基础数学丛书

数学分析中的反例

SHUXUE FENXI ZHONGDE FANLI

王俊青 编著

基础数学丛书

数学分析中的反例

王俊青　编著

电子科技大学出版社

[川]新登字 016 号

责任编辑　卿　春
封面设计　高尚英
版式设计　卿　春

数学分析中的反例
王俊青编著
*
电子科技大学出版社出版
(成都建设北路二段四号)邮编 610054
山东省德州地区新联印刷厂德州厂印刷
新华书店经销
*
787×1092 毫米　1/32　6.75 印张　146 千字
1996 年 6 月第 1 版　1996 年 6 月第 1 次印刷
印数 1—3000 册
ISBN7-81043—192—7/O・18
定价:8.80 元

序

十七世纪上半叶笛卡儿（R. Descartes）引进了变量，在此基础上，紧接着十七世纪下半叶牛顿（I. Newton）、莱布尼兹（S. W. Leibnigz）创建了微积分。于是，数学从经历了漫长的二千年之久的初等数学阶段跃进到了变量数学的新时期。正如恩格斯评赞的那样："变量数学，不仅可以描述状态，而且可以描述过程"了。数学作为一个极为有用的工具，对于客观事物运动的量变规律，不再只是限止在静态的描述上，而可进展到予以动态的描述了。但是微积分产生以后长达一百几十年的岁月，其发展缓慢、应用局限，几乎到了停滞难进的局面，原因就是微积分的理论基础缺乏牢固的严密性。直到十九世纪二三十年代，柯西（A. —L. Cauchy）执教于巴黎科技大学（巴黎综合工科学校），率先新编了具严格逻辑推理的微积分讲义。并且柯西对于微积分中历来保持的当时所谓"代数化"的传统假说持不同意见。这些传统的假说是：命题若对实数情形正确则一定可以对复数也对；命题若对有限情形时成立则必可引伸到无限时也对；命题若对级数收敛时有结论则定可同样移到不收敛状态也成立等等，柯西举出了一系列的反例，并针对作为微积分理论基础的极限理论，引进了无穷小量的概念，同时提出了数列（有序变量）的极限用 ε—N 语言的描述方式，还给出了一个极限存在的判别准则。从而开始了奠定微积分严格理论基础的研究。接着魏尔斯特拉斯（K. Weierstrass）对于一般变量（有序的与

无序的变量）进一步引进了 ε—δ 的说法，提出了微积分赖以生存的实数系统需建立一个严格的实数理论作为其基础，并且对于柯西以来微积分中的许多重要的概念与关系作了全面严格而深入的研究论证。例如，对于一个区间上的任意连续函数，总认为存在可微点的直觉想像，他举出了反例。魏尔斯特拉斯构造的著名反例是：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}\cos(b^{n}x),(0<a<1,ab>1+\frac{3}{2}\pi,b\text{ 为奇数})$$

这是一个在区间上点点连续且点点不可微的函数，从而严格弄清楚了函数的连续性与可微性之间的关系；魏尔斯特拉斯还对椭圆函数正反两方面进行追究，引出椭圆函数的逆转理论的建立，这也是数学史上的著名成果。微积分的发展，由牛顿、莱布尼兹到柯西、魏尔斯特拉斯，便进入到了严密理论基础的新阶段。由此可见，微积分中反例的列举，对于确切理解概念以致整个理论基础的建立都具有极其重要的镜鉴作用。

历史上，十九世纪的欧洲，对于微积分、代数几何的研究，均完成了严密抽象的理论改造过程，使得整个变量数学时期的各个数学分支均进展到了具有严格的逻辑、高度的抽象和广泛的应用三大特征的新阶段。在数学史上为区别以往由初等数学时期到变量数学时期的重大差异，特将十九世纪以后的数学阶段称为近代数学时期。相应地，把经过严格理论改造了的微积分称为数学分析。

因此，为了学好数学分析这一门课程，就应需求学生按照变量数学处处充满辩证逻辑的特征，与形而上学方法有所

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

不同，就必需正反两方面予以考虑命题的真伪，就必需前后两阶段予以研 压明确其相关概念是储存不是独立的结论。这其中列举恰当的反例就是一个极为关键的技巧，已成为当代数学教学的重要环节。所以，在进一步深入学习数学分析时，就要培养学生有举反例的习惯，有独立思考的能力。德州教育学院王俊青同志积多年来的教学经验，汇集编纂了数学分析近四百反例，辑成了《数学分析中的反例》一书，共 分八章，概涉了一元与多元函数微积分及级数等的基本概念与基础理论的各个环节。资料详尽，内容丰富。对于配合数学与分析课程的教学来说，无疑是一本很有益处的陪训教材。

我相信，这本书的出版，供广大师生作为补充参考，必将有助于教学质量的提高。不仅如此，分析反例的汇总，还可促进这一方面科研工作的展开。例如对于某些重要的和 著名的反例能否引出创建更精短、更简明的反例来，当然，对于上述教学与科研的进一步作用，都将有待于今后的实践来予以验证。

邵品琮

1996.6.21 于青岛

前　　言

在数学中，我们提出问题的主要类型是："若 A 则 B"，即"A→B"；要谁这一蕴涵关系是正在铁，我们就要给出蕴涵关系"A→B"的一个证明，而要说明这一蕴涵关系不成立，则只需举一个反例。反例对巩固和加深概念、定理的理解有着正面例子反无法取代的作用，在教学中试举"反例"已成为提高教学质量的重要一环。本书针对学生容易忽略的地方举出反例，来帮助学生深刻理解数学分析中的某些概念、概念与概念之间的联系以及某此壹理的实质内容。本书就下列几个方面举出反例：

1. 概念方面
2. 概念与概念之间的联系
3. 某引起定理的必要性或充分性
4. 某些问题的特殊性

本书可作为数学分析或高等数学的辅导材料，也可作为教师的教学参考书，还可供广大数学爱好者阅读。

本书是多年教学资料的积累，经验的结晶。并在著名数学

家北京师范大学教授王梓坤先生的大力支持和鼓励下出版成册。本书稿由著名数学家青岛大学数学系教授郘品琮先生审校，并提出了许多宝贵意见，德州教育学院数学系刘书清主任为本书的出版给予了大力支持和帮助，在此一并表示衷心的感谢！

由于作者水平所限，书中的缺点和错误在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

1996年6月

目 录

第一章　函数与极限

函数是数学的核心，它是数学分析研究的对象，而数学分析研究函数的方法是极限，数学分析中几乎所有的概念都离不开极限．因此，函数与极限的概念是数学分析的重要概念．本章根据所选反例，将其内容分为以下四节：

§1　函数

§2　数列极限

§3　聚点和确界

§4　函数的极限

§1　函数

本节主要围绕函数的有界性，单调性，周期性，奇偶性举出相关的反例．

1.1　函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内处处有定义，但在 (a,b) 内不一定有界．

例　$f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内处处有定义，但在 $(0,1)$ 内无界．

1.2　处处有限而却处处局部无界的函数．

例　函数 $f(x)=\begin{cases} n, x=\frac{m}{n}(m,n\text{ 为互素整数})n>0 \\ 0, x\text{ 为无理数} \end{cases}$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

在任意点 x_0 处有限，而在 x_0 点附近是无界的. 事实上，若 $f(x)$ 在 x_0 点的邻域 $U(x_0,\varepsilon)$ 内有界，则 $U(x_0,\varepsilon)$ 内全体 $\frac{m}{n}$ 的分母 n 有界，从而 m 也有界，则在 $U(x_0,\varepsilon)$ 内有有限个有理点，这是不可能的.

1.3 任何严格单调函数必有反函数，但单调函数不一定有反函数.

例 函数 $f(x)=\begin{cases}x, 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1, 1<x\leqslant 2\end{cases}$

在[0,2]上单调增，而非严格单调增，此函数没有反函数.

1.4 非单调函数却有单值的反函数.

例 函数 $f(x)=\begin{cases}x, \text{为有理数}\\ -x, \text{为无理数}\end{cases}$

在区间 $(-\infty,\infty)$ 上不单调，但它为单值的，其反函数为此函数本身.

1.5 并非任意函数都有最小正周期.

例 狄利克雷函数：

$$D(x)=\begin{cases}1, x\ \text{为有理数}\\ 0, x\ \text{为无理数}\end{cases}$$

它的周期为全体有理数，因而没有最小正周期.

1.6 复合函数 $f[g(x)]$ 的定义域不一定为 $g(x)$ 的定义域.

例 $f(u)=\sqrt{1-u}, u=x$

$f(u)$ 的定义域为 $(-\infty,1]$，而 $u=g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

1.7 若函数 $f[u(x)]$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$u(x)$ 为偶函数，则 $f[u(x)]$ 必为偶函数. 但若 $u(x)$ 为奇函数，$f[u$

$(x)]$不一定为奇函数.

例 $f(u)=\cos u, u=\sin x$

$f(u)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,$u(x)$为奇函数,但$f[u(x)]=\cos\sin x$为偶函数.

1.8 并非任意两个函数都是可以复合的.

例 $f(x)=\sin x, g(x)=\ln x$

$\because f(x)$的值域为$[-1,1]$,$g(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,$[-1,1]\not\subset(0,+\infty)$,$\therefore f(x)$与$g(x)$不能复合.

§2 数列的极限

本节围绕数列极限的定义,无穷小与无穷大的概念,数列收敛的柯西准则等举出相关的反例.

定义 如果对于$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ N$,使得当$n>N$时,恒有$|a_n-a|<\varepsilon$成立,则称数列$\{a_n\}$以a为极限,记为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,或$a_n\to a(n\to\infty)$

若$a=0$,则称数列$\{a_n\}$为无穷小.

1.9 关于极限的定义首先说明下列的几种说法是错误的.

1°当n越大时,a_n-a越小,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

例 $a_n=-n, a=0$

则n越大时,$a_n-a=-n$越小,但$\{-n\}$无极限.

2°当n越大时,$|a_n-a|$越来越向零靠拢,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

例 $a_n=2+\frac{1}{n}, a=1$

则 $|a_n-a|=1+\frac{1}{n}$，当 n 越大时，$|a_n-a|$ 越来越向零靠拢但 $\geqslant 1$，因此 a_n 不以 1 为极限.

3°若 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N$，当 $n>N$ 时，总有无穷多个 a_n，满足 $|a_n-a|<\varepsilon$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

例 $a_n=\begin{cases}1, & n\text{ 为偶数}\\ \frac{1}{n}, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$

则对任意的 N，有无穷多个 $n=2m+1$，$m=1,2,\cdots$，使 $|a_n|=|a_{2m+1}|=\frac{1}{2m+1}<\varepsilon(n>\frac{1}{\varepsilon}$，取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}])$，但也有无穷多个 $n=2m$，$m=1,2,\cdots$，使 $|a_n-1|=\frac{1}{2m}<\varepsilon(n>\frac{1}{\varepsilon}$，取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}])$，因此 $\{a_n\}$ 没有极限.

4°$\forall\ N>0$，$\exists\ \varepsilon>0$，使当 $n>N$ 时，总有 $|a_n-a|<\varepsilon$

例 $a_n=\begin{cases}1, & n\text{ 为偶数}\\ -1, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$

显然 $\{a_n\}$ 没有极限，否则取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$，当 n 为偶数时，有

$$1-\varepsilon<a<1+\varepsilon,$$

即
$$\frac{1}{2}<a<\frac{3}{2} \tag{1}$$

但当 n 为奇数时，有

$$-1-\varepsilon<a<-1+\varepsilon,$$

即
$$-\frac{3}{2}<a<-\frac{1}{2} \tag{2}$$

(1)式与(2)式矛盾.

另一方面，取 $a=0$，对任意自然数 N，取 $\varepsilon=2$，总有

$$|a_n-a|=|\pm1-0|<2,$$

因此$\{a_n\}$满足4°中的要求.

1.10 用下面的说法来定义$\{a_n\}$不是无穷小都是错误的.

1°$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ N$,使当$n>N$时,总有$|a_n|>\varepsilon$.

例 $-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\cdots$,

它既不是无穷小,也不满足1°,因为取$\varepsilon=1$即可.

我们知道,这实际上是无穷大的定义.

2°$\forall\ \varepsilon>0$,找不到N,使当$n>N$时,总有$|a_n|<\varepsilon$

例 $1,2,1,2,\cdots$,

取$\varepsilon=3$时,就不满足2°,显然它不是无穷小.

3°$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ N$,使当$n>N$时,总有$|a_n-b|<\varepsilon$,其中$b\neq 0$.

例 $0,b,0,b,\cdots$,

取$\varepsilon=\frac{b}{2}$,显然不满足3°,它不是无穷小。

4°$\forall\ N>0,\exists\ \varepsilon_0>0$及$n_1>N$,使$|a_{n_1}|>\varepsilon_0$

例 $a_n=\frac{1}{n},\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$,但也满足4°,$\because\forall\ N>0$,取$\varepsilon_0=\frac{1}{N+1}$,则取$n_1=N+1$,就满足:

$$|a_{n_1}|=\frac{1}{N+1}\geqslant\varepsilon_0=\frac{1}{N+1}$$

5°$\exists\ \varepsilon_0>0$,及$N>0$,使当$n>N$时,总有$|a_n|\geqslant\varepsilon_0$.

例 $1,1,2,\frac{1}{2},3,\frac{1}{3},\cdots$

找不到具有上述性质的$\varepsilon_0>0$,且它也不是无穷小.

6°$\exists\ \varepsilon_0>0$,使对$\forall\ N$,当$n>N$时,总有$|a_n|\geqslant\varepsilon_0$.

这是上述5°的特殊情况,上面的例子已经说明了问题.

1.11　若$\{a_n\}$与$\{b_n\}$均发散，但$\{a_n+b_n\}$不一定发散。

例　$\{a_n\}=\{(-1)^n\}$，$\{b_n\}=\{(-1)^{n+1}\}$

它们均发散，但$\{a_n+b_n\}=\{0\}$，即$\{a_n+b_n\}$是收敛的.

1.12　若$\{a_n\}$与$\{b_n\}$均发散，但$\{a_nb_n\}$不一定发散.

例　$\{a_n\}=\left\{\dfrac{1+(-1)^n}{2}\right\}$，$\{b_n\}=\left\{\dfrac{1-(-1)^n}{2}\right\}$

显然它们均发散，但$\{a_n\cdot b_n\}=\{0\}$，显然$\{a_n\cdot b_n\}$是收敛的.

1.13　若$\{a_n\}$与$\{b_n\}$有一个收敛，另一个发散，则$\{a_n\cdot b_n\}$的敛散性不定.

例　1°$\{a_n\}=\{n\}$，$\{b_n\}=\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$

显然$\{a_n\}$发散，而$\{b_n\}$收敛，$\{a_n\cdot b_n\}=\{1\}$是收敛的.

2°$\{a_n\}=\{n^2\}$，$\{b_n\}=\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$

$\{a_n\}$发散，而$\{b_n\}$收敛，这时$\{a_n\cdot b_n\}=\{n\}$发散.

1.14　无穷小乘任意数列不一定为无穷小.

例　$\{a_n\}=\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$，$\{b_n\}=\{n\}$

$\{a_n\}$为无穷小，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$，但$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot b_n=1$.

1.15　无穷大乘任意数列不一定为无穷大.

例　$\{a_n\}=\{n\}$，$\{b_n\}=\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$

1.16　若$a_n>b_n(n=1,2,\cdots)$，但不一定有

$$\lim_{n\to\infty}a_n>\lim_{n\to\infty}b_n\text{（假设极限都存在）}$$

例　$a_n=\dfrac{2}{n}$，$b_n=\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$

$a_n>b_n(n=1,2,\cdots)$，但$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$

1.17　若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$. 但反之不真.

例　$\{a_n\}=\{(-1)^n\}$

$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=1$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在.

1.18　无穷多个无穷小之和不一定为无穷小.

例　$\sqrt{\dfrac{1}{n^2+1}},\sqrt{\dfrac{1}{n^2+2}},\sqrt{\dfrac{1}{n^2+3}},\cdots$

它们都是无穷小，但

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{n^2+1}}+\sqrt{\frac{1}{n^2+2}}+\cdots+\sqrt{\frac{1}{n^2+n}}\right)=1$$

因此不是无穷小.

1.19　两个数列都不是无穷小，而它们的积却可能是无穷小.

例　$\{a_n\}=\{1,0,1,0,\cdots\}$

$\{b_n\}=\{0,1,0,1\cdots\}$

它们都是发散的，但 $\{a_n\cdot b_n\}=\{0,0,\cdots\}$ 却是无穷小.

1.20　两个数列都不是无穷大，而它们的积却可能是无穷大.

例　$\{a_n\}=\{1,1,3,1,5,1,7,1,\cdots\}$

$\{b_n\}=\{1,2,1,4,1,6,1,8,\cdots\}$

显然它们都不是无穷大，但 $\{a_nb_n\}=\{1,2,3,\cdots\}$ 却是无穷大.

1.21　有界数列乘无穷小不一定为无穷小.

例　$\{a_n\}=\{1,0,1,0,\cdots\}$

$\{b_n\}=\{1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4}\cdots\}$

$\{a_n\}$ 是有界数列，$\{b_n\}$ 是无穷小，但 $\{a_n\cdot b_n\}=\{1,0,\dfrac{1}{3},0,\dfrac{1}{5},\cdots\}$ 不是无穷小.

1.22　有界数列乘无穷大不一定为无穷大.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com