



大学基础课学习辅导丛书

高等数学

习题集



GAODENG SHUXUE



主编
崔现伟

 科学技术文献出版社

□ 大学基础课学习辅导丛书

高等数学习题集

主 编 崔现伟
编 委 王庆成 张利凯 刘俊荣
 王晓易 王岩华 王述珍
 刘淑霞 马守荣

科学技术文献出版社

Scientific and Technical Documents Publishing House

北 京

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题集/崔现伟主编.-北京:科学技术文献出版社,2002.8
(大学基础课学习辅导丛书)

ISBN 7-5023-4006-8

I. 高… II. 张… III. 高等数学-高等学校-习题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 010218 号

出 版 者:科学技术文献出版社

地 址:北京市复兴路 15 号(中央电视台西侧)/100038

图书编辑部电话:(010)68514027,(010)68537104(传真)

图书发行部电话:(010)68514035(传真),(010)68514009

邮 购 部 电 话:(010)68515381,(010)68515544-2172

网 址:<http://www.stdph.com>

E-mail:stdph@istic.ac.cn;stdph@public.sti.ac.cn

策 划 编 辑:王亚琪

责 任 编 辑:张述庆

责 任 校 对:唐 炜

责 任 出 版:刘金来

发 行 者:科学技术文献出版社发行 全国各地新华书店经销

印 刷 者:北京百善印刷厂

版 (印) 次:2002 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

开 本:850×1168 32 开

字 数:822 千

印 张:25.125

印 数:1~20000 册

定 价:25.00 元

© 版权所有 违法必究

购买本社图书,凡字迹不清、缺页、倒页、脱页者,本社发行部负责调换。

前 言

高等数学是工科、经济、农医及文科类专业的公共基础课之一,初学者往往感到这门课程内容概念繁杂,方法深奥灵活,做题困难,不易掌握。这是一个极为普遍的问题,只有通过大量的例题研读和习题演算,才能把这门课程学得深入、踏实。正如一位著名的数学家所说,学习数学如果只是记住了若干概念,背了几个定理,而不做习题,未能在基本的论证方法和技巧上有所长进,那真是“入宝山而空返”了。

本书是根据编者多年的学习和教学经验编写而成,适用于高等数学初学者,对要考研的学生来说,也是一本极好的参考书。本书中所列题目几乎涵盖了高等数学的所有内容,并且注重了对基本能力的培养,示范了一系列的基本的论证方法和技巧。书中所列题目分为三种类型,即选择题、填空题与解答题,这与研究生入学考试的题型一致,易于考研的学生使用。

在本书写作过程中,编者对每一道题目都做了认真的考虑,以使所选题目有助于提高学生的基本演算论证能力,增强其综合分析能力。书中大部分题目都给出了详细而完整的解答,以期给初学者一个很好的示范与依据。但这里提醒读者,最好还是少用甚至不用答案。如果碰到一个题目一时做不出来,宁肯暂时搁一下,也不要轻易翻看答案。这正如登山,经过一番艰苦的努力而到达峰顶,会感到其中有无穷的乐趣和成就感。反之,如果未尽全力就让人抬上山去,或者干脆坐缆车上去,那就失去了其中的趣味,同时也有挫自信心。

本书注意博众家之长,参考了国内多本高等数学方面的教材、习题集及考研资料。在此,向这些书的编者表示感谢!

由于编者水平有限,不足之处在所难免,恳请读者批评指正。

崔现伟

目 录

第一章 函数与极限	(1)
第一节 函数	(1)
第二节 数列与函数的极限	(4)
第三节 连续函数	(9)
第四节 无穷小量与无穷大量	(12)
第五节 综合题	(15)
参考答案	(20)
第二章 导数、微分及其应用	(68)
第一节 导数和微分	(68)
第二节 微分中值定理及导数应用	(72)
第三节 泰勒公式和洛必达法则	(78)
第四节 综合题	(81)
参考答案	(89)
第三章 不定积分	(157)
第一节 不定积分	(157)
第二节 综合题	(163)
参考答案	(166)
第四章 定积分及其应用	(197)
第一节 定积分	(197)
第二节 定积分的应用	(206)
第三节 综合题	(211)
参考答案	(218)

第五章 级数	(298)
第一节 常数项级数	(298)
第二节 幂级数	(304)
第三节 傅里叶级数	(310)
第四节 综合题	(316)
参考答案	(321)
第六章 空间解析几何	(395)
第一节 向量代数	(395)
第二节 空间直线和平面方程	(401)
第三节 空间曲线和空间曲面	(406)
第四节 综合题	(410)
参考答案	(414)
第七章 多元函数微分学	(448)
第一节 多元函数的极限与连续性	(448)
第二节 偏微分与全微分	(453)
第三节 多元函数微分学的应用	(459)
第四节 综合题	(464)
参考答案	(469)
第八章 重积分	(527)
第一节 二重积分	(527)
第二节 三重积分	(533)
第三节 重积分的应用	(538)
第四节 综合题	(542)
参考答案	(548)
第九章 曲线积分、曲面积分及场论初步	(608)
第一节 曲线积分及其应用	(608)

第二节 曲面积分及其应用.....	(616)
第三节 场论初步.....	(625)
第四节 综合题.....	(629)
参考答案.....	(637)
 第十章 常微分方程.....	 (711)
第一节 微分方程的一般概念与一阶微分方程.....	(711)
第二节 可降阶的高阶微分方程与线性微分方程(组).....	(718)
第三节 综合题.....	(725)
参考答案.....	(733)

第一章 函数与极限

第一节 函 数

一、选择题

1. 设 $f(x)$ 为偶函数, $g(x)$ 为奇函数, 且它们可以构成复合函数 $f[f(x)], f[g(x)], g[f(x)], g[g(x)]$, 则其中为奇函数的是()。

- A. $f[f(x)]$ B. $f[g(x)]$
C. $g[f(x)]$ D. $g[g(x)]$

2. 设 $f(x) = \begin{cases} e^{-2x} & x \geq 0 \\ \cos x & x < 0 \end{cases}$, 则 $f(-x)$ 等于()。

A. $f(-x) = \begin{cases} -e^{-2x} & x \geq 0 \\ -\cos x & x < 0 \end{cases}$

B. $f(-x) = \begin{cases} e^{2x} & x \geq 0 \\ \cos x & x < 0 \end{cases}$

C. $f(-x) = \begin{cases} -\cos x & x \geq 0 \\ -e^{-x} & x < 0 \end{cases}$

D. $f(-x) = \begin{cases} \cos x & x \geq 0 \\ e^{2x} & x < 0 \end{cases}$

3. 不等式 $a < x \leq b (a < b)$ 用区间表示为()。

- A. $x \in [a, b]$ B. $x \in [a, b)$
C. $x \in (a, b]$ D. $x \in (a, b)$

4. 若 $y = f(x)$ 的定义域为 $[-2, 2]$, 则 $y = f(x-a) + f(x+a)$ 的定义域为(), 其中 $0 < a < 2$ 。

- A. $[2-a, a-2]$ B. $[a-2, 2-a]$

C. $[a-2, a+2]$ D. $[-a-2, a+2]$

5. 函数 $y = \sin(2x + x^2)$ 是()。

- A. 偶函数 B. 奇函数
C. 非奇非偶函数 D. 既是奇函数, 又是偶函数

6. 函数 $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}}$ 的定义域为()。

- A. $x \in R$, 但 $x \neq 0$ B. $x \in R$, 但 $x \neq -1$
C. $x \in R$, 但 $x \neq -1, x \neq 0$ D. $x \in R$, 但 $x \neq -1, x \neq -2$

7. 函数 $y = \lg(x-1) + 12$ 的反函数是()。

- A. $y = 1 + e^{x-12}$ B. $y = 1 + 10^{x-12}$
C. $y = 10^{x-12}$ D. $y = 12 + 10^{x+1}$

8. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 4-2x, & x \geq 0 \\ 4+x, & x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} -x^2, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases}$ 则复合

函数 $f[g(x)] = ()$ 。

- A. $\begin{cases} 4-x^2 & x \geq 0 \\ 4-4x^2 & x < 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} 4+4x & x \geq 0 \\ 4-x^2 & x < 0 \end{cases}$
C. $\begin{cases} 4+x^2 & x \geq 0 \\ 4-4x^2 & x < 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 4-4x & x \geq 0 \\ 4+x^2 & x < 0 \end{cases}$

9. 设 $y = f(x)$ 的定义域和值域均为 R , 且 $f(x)$ 有反函数, 若 $y = f(x)$ 为奇函数, 则 $y = f^{-1}(x)$ 是()。

- A. 奇函数 B. 偶函数
C. 非奇非偶函数 D. 既是奇函数又是偶函数

10. 函数 $y = |2\sin x + 2\cos x|$ 是周期函数, 它的最小正周期是()。

- A. 2π B. 4π
C. π D. $\frac{\pi}{2}$

11. 函数 $y = \sin \frac{\pi x}{3(1+x^2)}$ 的值域是()。

- A. $[-1, 1]$ B. $[0, 1]$
C. $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ D. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

12. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 且对任意 x, y 有 $|f(x) - f(y)| <$

$|x-y|$, 则 $F(x) = f(x) - x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上 ()。

- A. 单调增加 B. 单调下降
C. 先单调增加后单调下降 D. 先单调下降后单调增加

二、填空题

1. 函数 $y = \begin{cases} x & x < 1 \\ x^3 & 1 \leq x \leq 2 \\ 4^x & x > 2 \end{cases}$ 的反函数为_____。
2. 当 $0 \leq x < 1$ 时, $f(x)$ 有定义, 则函数 $f(\sin 2x)$ 的定义域为_____。
3. 已知 $f(x+1) = -x^2 + 2x + 4$, 则 $f(x) =$ _____。
4. 设 $f(x) = ax^2 + bx + 2$, 且 $f(x+1) - f(x) = 2x - 1$, 则 $f(x) =$ _____。
5. 设 $\varphi(x), \psi(x), f(x)$ 都是单调增加函数, 若 $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$, 则有 $\varphi[\varphi(x)]$ _____ $f[f(x)]$ _____ $\psi[\psi(x)]$ 。
6. 当 a, b, c, d 满足_____时, 函数 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ad-bc \neq 0$) 与其反函数相同。
7. 若 $f(x) = -\frac{1}{x}$, $f(x) + f(y) = f(z)$, 则 $z =$ _____。
8. 设 $y = [x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则函数 $y = x - [x]$ 是_____。
9. 设 $f(x) = 2\sin x$, $f[\varphi(x)] = 1 - x^2$, 则 $\varphi(x)$ 的定义域为_____。
10. 设 $f(x) = \frac{1}{x-1}$, 则 $f[f(x)] =$ _____, $f\{f[f(x)]\} =$ _____。

三、解答题

1. 判断下列函数的奇偶性:

- | | |
|---------------------------------|------------------------------------|
| (1) $y = \frac{1+2x^2}{1+3x^2}$ | (2) $y = 5x^2 + 6x^7 + 1$ |
| (3) $y = -\log_3(1+x^2)$ | (4) $y = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$ |
| (5) $y = \sin x + \cos x$ | (6) $y = e^{-x}$ |
| (7) $y = x(x-2)(x+2)$ | (8) $y = \frac{2}{x} \cdot \cos x$ |

2. 试求下列函数的定义域。

$$(1) f(x) = \lg(2 - \lg x)$$

$$(2) f(x) = \arcsin \left[\frac{x}{[x]} \right] \text{ (其中 } [x] \text{ 表示不超过 } x \text{ 的最大整数)}$$

$$(3) f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{x+2}} + \arccos \frac{2x}{1+x}$$

$$(4) f(x) = \sqrt{-x^2 + x + 2} + \frac{\arccos \frac{1}{x}}{\sqrt{2-x}}$$

3. 试证下列函数在指定区间内的单调性：

$$(1) y = \lg x^2, (-\infty, 0) \quad (2) y = 4\sin x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$4. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & |x| \geq 1 \\ \sqrt{1-x^2} & |x| < 1 \end{cases}, \text{ 求 } f[f(x)].$$

5. 试证明函数 $f(x) = 2x + \sin x$ 没有周期。

6. 定义在对称区间 $(-a, a)$ 内的任一函数 $f(x)$ 都可表示为一个奇函数和一个偶函数的和的形式, 并且表示法唯一。

7. 求下列函数的反函数

$$(1) y = \sqrt{\pi - \arctg x}$$

$$(2) y = 6\log_4 x$$

8. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 且 $f(x) \neq 0, f(xy) = f(x)f(y)$, 试求 $f(2000)$ 。

9. 证明函数 $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2+x-1}}{1+x^2+x+1}$ 是奇函数 (其中 $x \in R$)。

10. 若对于函数 $f(x) (x \in R)$ 有等式 $f(x+T) = kf(x)$, 其中 k 和 T 均为正常数, 且有 $f(x) = a^x g(x)$, 其中 $a > 0$, 则 a 为何值时 $g(x)$ 是以 T 为周期的函数。

第二节 数列与函数的极限

一、选择题

1. 设数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则下列断言中正确的是 ()。

A. 若 x_n 发散, 则 y_n 必发散

- B. 若 x_n 收敛, 则 y_n 必收敛
C. 若 x_n 无界, 则 y_n 必有界
D. 若 $x_n \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty$, 则必有 $y_n \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$
2. 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 均存在, 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ()。
A. 存在 B. 不存在
C. 不一定存在 D. 恒等于 1
3. 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{x^2}{x+1} + ax + b) = 1$, 其中 a, b 是常数, 则有 ()。
A. $a = -1, b = 1$ B. $a = -1, b = 2$
C. $a = 1, b = 1$ D. $a = 1, b = 2$
4. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{f(3x)} =$ ()。
A. 1 B. $\frac{1}{2}$
C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{4}{3}$
5. 若数列 $\{x_n\}$ 有极限 a , 则在 a 的 $\epsilon (\epsilon > 0)$ 邻域之外, 数列中的点 ()。
A. 有无穷多个 B. 可以有有限个, 也可以有无穷多个
C. 必不存在 D. 至多有有限个
6. 若对某一取定的正数 ϵ , 数列 $\{x_n\}$ 在 $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ 内有无穷多个点, 则 ()。
A. 数列 $\{x_n\}$ 必定有极限, 且其极限为 a
B. 数列 $\{x_n\}$ 必定有极限, 但不一定为 a
C. 数列 $\{x_n\}$ 必定不存在极限
D. 数列 $\{x_n\}$ 不一定存在极限
7. 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在, 则 ()。
A. $f(x)$ 在 x_0 点的函数值必存在且等于极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
B. $f(x)$ 在 x_0 点的函数值必存在但不一定等于 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
C. $f(x)$ 在 x_0 点的函数不一定存在
D. 如果 $f(x)$ 在 x_0 的函数值存在, 则必等于 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
8. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 则 ()。

- A. 当 $g(x)$ 有界时, 必有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = 0$
 B. 当 $g(x)$ 为任意函数时, 都有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = 0$
 C. 只有当 $g(x)$ 在 0 点的极限存在时, 才有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = 0$
 D. 只有当 $g(x)$ 为常数时, 才有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = 0$
9. 若极限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在, 则下列极限中一定存在的是()。
- A. $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)|$ B. $\lim_{x \rightarrow a} \lg f(x)$
 C. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)}$ D. $\lim_{x \rightarrow a} \arccos f(x)$
10. 数列 $0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots$ ()。
- A. 以 0 为极限 B. 不存在极限
 C. 以 1 为极限 D. 难以确定
11. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$ 的极限值为()。
- A. 1 B. ∞
 C. 不存在 D. 0
12. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \frac{1}{\sin x})^x =$ ()。
- A. 不存在 B. e
 C. e^{-1} D. 1
13. 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 都不存在, 则有()。
- A. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$ 都不存在
 B. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ 存在但 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$ 不存在
 C. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ 不存在, 但 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$ 存在
 D. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$ 都可能存在也可能都不存在

二、填空题

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) =$ _____。
2. 设 $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =$ _____。对 $\epsilon = 0.01$, 若 $|x_n - 0| < \epsilon$, 则 n

应从_____开始。

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \right) = \text{_____}。$$

$$4. \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = \text{_____}。$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin n = \text{_____}。$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2 - 1}{3x} = \text{_____}。$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \text{_____} \text{ (其中 } n \text{ 为正整数)}。$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x} = \text{_____}。$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{kx}\right)^x = \text{_____}。$$

$$10. \text{若 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-9}{a^2 + bn} = 4, \text{ 则 } a = \text{_____}, b = \text{_____}。$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\ln \cos x} = \text{_____}。$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \text{_____}。$$

三、解答题

1. 用数列极限的定义证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9-6n}{4+2n} = -3 \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+a}}{n} = 1$$

2. 用函数极限的定义证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4-x^2}{x^2-3x+1} = -3 \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sin x}{\sqrt{x}} = 0$$

3. 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, 证明 $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |A|$, 反之又如何?

4. 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} [(2n-1) + 2(2n-3) + 3(2n-5) + \cdots + n]$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^6+n}} + \frac{2^2}{\sqrt{n^6+2n}} + \cdots + \frac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}} \right)$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}$$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n}$ (其中 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 都是大于零的常数, k 为自然数)

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^2 - a^2}{x}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x \sin x}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4x)^{-\frac{1}{x}}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x} \right)^{3x}$$

5. 设 $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛。

6. 设 $x_1 = 1, x_2 = 2, 2x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n = 0 (n = 1, 2, \cdots)$, 试求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

7. 设数列 $\{x_n\}$ 满足:

$-1 < x_0 < 0, x_{n+1} = x_n^2 + 2x_n \quad (n = 0, 1, \cdots)$, 试证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

8. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin 2x - \sin 4x}{x^2 \sin x}$ 。

9. 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, 且 $A > 0$, 试证明存在 $\delta_0 > 0$, 使得 $0 < |x - a| < \delta_0$ 时, 有 $f(x) > 0$ 。

10. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos ax}} \quad (0 < |a| < \pi)$ 。

11. 试证明极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ 不存在。

12. 试证明极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0)$ 。

13. 证明 $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ 收敛。

第三节 连续函数

一、选择题

1. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均定义在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上, 其中 $f(x)$ 为连续函数且 $f(x) \neq 0$, $g(x)$ 有间断点, 则()。

A. $g[f(x)]$ 必有间断点

B. $f[g(x)]$ 必有间断点

C. $\frac{g(x)}{f(x)}$ 必有间断点

D. $[g(x)]^2$ 必有间断点

(1995 数学二考研题)

2. 设函数 $f(x) = \frac{x^3 - x^2}{\sin \pi x}$, 则()。

A. $f(x)$ 有 1 个可去间断点

B. $f(x)$ 有 2 个可去间断点

C. $f(x)$ 有 3 个可去间断点

D. $f(x)$ 有无穷多个可去间断点

3. $x=2$ 是函数 $f(x) = \arctg \frac{1}{2-x}$ 的()。

A. 连续点

B. 可去间断点

C. 跳跃间断点

D. 第二类间断点

4. 设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续, 且存在 $\epsilon < 0$, 使得 $0 < |x - x_0| < \epsilon$ 时, 有 $f(x) > 0$, 则必有()。

A. $f(x_0) = 0$

B. $f(x_0) > 0$

C. $f(x_0) \geq 0$

D. $f(x) < 0$

5. 函数 $y = \ln(\sin x)$ 的连续区间为()。

A. R

B. $|x \neq k\pi| (k \text{ 为自然数})$

C. $(2k\pi, 2k\pi + \pi), k=0, \pm 1, \dots$

D. $(2k\pi - \pi, 2k\pi), k=0, \pm 1, \dots$

6. 函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow x} \frac{8nx}{2 - nx}$ 的连续区为()。

A. R

B. $x \neq \frac{1}{n}$ 的实数 (其中 n 为正整数)

C. $x \neq 0$ 的实数

D. $x \neq \frac{1}{n}$ 且 $x \neq 0$ 的实数 (其中 n 为正整数)

7. 函数 $f(x) = \begin{cases} \lg x & x \geq 1 \\ a \sin \frac{\pi}{2} x & x < 1 \end{cases}$ 连续, 则 $a = (\quad)$ 。

A. 0

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

8. 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & x \geq 0 \\ 1+x & x < 0 \end{cases}$, 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则有 $a = (\quad)$ 。

A. 0

B. 1

C. 2

D. 任意实数

9. 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$ 为连续函数, 则 a 和 b 的值分别为 $(\quad)$ 。

A. 0, 0

B. 1, 1

C. 1, 0

D. 0, 1

10. 方程 $2x^3 - 2x^2 + 1 = 0$ 至少有一个根的区间是 $(\quad)$ 。

A. $(\frac{1}{6}, 1)$ B. $(0, \frac{1}{6})$ C. $(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ D. $(-2, 0)$

二、填空题

1. 设函数为 $f(x) = \begin{cases} \frac{(a+bx)+b}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-3}} & x \neq 1 \\ 4 & x = 1 \end{cases}$, 则有 $a = \underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 函数 $f(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n} & x \geq 0 \\ \sin x & x < 0 \end{cases}$ 的间断点是 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} a+bx & x \leq 0 \\ \frac{\sin bx}{x} & x > 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 点间断, 则 a 和 b 应满足