财经数学基础

CAI JING SHU XUE JI CHU

（上）

齐 毅 郭金锥 主编

中国商业出版社

图书在版编目(CIP)数据

财经数学基础(上册)/齐毅等主编。-北京:中国商业出版社
1998.6
国内贸易部部编高等商科教材
ISBN 7-5044-3688-7

Ⅰ.财… Ⅱ.齐… Ⅲ.①经济数学-高等学校-教材 Ⅳ.F
224.0
中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 13618 号

责任编辑:刘洪涛
特约编辑:陈学庸

中国商业出版社出版发行
(100053 北京广安门内报国寺 1 号)
新华书店总店北京发行所经销
北京北商印刷厂印刷
850×1168 毫米 32 开 13.125 印张 612 千字
1998 年 6 月第 1 版 1998 年 6 月第 1 次印刷
定价:30.00 元(上、下册)
* * * *

编审说明

为适应我国社会主义市场经济的建立与发展和深化高等教育改革的需要，我司委托全国商科学科建设指导组陆续编写了部编系列高等商科教材。

本书是系列高等商科教材之一。现经审定，同意作为普通高等商业、财经院校有关专业的专业课教材或专业基础课教材，也可作为成人高校同层次的函授、自学考试以及在职培训用的教材。

本书在编写和出版发行过程中，曾得到有关院校、部门以及编审者的大力支持，在此谨致谢忱。为了提高本教材的质量，热诚希望读者提出宝贵意见。以便进一步修订和完善。

国内贸易部教育司

1998年3月

前　言

《财经数学基础》，是财经、商业院校经济管理类专业的一门重要基础课程。在我国建立社会主义市场经济的过程中，在当今世界所处知识经济时代，学习财经数学、掌握财经数学的基本内容，是对财经类专业学生的基本要求；它对于提高学生的文化素质，培养分析问题、解决问题的能力，为学习其他课程作好知识上的准备，有着非常重要的作用。

按照国内贸易部教育司和全国商科学科建设指导组关于高等商科教材建设规划，我们部分高等商科院校的教师编写了这套《财经数学基础(上、下册)》。上册编入微积分和概率论，下册编入线性代数和线性规划等基本内容。这套教材，适用于财经类本、专科学生使用，也适于同层次的成人教育、函授教育之用。

这套教材在编写过程中，一、在内容上，我们本着必须、够用的原则，精心安排，结构合理，科学求新。增加了常用经济数学模型，减掉了一些定理的繁琐论证。二、在框架上采用“大节”、“多目”，以便于教者对教材内容的灵活选用。三、在各章后面都有大量的练习题，通过这些习题的演练，有助于学生对基础知识的理解、把握和深化，有助于学生动手能力的培养。

本书由齐毅副教授、张富举副教授、郭金锥副教授任主编，由齐毅、国春光负责全书的结构设计、总纂。具体的编写分工是，上册：郭金锥第1、8章；宿金勇第2、3章；万会芳第4章；宣林第5章；刘芳第6、7章。下册：张富举第1、2章；黄传喜第3、4、5章；齐

毅第6章;国春光第7章;赵景悦第8、9章。

在本书的编写过程中曾参考了国内出版的同类教材、并得到各有关院校和学科组领导在人力和资料上的大力支持与帮助,在此一并致以谢意。本书在使用中,有不妥之处,恳请批评指正。

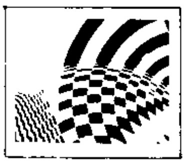
编　者

1998年3月

目 录

微　积　分

第一章　函数、极限与连续



本章作为微积分的基础知识，首先复习函数的有关知识，进而介绍极限和连续等重要概念，着重阐述极限的定义、性质及计算方法，并用极限方法讨论函数的连续性。

§1.1　函数

函数是微积分最重要的概念之一，是微积分学研究的对象，也是研究现代科学技术和经济问题必不可少的基本知识。

一、实数的绝对值

有理数和无理数统称为实数，记为 R。实数的特点是与数轴上的点之间建立一一对应关系，即数轴上的每一点都表示某个实数，而每个实数也都对应数轴上的某个点，因此数轴亦称为实数轴。以后我们将经常用到实数的绝对值、区间与邻域等概念，现扼要介绍如下。

1. 绝对值

一个实数 x 的绝对值，记为 $|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

$|x|$ 的几何意义是：表示数轴上点 x 到原点 0 之间的距离；$|x - x_0|$ 表示数轴上点 x 到定点 x_0 之间的距离。如图 1.1。

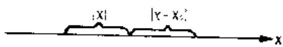


图 1.1

关于实数的绝对值有以下基本性质：

(1) $|x| = \sqrt{x^2} \geqslant 0$；$|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$；

(2) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$；

(3) 若 $a > 0$，则

$|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$，$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$；

$|x| \geqslant a \Leftrightarrow x \leqslant -a$ 或 $x \geqslant a$，$|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ 或 $x > a$.

(4) $|x| \leqslant |y| \Leftrightarrow x^2 \leqslant y^2$

证：由(1) $|x| = \sqrt{x^2}$，$|y| = \sqrt{y^2}$，因为 $|x| \leqslant |y|$，即 $\sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{y^2}$，两边平方立得 $x^2 \leqslant y^2$.

(5) $|xy| = |x| \cdot |y|$，当 $n \in N$ 时，$|x^n| = |x|^n$；当 $y \neq 0$ 时，$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

(6) $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x| + |y|$.

证：由 $-2|x| \cdot |y| \leqslant 2xy \leqslant 2|x| \cdot |y|$，可得

$|x|^2 + |y|^2 - 2|x| \cdot |y| \leqslant x^2 \pm 2xy + y^2 \leqslant |x|^2 + |y|^2 + 2|x| \cdot |y|$，即 $(|x| - |y|)^2 \leqslant (x \pm y)^2 \leqslant (|x| + |y|)^2$

从而有

$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x| + |y|$$

应用数学归纳法，可以证明：有限项代数和的绝对值不大于各项绝对值的和。

2. 区间与邻域

设 a、b 为任意实数，且 $a<b$，

(1)满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的全体实数 x 称为闭区间，记为 $[a, b]$，即

$[a, b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b, x\in R\}$.

(2)满足不等式 $a<x<b$ 的全体实数 x 称为开区间，记为 (a, b)，即

$(a, b)=\{x \mid a<x<b, x\in R\}$.

(3)满足不等式 $a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$ 的全体实数 x 称为半开半闭区间，分别记为 $[a, b)$ 或 $(a, b]$，即

$[a, b)=\{x \mid a\leqslant x<b, x\in R\}$

$(a, b]=\{x \mid a<x\leqslant b, x\in R\}$.

以上四种区间为有限区间，a 和 b 叫做区间的端点，量 $b-a$ 叫做区间的长度。此外，还有以下五种无限区间：

(4) $[a, +\infty)$ 表示不小于 a 的全体实数 x，即

$[a, +\infty)=\{x \mid a\leqslant x<+\infty, x\in R\}$.

(5) $(a, +\infty)$ 表示大于 a 的全体实数 x，即

$(a, +\infty)=\{x \mid a<x<+\infty, x\in R\}$.

(6) $(-\infty, +\infty)$ 表示全体实数 x，即

$(-\infty, +\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty, x\in R\}$.

(7) $(-\infty, b]$ 表示不大于 b 的全体实数 x，即

$(-\infty, b]=\{x \mid -\infty<x\leqslant b, x\in R\}$.

(8) $(-\infty, b)$ 表示小于 b 的全体实数 x，即

$(-\infty, b)=\{x \mid -\infty<x<b, x\in R\}$.

这里符号“$-\infty$”，“$+\infty$”分别读作“负无穷大”、“正无穷大”，它们不是数，仅仅是个记号。

在微积分中经常用到与区间有关的邻域的概念。

点 x_0 的 $\delta(>0)$ 邻域是满足不等式 $|x-x_0|<\delta$ 的全体实数 x. x_0 叫做邻域的中心, δ 叫做邻域的半径。如图 1.2 所示。

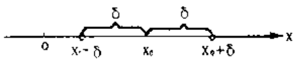


图 1.2

例如, 点 $x_0=3.5$、$\delta=0.01$ 的邻域就是开区间(3.49,3.51)。

而满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的全体实数 x 称为点 x_0 的 δ 空心邻域, 即 $\{x|0<|x-x_0|<\delta, x\in R\}=(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$ 如图 1.3 所示。

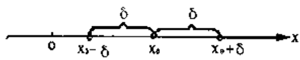


图 1.3

例如, 点 $x_0=3.50$, $\delta=0.01$ 的空心邻域就是两个开区间的并集, 即(3.49,3.50)∪(3.50,3.51)。

二、一元函数的概念

1. 一元函数的定义

定义 1·1 设有两个变量 x, y, D 是一个非空实数集。如果变量 x 在 D 内任取一个确定数值时, 变量 y 按照确定的法则 f 有唯一确定的数值与之对应, 则称对应法则 f 为定义在实数集 D 上的一个函数关系, 简称函数, 记为

$$y=f(x)$$

其中 x 为自变量, y 为因变量, D 为函数的定义域, 记为 $D(f)$。因为在 $y=f(x)$ 中自变量只有一个, 做也称为一元函数。

若 $x_0\in D(f)$, 则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处有定义; 若 $x_0\overline{\in} D(f)$, 则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处没有定义。对于任何一个 $x_0\in D(f)$, 因变量 y 的对应值 y_0 称为 x_0 所对应的函数值, 记为 $y_0=f(x_0)$ 或者 $y|_{x=x_0}=y_0$

函数值的全体称为函数的值域，记为 $Z(f)$或 Z。即：

$Z=Z(f)=\{y\mid y=f(x),x\in D(f)\}$。

定义域和对应法则是判定函数是否相同的两个要素，即当且仅当两个函数的定义域和对应法则都相同时，它们表示同一个函数，且与变量选取无关。

例如，$y=tgx$ 与 $s=tgt$ 表示同一个函数；而 $y=log_2x^2$ 与 $y=2\ log_2x$不是同一个函数，因为它们的定义域不同，前者为 0 以外的一切实数，后者是大于 0 的一切实数。

值得注意的是，值域不是判定两函数是否相同的要素，例如 $y=x$ 与$y=x^3$ 的值域都是$(-\infty,+\infty)$，但它们不是同一个函数，因为对应法则 f 不同。但是，如果两个函数的值域不同，则它们必定不是同一函数。

【例 1】 已知(1) $f(log_5x)=x^2+2x-1$；

(2) $f(\frac{1}{x})=1-f(x)\ log_ax$，求 $f(x)$.

解：(1)设 $log_x5=t$，则 $x=5^t$

因为 $f(t)=5^{2t}+2\cdot5^t-1$

所以 $f(x)=5^{2x}+2\cdot5^x-1$

(2)令$\frac{1}{x}=t$，则 $x=\frac{1}{t}$.

因为 $f(t)=1-f(\frac{1}{t})\ log_a\frac{1}{t}=1+f(\frac{1}{t})\ log_at$

所以 $f(x)=1+f(\frac{1}{x})\ log_ax$

因此 $f(x)=\dfrac{1+log_ax}{1+log_a^2x}$

2. 函数的表示法

表示函数的方法常用的有以下三种：

(1)表格法 就是把自变量的一系列值与对应的函数值列成表格。例如：平方表、立方表，常用对数表、三角函数表等。

(2)图示法　就是在平面坐标系中,将自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则用图象表示出来。图示法的优点是简明直观,缺点是不便于理论上的分析和研究。

(3)公式法(解析法)　就是用一个或几个数学式子来表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则的方法。今后我们所讨论的函数,大多数是用公式法表示的。

用公式法表示函数时,若对于自变量 x 的每一个值,因变量 y 有一个且只有一个值与其对应,则称 y 是 x 的单值函数。例如,指数函数 $y=2^x$,对数函数 $y=lg^x$ 等都是单值函数;若对于自变量 x 的每一个值,因变量 y 有多于一个值与其对应,则称 y 是 x 的多值函数。例如,$y^2=x$ 便是多值函数。

在实际问题中,用公式法表示函数时,会遇到一个函数在其定义域的不同范围内用不同的数学式子来表示,用这种形式表示的函数称为分段函数。现举例如下:

【例 2】　运输部门规定:成年人乘火车携带的行李重量不超过 20 公斤免收行李费,超过 20 公斤的部分按每公斤 a 元收费,试把行李费 y 和行李重量 x 之间的关系用公式法表示出来。

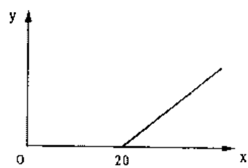


图 1.4

解:依题意　行李 y 和行李重量之间的关系为

$$y=\begin{cases} 0, & 0\leqslant x\leqslant 20, \\ a(x-20), & x>20. \end{cases}$$

这是个分段函数,其中点 $x=20$ 叫做函数的分段点。其图形如图 1.4 所示。

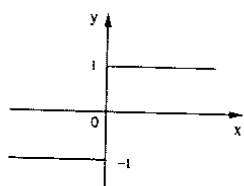


图 1.5

【例 3】　作出符号函数

$$y=sgnx=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$ 的图形。

解：当 $x>0$ 时，$y=1$，其图形是条半直线；当 $x=0$ 时，$y=0$，其图形是坐标原点；当 $y<0$ 时，$y=-1$，其图形也是条半直线。故符号函数的图形如图 1.5。

3. 显函数与隐函数

在用公式法表示函数时，若对应法则 f 是直接用关于 x 的数学式子表示因变量 y 的，即 $y=f(x)$，称为显函数。例如 $y=sin(x+\frac{\pi}{4})$，$y=lgx+2^x$ 等都是显函数；如果对应法则 f 不是通过上述形式，而是用含有变量 x、y 的一个二元方程 $F(x, y)=0$ 或者 $F_1(x, y)=F_2(x, y)$ 给出的，称为隐函数。例如 $x^2+y^2=R^2$、$lg\frac{y}{x}=lg\sqrt{1+x}$ 等都确定隐函数 $y=f(x)$。有的可从方程

$F(x, y)=0$ 或者 $F_1(x, y)=F_2(x, y)$ 中解出隐函数 $y=f(x)$，称为显化，例如 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$2x+y=4$ 等，有的则不然。例如，$3^{x^2}+lg\sqrt{1-x^2-y^2}-5=0$ 等。

4. 函数的几种特性

(1)函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b)（为函数的定义域或其子集）内有定义，如果存在数 m，$M(m<M)$，使得对于任意 $x\in(a, b)$ 所对应的函数值都满足不等式

$m\leqslant f(x)\leqslant M$

则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内为有界函数，m 为其下界，M 为其上界。若这样的数 m 和 M 至少一个不存在，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a, b) 内为无界函数。

显然,区间(a,b)内的有界函数其图形介于两平行直线$y=m$与$y=M$之间;反之(a,b)内的无界函数,其图形可以向上或向下无限延伸。

例如,函数$y=\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内为有界函数,因为存在$m=-1$,$M=1$,使得$-1\leqslant\cos x\leqslant 1$;即$y=\cos x$的图形介于$y=-1$和$y=1$这两条平行直线之间。又如,$y=\log_5 x$在$(0,+\infty)$内为无界函数,因为它的图形可以向上、下无限延伸。

(2)函数的单调性

设函数$y=f(x)$在区间(a,b)内有定义,如果对于区间(a,b)内任意两点x_1,x_2,当$x_1<x_2$时,恒有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\qquad(\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2))$$

则称$y=f(x)$在区间(a,b)内为单调增加(或单调减少)函数。

若当$x_1<x_2$时,恒有

$$f(x_1)<(x_2)\qquad(\text{或 } f(x_1)>f(x_2))$$

则称$y=f(x)$在区间(a,b)内为严格单调增加(或严格单调减少)函数。严格单调增加函数和严格单调减少函数统称为严格单调函数,(a,b)称为函数的单调区间,今后若无特别注明,本书提及的单调函数指严格单调增加函数或严格单调减少函数。

严格单调增加(或减少)函数的图形是随x的增加而单调上升(或下降)的。

【例4】 证明指数函数$y=2^x$在$(-\infty,+\infty)$内是严格单调增加的。

证:任取$x_1<x_2$, x_1, $x_2\in(-\infty,+\infty)$,于是

$$2^{x_2}-2^{x_1}=2^{x_1}(2^{x_2-x_1}-1)$$

因为$2^{x_1}>0$, $x_1<x_2$, $2^{x_2-x_1}>1$

所以$2^{x_1}(2^{x_2-x_1}-1)>0$,

即$2^{x_2}>2^{x_1}$

故 $y=2^x$在$(-\infty,+\infty)$内是严格单调增加的。

(3)函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$的定义域 D 是关于原点对称的，如果对于任何 $x\in D$，恒有：

$$f(-x)=f(x) \quad 或 \quad f(-x)=-f(x)$$

则称 $f(x)$为偶函数(或奇函数)。

偶函数的图形关于纵轴对称；而奇函数的图形关于坐标原点对称。

不难证明：

指数为偶(奇)数的函数 $y=x^n$ 是偶(奇)函数；常量函数 $y=c$ 是偶函数；而 $y=o$ 既是奇函数又是偶函数。

有限个偶(奇)函数的代数和仍为偶(奇)函数；两个偶(奇)函数的积或商仍为偶函数；一个偶函数与一个奇函数的积或商仍为奇函数。

一个非零偶函数与一个非零奇函数的代数和，或一个奇函数与一个非零常数的代数和既不是奇函数，也不是偶函数，这类函数统称非奇非偶函数。

【例 5】　判定下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^x-1}\right)$；

(2) $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|\leqslant 1.5,\\ 0, & |x|>1.5;\end{cases}$

(3)函数 $f(x)$对所有的 x_1，x_2 恒成立

$f(x_1)+f(x_2)=f(x_1+x_2)$.

解：(1)函数 $f(x)=x\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^x-1}\right)$的定义域为 $x\neq 0$ 的一切实数。

因为 $f(-x)=-x\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{-x}-1}\right)=x\left(\frac{2^x}{2^x-1}-\frac{1}{2}\right)$

$$=x\left(\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}\right)=f(x).$$