广播电视大学、职工大学等各类成人高等学校

文科数学

微积分辅导

韩福基 徐信 编

原子能出版社

WEIJIFEN FUDAO

电视大学、职工大学等各类成人
高等学校文科数学

微 积 分 辅 导

韩福基　　徐　信　编

原 子 能 出 版 社

内 容 简 介

本书是电大、职大、函大、刊大等成人高等学校和普通高等院校文科类经济管理、财经各专业学生学习微积分的辅导材料。全书共分九章，每章分基本内容、例题分析、基本要求和基础练习四部分。作者针对成人工作忙、负担重、基础差、时间紧等特点，在基本内容中概述了本章重点内容、基本概念、定义、定理及所用公式；在例题分析部分着重于问题重点与难点剖析，并对解题方法和技巧给予总结；在基本要求里提出了应掌握程度；最后部分是为巩固所学内容而设计的练习题，并附答案。书末附有近年来部分高等院校的试题（附答案）。

本书可供各类成人高等院校和普通高等院校文科类经济管理、财经各专业学生以及自学者、辅导教师使用。

电视大学、职工大学等各类成人高等学校文科数学

微 积 分 辅 导

韩碣基 徐 信编

原子能出版社出版

（北京2108信箱）

外文印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

☆

开本787×1092 1/16·印张20.5·字数508千字

1986年3月北京第一版·1986年3月北京第一次印刷

印数1—50,000·统一书号：7175·729

定价：3.55 元

前　言

由于四化建设的需要，目前大专院校和电大、职大、夜大、函大学习经济管理、财经各专业的人员大量增加，为了给这些专业和其它有关文科类专业的人员，提供一本学习微积分的辅导材料，我们编写了《微积分辅导》一书。

本书共有九章。各章分基本内容、例题分析、基本要求、基础练习四个部分。在基本内容中，概述了学习中应掌握的基本概念，有关的定义、定理和所用的公式。特意指出在理解基本概念时应注意的问题，使读者能正确地掌握概念。在例题分析中，着重于对问题的剖析，并对解题的方法和技巧给予总结，以帮助读者能抓住重点和难点，提高分析问题和解决问题的能力。基本要求部分则根据教学内容，提出了读者应掌握的程度。每章附有的基础练习附答案和自我检查题，供读者练习以巩固所学的内容，其中选编了一些具有经济特点的习题。附录中给出了近年来有关院校和各类成人高等学校的期末考题和研究生试题，并附有答案，供读者参考。

本书承蒙李盈安同志审阅了全书，提出了宝贵的意见，在此特致谢意。由于我们的水平有限，书中错误在所难免，请读者批评指正。

编者

1985年4月　于北京

目　　录

前　　言
第一章　函数……1
I　基本内容……1
一、集合……1
二、实数集……3
三、函数……5
四、反函数……6
五、显函数和隐函数……7
六、函数的几种特性……7
七、复合函数……8
八、初等函数……8
九、初等函数的作图……8
II　例题分析……9
III　基本要求……20
IV　基础练习……21
自我检查题……26
第二章　极限与连续……27
I　基本内容……27
一、数列的极限……27
二、函数的极限……27
三、无穷小量和无穷大量……28
四、极限的运算法则……30
五、极限存在的准则及两个重要的极限……30
六、函数的连续性……31
II　例题分析……32
III　基本要求……46
IV　基础练习……46
自我检查题……50
第三章　导数与微分……52
I　基本内容……52
一、导数概念……52
二、求导数的方法……53
三、高阶导数……55
四、导数概念在实际问题中的应用……56
五、微分概念……57
II　例题分析……60
III　基本要求……78
IV　基础练习……78
自我检查题……84

第四章　中请定理和导数的应用 ······86
I　基本内容 ······86
一、三个基本定理 ······86
二、罗彼塔法则——求未定型极限 ······87
三、导数用于研究函数 ······89
II　例题分析 ······91
III　基本要求 ······102
IV　基础练习 ······103
自我检查题 ······107
第五章　不定积分 ······108
I　基本内容 ······108
一、原函数与不定积分 ······108
二、不定积分的性质 ······108
三、基本积分表 ······109
四、换元积分法与分部积分法 ······109
五、有理函数的积分 ······112
II　例题分析 ······113
III　基本要求 ······135
IV　基础练习 ······135
自我检查题 ······143
第六章　定积分 ······144
I　基本内容 ······144
一、定积分的概念 ······144
二、定积分与不定积分的关系 ······146
三、定积分的计算 ······147
四、广义积分 ······147
五、定积分的应用 ······148
六、定积分的近似计算 ······151
II　例题分析 ······152
III　基本要求 ······173
IV　基础练习 ······173
自我检查题 ······177
第七章　多元函数 ······178
I　基本内容 ······178
一、空间解析几何简介 ······178
二、多元函数的概念 ······180
三、二元函数的极限与连续 ······181
四、二元函数的偏导数 ······181
五、二元函数的全微分 ······183
六、复合函数的微分法 ······184
七、隐函数的微分法 ······185
八、二元函数的极值 ······185
九、二重积分 ······187

II 例题分析……190
III 基本要求……206
IV 基础练习……206
自我检查题……210
第八章 无穷级数……212
I 基本内容……212
一、数项级数……212
二、幂级数……214
II 例题分析……216
III 基本要求……235
IV 基础练习……235
自我检查题……239
第九章 微分方程……241
I 基本内容……241
一、基本概念……241
二、一阶微分方程……242
三、高阶微分方程的几种特殊类型……245
四、二阶常系数线性微分方程……246
II 例题分析……247
III 基本要求……259
IV 基础练习……260
自我检查题……261
基础练习参考答案……262
附录 微积分试题选……304
(一)北京市职工大学82级(财经类)微积分试题(附答案)
(二)北京市职工大学83级(财经类)微积分试题(附答案)
(三)北京市职工大学84级(财经类)微积分试题(附答案)
(四)中央广播电视大学83级(经济类)第一学期微积分试题(附答案)
(五)中央广播电视大学84级(经济类)第二学期微积分试题(附答案)
(六)某大学财经类各专业第一学期微积分试题(附答案)
(七)某大学财经类各专业第二学期微积分试题(附答案)
(八)某大学财经类各专业硕士学位研究生试题(微积分部分)I、II(附答案)

第一章　函　数

I　基　本　内　容

一、集　合

集合是数学的一个重要概念，集合的方法及其符号在数学的各个分支中已得到普遍的运用，集合论的观点已成为现代数学的特点之一．因此掌握集合的概念是学习高等数学以及其它数学分支所必需的．

1．集合的概念

集合是指具有某种属性的事物的全体，或是按照某一法则进行研究的对象的全体．

一般用大写字母A，B，C…等表示集合．

构成集合的事物或对象，称为集合的元素，通常用小写字母a，b，c…等表示．

a是集合A的元素，简记为$a \in A$；反之a不是集合A的元素，简记为$a \bar{\in} A$．

（1）集合分有限集和无限集．

（2）若集合的全部元素都是数，则称为数集；若集合的元素都是点，则称为点集．

2．集合的表示法

集合有两种表示法：

（1）列举法

按任意顺序列出集合的所有元素，并用括号{　}括起来．

（2）描述法

给出集合元素所具有的某种性质或法则，用$A=\{a \mid a$的某种性质或法则$\}$来表示．

3．空集、全集、子集

（1）不包含任何元素的集合称为空集，记为ϕ．

（2）由所研究对象的整体组成的集合称为全集，记为U．全集是相对的．

（3）如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素，即如果$a \in A$，则$a \in B$，则称A是B的子集，记为$A \subset B$或$B \supset A$，如图1-1．

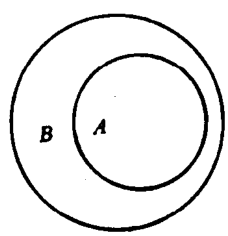

图1-1

若$A \subset B$且$B \subset A$，则称A与B相等，记为$A=B$。

子集有如下性质：

1°$A \subset A$..

2°对任意集合A，有$\phi \subset A$．

3°如果$A \subset B$，$B \subset C$，则$A \subset C$，即集合的包含关系有传递性．

4．集合的运算

（1）并集

由集合A和B的所有元素构成的集合，称为集合A与B的并集，记为$A\cup B$，即$A\cup B=\{x\mid x\in A$或$x\in B\}$，如图1-2.

并集有如下性质：

1°$A\subset A\cup B$，$B\subset A\cup B$.

2°$A\cup B=B\cup A$.

3°对任何集合A有

$A\cup A=A$. $A\cup\phi=A$，$A\cup U=U$.

（2）交集

由集合A和B的所有公共元素构成的集合，称为集合A与B的交集，记为$A\cap B$，即$A\cap B=\{x\mid x\in A$且$x\in B\}$，如图1-3.

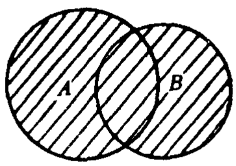

图1-2

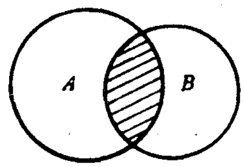

图1-3

交集有如下性质：

1°$A\cap B\subset A$，$A\cap B\subset B$.

2°$A\cap B=B\cap A$.

3°对任何集合A有

$A\cap A=A$，$A\cap\phi=\phi$，$A\cap U=A$.

（3）差集

由属于集合A而不属于集合B的所有元素构成的集合，称为集合A与B的差集，记为$A-B$，即$A-B=\{x\mid x\in A$且$x\bar{\in}B\}$，如图1-4.

差集有如下性质：

1°$A-A=\phi$，$A-\phi=A$，$A-U=\phi$.

2°$A-B=A-(A\cap B)$.

（4）补集

全集U中所有不属于A的元素构成的集合，称为集合A的补集，记为A'（或$\bar{A}$），即$A'=\{x\mid x\in U$且$x\bar{\in}A\}$，如图1-5.

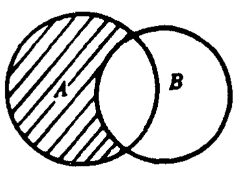

图1-4

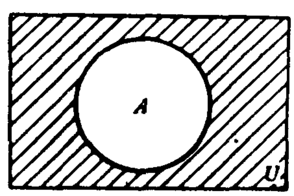

图1-5

补集有如下性质：

1°$A\cup A'=U$，$A\cap A'=\phi$.

2°$(A')'=A$.

5．集合的运算律

（1）交换律

1°$A\cup B=B\cup A$.

2°$A\cap B=B\cap A$.

（2）结合律

1°$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

2°$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

（3）分配律

1°$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

2°$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

（4）吸收律

1°$(A\cup B)\cap A=A$.

2°$(A\cap B)\cup A=A$.

（5）摩根律

1°$(A\cup B)'=A'\cap B'$.

2°$(A\cap B)'=A'\cup B'$.

二、实　数　集

1．实数与数轴

（1）实数

有理数与无理数统称为实数.

1°有理数是指$\frac{p}{q}$这种形式的分数(其中p，q是互质的整数，且$q\neq 0$).

任何一个有尽小数或循环小数都可化为有理数，即$\frac{p}{q}$形式的分数，反之亦然.

2°无理数是指不循环的无尽小数.

（2）数轴

规定了原点、正方向与长度单位的直线称为数轴.

1°数轴也称为实数轴。

2°全体实数与数轴上点的全体形成一一对应的关系.

全体实数构成的集合称为实数集，记为R

为了叙述的简单，实数a与数轴上点a，常常不予区别.

（3）实数的性质

1°有序性

任意两个实数a，b之间，必满足以下三种关系之一：

$a>b$，$a=b$，$a<b$.

2°稠密性

任何两个实数之间，总可以找到无穷多个有理数或无理数。

3°连续性

实数充满整个数轴而无空隙．实数的连续性是实数的一个重要性质．

2．实数的绝对值

（1）实数a的绝对值$|a|$定义为：

$$|a|=\begin{cases}a & 若a\geqslant 0;\\ -a & 若a<0.\end{cases}$$

$|a|$的几何意义表示数轴上点a与原点之间的距离．

（2）绝对值的性质

1°$|a|=\sqrt{a^2}$．

2°$|a|\geqslant 0$。

3°$|-a|=|a|$．

4°$-|a|\leqslant a\leqslant |a|$．

5°设$\varepsilon>0$，则不等式$|a|\leqslant\varepsilon$与$-\varepsilon\leqslant a\leqslant\varepsilon$等价．

6°设$\varepsilon>0$，则不等式$|a|\geqslant\varepsilon$与$a\geqslant\varepsilon$或$a\leqslant-\varepsilon$等价．

7°对任意两个实数a，b，恒有

$|a+b|\leqslant|a|+|b|$．

8°对任意两个实数a，b，恒有

$|a-b|\geqslant|a|-|b|$．

9°对任意两个实数a，b，恒有

$|ab|=|a|\cdot|b|$，

$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$（$b\neq 0$）．

3．区间

区间是指介于两个实数之间的全体实数，所以区间是实数集R的子集．

（1）有限区间

满足不等式$a<x<b$的所有实数x的集合，称为开区间，记为(a,b)，即$(a,b)=\{x|a<x<b\}$，如图1-6．

满足不等式$a\leqslant x\leqslant b$的所有实数x的集合，称为闭区间，记为$[a,b]$，即$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$，如图1-7．

图1-6

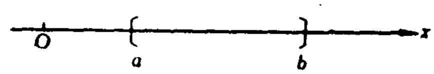

图1-7

满足不等式$a<x\leqslant b$（或$a\leqslant x<b$）的所有实数x的集合，称为半开区间，记为$(a,b]$，即$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$，如图1-8．（或$[a,b)$，即$[a,b)=$

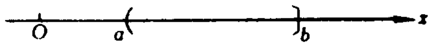

图1-8

图1-9

$\{x \mid a \leqslant x < b\}$，如图1-9）.

（2）无限区间

满足不等式 $x > a$，$x \geqslant a$，$x < a$，$x \leqslant a$ 的所有实数 x 的集合，分别记为 $(a, +\infty)$，$[a, +\infty)$，$(-\infty, a)$，$(-\infty, a]$，即

$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$，

$(a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}$，

$(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$，

$(-\infty, a] = \{x \mid x \leqslant a\}$.

全体实数记为区间 $(-\infty, +\infty)$，即 $(-\infty, +\infty) = \{x \mid x \in R\}$.

上述几类区间都是无限区间.

4．邻域

设a与δ为两个实数，且$\delta > 0$，则适合不等式 $|x-a| < \delta$的所有实数x的集合，称为点a的δ邻域.

邻域的几何意义

点a的δ邻域，即是以a为中心，长度为2δ的开区间 $(a-\delta, a+\delta)$，即 $(a-\delta, a+\delta) = \{x \mid |x-a| < \delta, \delta > 0\}$. 其中$a$称为邻域中心，$\delta$称为邻域半径，如图1-10.

图1-10

适合不等式 $0 < |x-a| < \delta$的所有实数x的集合，是区间 $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$，即在点$a$的$\delta$邻域内除掉点$a$后所组成的集合.

三、函　　数

1．函数的定义

设数集X，Y，如果对每一个 $x \in X$，在某种法则f的作用下，总有唯一确定的 $y \in Y$ 与之相对应，则称f是X到Y的一个函数，或称y是x的函数，记为

$f: X \to Y$

或 $y = f(x)$.

其中x称自变量，y称因变量或函数.

数集X称为函数f的定义域，记为$D(f)$，且有$D(f) = X$.

当x取遍X的元素时，函数$f(x)$的全体也构成一个集合，称为函数f的值域，记为$Z(f)$，且有$Z(f) \subset Y$.

在微积分中只讨论$X \subset R$和$Y \subset R$的情形.

（1）在函数定义中，指的是对每一个 $x \in X$，通过 f 的作用，总有唯一确定的 $y \in Y$ 与之相对应，这样的函数又称为单值函数．如果对每一个 $x \in X$，通过 f 的作用，总有一个或几个确定的 $y \in Y$ 与之相对应，这样的函数又称多值函数，但这已不属于本定义的函数．我们讨论的函数均指前者，即是单值函数．

（2）定义域和法则 f，是确定一个函数的两个要素．

两个函数具有同一法则 f 而定义域不同，则是两个不同的函数；定义域相同且值域也相同的两个函数也不一定是相同的函数。

所以两个函数相同应指定义域相同且法则 f 相同，在这前提下，两个函数必有相同的值域．

（3）对于 $x_0 \in X$，有唯一的 $y_0 \in Y$ 与之对应，即

$$y_0 = f(x_0) \text{或} y|_{x=x_0}.$$

称 y_0 为 $x = x_0$ 时函数 $y = f(x)$ 的函数值，并称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处有定义．因此函数定义域 $D(f)$ 是使函数有定义的所有点的集合．

2．函数的表示法

函数有下列的表示方法：

（1）解析法

用一个或几个数学式子表示一个函数．

（2）图象法

（3）列表法

解析法是表示函数的一个重要而常用的方法．但有的函数不一定能用解析法表示，也有些函数也不一定能画出其图象．

3．定义域的求法

确定一个函数的定义域是研究函数的重要内容．

求用解析法表示的函数的定义域时，可用剔除法．即剔除使函数的数学式子中无意义的点．

用剔除法时，应注意剔除：

（1）使分母为 0 的点；

（2）偶次方根中被开方数小于 0 的点；

（3）对数符号中真数 $\leqslant 0$ 的点；

（4）使三角函数 $\operatorname{tg} x$，$\operatorname{ctg} x$，$\sec x$，$\csc x$ 或反三角函数无意义的点．

四、反　函　数

设给定函数 $y = f(x)$，若将 y 作为自变量，x 作为函数，这时如果也确定一个函数 $x = f^{-1}(y)$，则称函数 $x = f^{-1}(y)$ 是函数 $y = f(x)$ 的反函数，函数 $y = f(x)$ 称为直接函数．

一般地，将 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 写成自变量为 x，因变量为 y 的形式 $y = f^{-1}(x)$，所以称 $y = f^{-1}(x)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数．

函数 $y = f(x)$ 与反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的图形即是同一个，而函数 $y = f(x)$ 与反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形是对称于直线 $y = x$．

五、显函数和隐函数

（1）显函数

用自变量 x 的数学式子直接表示因变量 y 的函数称显函数.

（2）隐函数

变量 x，y 之间的函数关系用方程 $F(x, y) = 0$ 来表示的函数称隐函数。

六、函数的几种特性

1. 函数的奇偶性

给定函数 $y = f(x)$

（1）如果对所有的 $x \in D(f)$，恒有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.

（2）如果对所有的 $x \in D(f)$，恒有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形对称于 y 轴.

奇函数的图形对称于原点.

2. 函数的有界性

设函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内有定义，如果存在一个正数 M，对于所有的 $x \in (a, b)$，恒有 $|f(x)| \leq M$ 成立，则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内是有界函数.

反之，如果对任意给定的正数 N，总有 $x \in (a, b)$，使 $|f(x)| > N$ 成立，则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内是无界函数.

如果 $f(x)$ 在点 x_0 处有界，是指 $f(x)$ 在点 x_0 的某一个邻域内有界；如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界，是指 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上每一点都有界.

3. 函数的单调性

如果函数 $y = f(x)$ 对区间 (a, b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是单调增加的；当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是单调减少的.

单调增加的函数，其图形是沿 x 轴正向逐渐上升，而单调减少的函数，其图形是沿 x 轴正向逐渐下降的.

单调增加与单调减少的函数统称为单调函数.

4. 函数的周期性

给定函数 $y = f(x)$，如果存在数 a，使 $f(x + a) = f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，数 a 是它的周期.

（1）如果 a 是 $f(x)$ 的周期，则 $2a$，$3a$，…，na…，也是 $f(x)$ 的周期，其中最小的正数 a 称为最小正周期。通常周期函数的周期专指最小正周期.

（2）并非所有的周期函数都有最小正周期。如 $f(x) = c$（c 为常数）就无最小正周期.

七、复 合 函 数

如果 y 是u的函数 $y=f(u)$，而u是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，则y 通过u而成为x的函数 $y=f[\varphi(x)]$，称为x的复合函数，u称为中间变量。

（1）函数复合时，必须使 $u=\varphi(x)$ 在定义域中每个 x 所对应的 u 的值，都属于 $y=f(u)$ 的定义域。

（2）复合函数的中间变量可以不止一个，即复合函数可以由两个或两个以上的函数复合而成。

八、初 等 函 数

1. 基本初等函数

基本初等函数包括：

1°常量：$y=c$；

2°幂函数：$y=x^a$（a为任何实数）；

3°指数函数：$y=a^x$（$a>0$，$a\neq1$）；

4°对数函数：$y=\log_a^x$（$a>0$，$a\neq1$）；

5°三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\mathrm{tg}x$，$y=\mathrm{ctg}x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

6°反三角函数：$y=\mathrm{arc}\ \sin x$，$y=\mathrm{arc}\ \cos x$，$y=\mathrm{arc}\ \mathrm{tg}x$，$y=\mathrm{arc}\ \mathrm{ctg}x$.

2. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和复合所构成的并用一个数学式子表示的函数，称为初等函数.

初等函数是微积分研究的主要对象.

如果不是用一个数学式子表示的函数就不是初等函数．如分段函数，它是用几个数学式子合起来表示的函数，在它的定义域的不同区间内，其数学式子是不同的，这样的函数称为分段函数，它不是初等函数.

九、初等函数的作图

在直角坐标系中，函数 $y=f(x)$ 的图形就是平面上坐标为 $(x,\ f(x))$ 的点的全体，它通常是平面上的一条曲线.

初等函数的作图，一般可采用描点作图法．但在对基本初等函数的图形比较熟悉的情况下，可利用函数的性质或已知函数的图形，通过对称延拓、平移、压缩、伸长等方法来作出初等函数的图形.

1. 根据函数的特性作图

（1）若函数 $y=f(x)$ 是偶函数，则图形关于 y 轴对称．这时，先作出 Oy 轴右侧部分的图形，然后利用对称性，即可得到Oy轴左侧部分的图形.

（2）若函数 $y=f(x)$ 是奇函数，则图形关于原点对称，这时，先作出 Oy 轴右侧部分的图形，然后利用对称性，予以绕原点 O 旋转180°后，即可得到 Oy 轴左侧部分的图形.

（3）若函数 $y=f(x)$ 是以T为周期的周期函数．这时，先作出该函数在一个周期

l 内的图形，然后通过周期延拓得到整个函数的图形.

2. 根据已知函数的图形作图

设已知 $y=f(x)$ 的图形.

(1) 作 $y=f(x-a)$ 的图形. 可由 $y=f(x)$ 沿 Ox 轴平移 $|a|$ 个单位得到. 当 $a>0$ 时向右移，$a<0$ 时向左移.

(2) 作 $y=f(x)+b$ 的图形。可由 $y=f(x)$ 沿 Oy 轴平移 $|b|$ 个单位得到. 当 $b>0$ 时向上移，$b<0$ 时向下移.

以上方法，即是图形的平移.

(3) 作 $y=kf(x)$ $(k>0)$ 的图形，可由 $y=f(x)$ 的图形上点的纵坐标伸缩 k 倍后得到. 当 $k>1$ 时，把 $f(x)$ 的点的纵坐标扩大 k 倍，横坐标不变；当 $k<1$ 时，把 $f(x)$ 的点的纵坐标缩小 $\frac{1}{k}$ 倍，横坐标不变.

(4) 作 $y=f(kx)$ $(k>0)$ 的图形，可由 $y=f(x)$ 的图形上点的横坐标伸缩 $\frac{1}{k}$ 倍后得到. 当 $k>1$ 时，把 $f(x)$ 的点的横坐标缩小 k 倍，纵坐标不变；当 $k<1$ 时，把 $f(x)$ 的点的横坐标扩大 $\frac{1}{k}$ 倍，纵坐标不变。

以上方法，即是图形的伸缩.

(5) 作 $y=f(-kx)$ $(k>0)$ 的图形，$y=f(-kx)$ 的图形与 $y=f(kx)$ 的图形是关于 y 轴对称.

(6) 作 $y=-kf(x)$ $(k>0)$ 的图形，$y=-kf(x)$ 的图形与 $y=kf(x)$ 的图形是关于 x 轴对称.

对分段函数的作图，在它定义域的不同区间内按初等函数的作图法作出图形，对不同区间的界点，用“实点”或“圆圈”加以区分.

II 例题分析

例1 设全集 $U=R$，集合 $A=\{x|\ |x|<5\}$，集合 $B=\{x|0\leqslant x<7\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$，A'，B'，$A'\cap B'$，$A'\cup B'$，$(A\cap B)'$，$(A\cup B)'$.

解：

$A\cap B=\{x|\ 0\leqslant x<5\}$，

$A\cup B=\{x|-5<x<7\}$，

$A'=\{x|x\leqslant -5$ 或 $x\geqslant 5\}$，

$B'=\{x|x<0$ 或 $x\geqslant 7\}$，

$A'\cap B'=\{x|\ x\leqslant -5$ 或 $x\geqslant 7\}$，

$A'\cup B'=\{x|\ x<0$ 或 $x\geqslant 5\}$，

$(A\cap B)'=\{x|x<0$ 或 $x\geqslant 5\}$，

$(A\cup B)'=\{x|x\leqslant -5$ 或 $x\geqslant 7\}$.

说明

可先作出集合A和B的图形，然后再求解.

例2 解下列不等式，并将其解用区间表示.

（1）$|2x-1|<3$

（2）$|3x+2|\geqslant 3$

（3）$(x-2)^2<4$.

（4）$0<(x-1)^2<9$

解：

（1）$|2x-1|<3$ 等价于

$-3<2x-1<3$

$-2<2x<4$

所以$-1<x<2$，即不等式的解为

$(-1,\ 2)$.

（2）$|3x+2|\geqslant 3$ 等价于

$3x+2\leqslant -3$ 或$3x+2\geqslant 3$，

所以$x\leqslant -\dfrac{5}{3}$ 或$x\geqslant\dfrac{1}{3}$

即不等式的解为

$\left(-\infty,\ -\dfrac{5}{3}\right]\cup\left[\dfrac{1}{3},\ +\infty\right)$.

（3）由$(x-2)^2<4$ 得

$|x-2|<2$，即

$-2<x-2<2$，

所以$0<x<4$，即不等式的解为

$(0,\ 4)$.

（4）由$0<(x-1)^2<9$ 得

$|x-1|>0$ 且$|x-1|<3$，即

$x\neq 1$ 且$-2<x<4$，

所以不等式的解为

$(-2,\ 1)\cup(1,\ 4)$.

例3 将不等式$-\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{13}{3}$化为绝对值不等式.

解： 不等式$-\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{13}{3}$即为区间$\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{13}{3}\right)$，区间长度为

$$b-a=\frac{13}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{14}{3}$$

区间中心为

$$a+\frac{b-a}{2}=-\frac{1}{3}+\frac{7}{3}=2$$