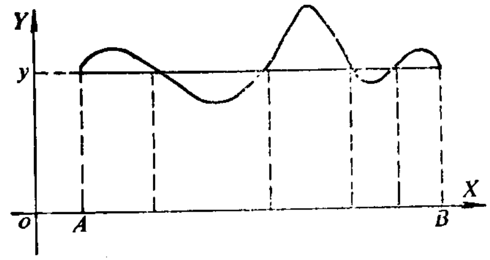

图 1-5

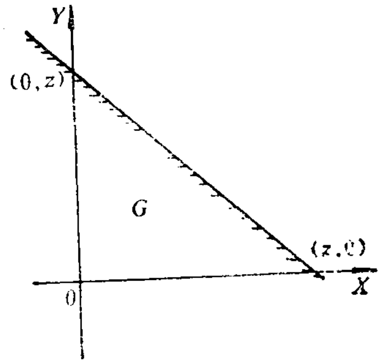

图 1-6

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

例 1-3 已知 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$，设在$-\infty<X<\infty$的区间内，令 $Y=X^2$，求$f_Y(y)$。

解：对$Y>0$，一个Y值与两个X值对应，即$X=\psi_1(y)=+\sqrt{Y}, X=\psi_2(Y)=-\sqrt{Y}$，由（1-5-6）式得

$$\begin{aligned}f_Y(y)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{y}{2}\right)\end{aligned}$$

二、已知$f_{XY}(x,y)$，$X=\varphi_1(w,z)$，$Y=\varphi_2(w,z)$，求$f_{WZ}(w,z)$

令

$$D=\det\begin{vmatrix}\frac{\partial X}{\partial W} & \frac{\partial X}{\partial Z}\\ \frac{\partial Y}{\partial W} & \frac{\partial Y}{\partial Z}\end{vmatrix}$$

则

$$f_{WZ}(w,z)=Df_{XY}(x,y) \tag{1-5-7}$$

（1-5-7）式右端的x、y，根据$\varphi_1(w,z)$、$\varphi_2(w,z)$改用w,z表示。

例 1-4 已知 $f_{XY}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right]$，如$X=r\cos\theta$、$Y=r\sin\theta$，求$f_{r\theta}(r,\theta)$

解：此时$D=r$，由（1-5-7）式得

$$\begin{aligned}f_{r\theta}(r,\theta)&=r\times\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left[-\frac{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}{2\sigma^2}\right]\\&=\frac{r}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)\end{aligned}$$

三、已知$f_{XY}(x,y)$，当$Z=X\pm Y$、XY、$\frac{X}{Y}$时，求$f_Z(z)$

（一）$Z=X+Y$

参看图1-6，在一般情况下Z的分布函数为

$$F_Z(z)=\iint\limits_{(G)} f_{XY}(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-x} f_{XY}(x,y)dy\right]dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f_{XY}(x,y)dx\right]dy \qquad (1\text{-}5\text{-}8)$$

而当X、Y相互独立时，Z的分布函数为

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\left[\int_{-\infty}^{z-x} f_Y(y)dy\right]dx=\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\left[\int_{-\infty}^{z-y} f_X(x)dx\right]dy$$

$$(1\text{-}5\text{-}9)$$

在（1-5-8）式中，对 z 求导，可求得一般情况下的 $f_Z(z)$ 为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,z-x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(z-y,y)dy \qquad (1\text{-}5\text{-}10)$$

而在（1-5-9）式中，对 z 求导，可求得X、Y相互独立时的 $f_Z(z)$ 为

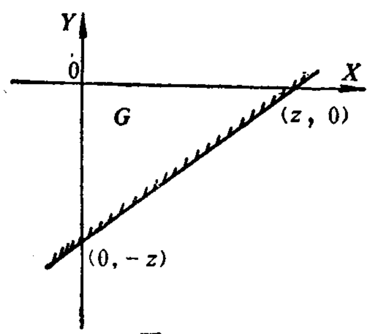

图 1-7

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

$$(1\text{-}5\text{-}11)$$

由（1-5-11）式可见，相互独立的随机变量X、Y之和Z的概率密度函数 $f_Z(z)$ 是 $f_X(x)$ 与 $f_Y(y)$ 的“卷积”。

（二）Z=X−Y

参看图1-7，在一般情况下Z的分布函数为

$$F_Z(z)=\iint\limits_{(G)} f_{XY}(x,\ y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{x-z}^{\infty} f_{XY}(x,\ y)dy\right]dx=1-\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{x-z} f_{XY}(x,\ y)dy\right]dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{y+z} f_{XY}(x,\ y)dx\right]dy \qquad (1\text{-}5\text{-}12)$$

而当X、Y相互独立时，Z的分布函数为

$$F_Z(z)=1-\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\left[\int_{-\infty}^{x-z} f_Y(y)dy\right]dx=\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\left[\int_{-\infty}^{y+z} f_X(x)dx\right]dy$$

$$(1\text{-}5\text{-}13)$$

在（1-5-12）式中对 z 求导，可得一般情况下的 $f_Z(z)$ 为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,x-z)dx=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(y+z,\ y)dy \qquad (1\text{-}5\text{-}14)$$

而在（1-5-13）式中对 z 求导，可得X、Y相互独立时的 $f_Z(z)$ 为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(x-z)dx=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(y+z)f_Y(y)dy \qquad (1\text{-}5\text{-}15)$$

（三）Z＝XY

参看图1-8，在一般情况下Z的分布函数为

$$F_Z(z)=\iint\limits_{(G)}f_{XY}(x,\ y)dxdy=\int_{-\infty}^{0}\left[\int_{z/x}^{\infty}f_{XY}(x,\ y)dy\right]dx+\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{z/x}f_{XY}(x,\ y)dy\right]dx \qquad (1\text{-}5\text{-}16)$$

而当X、Y相互独立时，Z的分布函数为

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{0}f_X(x)\left[\int_{z/x}^{\infty}f_Y(y)dy\right]dx+\int_{0}^{\infty}f_X(x)\left[\int_{-\infty}^{z/x}f_Y(y)dy\right]dx \qquad (1\text{-}5\text{-}17)$$

在（1-5-16）式中对z求导，可得一般情况下的$f_Z(z)$为

$$f_Z(z)=-\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x}f_{XY}\left(x,\ \frac{z}{x}\right)dx+\int_{0}^{\infty}\frac{1}{x}f_{XY}\left(x,\ \frac{z}{x}\right)dx \qquad (1\text{-}5\text{-}18)$$

而在（1-5-17）中对z求导，可得X、Y相互独立时的$f_Z(z)$为

$$f_Z(z)=-\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x}f_X(x)f_Y\left(\frac{z}{x}\right)dx+\int_{0}^{\infty}\frac{1}{x}f_X(x)f_Y\left(\frac{z}{x}\right)dx \qquad (1\text{-}5\text{-}19)$$

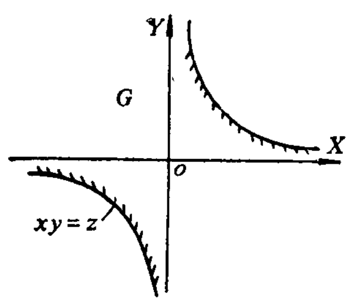

图 1-8

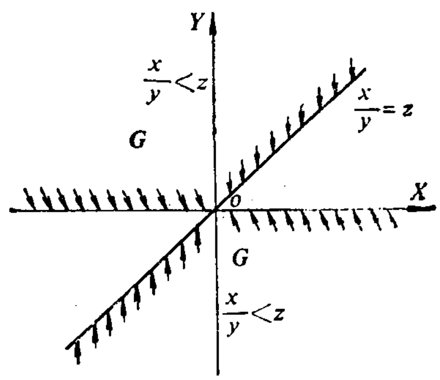

图 1-9

（四）$Z=\frac{X}{Y}$

参看图1-9，在一般情况下Z的分布函数为

$$F_Z(z)=\iint\limits_{(G)}f_{XY}(x,y)dxdy=\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{yz}f_{XY}(x,\ y)dx\right]dy+\int_{-\infty}^{0}\left[\int_{yz}^{\infty}f_{XY}(x,\ y)dx\right]dy$$

（1-5-20）

而当X、Y相互独立时，Z的分布函数为

$$F_Z(z)=\int_{0}^{\infty}f_Y(y)\left[\int_{-\infty}^{yz}f_X(x)dx\right]dy+\int_{-\infty}^{0}f_Y(y)\left[\int_{yz}^{\infty}f_X(x)dx\right]dy \qquad (1\text{-}5\text{-}21)$$

在（1-5-20）式中对z求导，可得一般情况下的$f_Z(z)$为