高等数学习题课指导

刘德钦　　编

葛锁网　　审

兵器工业出版社

内容简介

本书是根据国家教委高等学校工科数学课程教学指导委员会制的《工科高等数学课程教学基本要求》编写的。

本书共分九章，包括分析引论（函数、极限、连续）、一元函数微分学、一元函数积分学、向量代数与空间解析几何、级数、多元函数微分学、重积分、线面积分和常微分方程。每节分内容提要、要求、重点、复习讨论题及其解答、例题及例题分析。

本书是理、工、农、医各专业的普通高校、电大、职大、函大等各类学校的学生学习高等数学的极好参考书，也可供工科高等数学教师、非数学专业的研究生及中专数学教师参考。

高等数学习题课指导

刘德钦 编　　葛锁网 审

*

兵器工业出版社 出版发行

（北京市海淀区车道沟10号）

新华书店北京科技发行所经销

国营五三一印刷厂印装

开本：787×1092 1/32　印张：14.2　字数：295.1千字

1988年8月第1版　1988年8月第1次印刷　印数：1～20000

ISBN 7-80038-029/O·3　　定价：3.50元

前　言

高等数学习题课，是配合课堂讲授，巩固教学效果，培养学生灵活运用所学知识去解决实际问题的能力的重要环节。它和讲课一样，也应突出重点、抓住关键、前后呼应，形成结构。一堂习题课，如果设计巧妙，组织得法，就能充分调动学生的积极性，主动性，增强教学效果。本书正是根据上述特点而编写的。

本书共分九章，包括分析引论(函数、极限、连续)、一元函数微分学、一元函数积分学、向量代数与空间解析几何、级数、多元函数微分学、重积分、线面积分与常微分方程。

本书每节由以下几部分组成：

1. 内容

根据国家教委高等学校工科数学课程教学指导委员会制定的《工科高等数学课程基本要求》列出了本单元中的主要概念、定义、性质、定理、公式等基本内容。

2. 要求

根据《工科高等数学课程基本要求》，指出本单元各部分内容应掌握的程度。

3. 重点

指出本单元学生应重点掌握的内容。

4. 复习讨论题

这部分主要是为学生加深对基本概念的理解，澄清不易理解的问题而选择的题目。

5. 例题

这部分精选了有代表性、启发性、综合性、真正能起到揭示解题规律的典型题目。这些题目对巩固重点，突破难点，加深对概念的理解大有益处。凡是超过电大、函大、职大学生“教学要求”的题目均用“*”表示，以示区别。

6. 复习讨论题解答

为加深学生对基本概念的理解，澄清学生头脑中的似是而非的问题，纠正学生在计算中易出现的错误，对复习讨论题作了详细的解答。

7. 例题分析

通过对典型例题的分析，指明了解题思路，总结了解题方法。并注意到一题多解，能使学生将已获得的知识得到进一步的深化和提高。

读者在使用本书时，建议先看一下每一节的内容、要求、重点、复习讨论题及例题，自己想一想，动手算一算，然后再去看复习讨论题解答及例题分析，这样帮助会大一些。

本书是在华东工学院应用数学系领导的关心和支持下出版的，许多同志为本书的出版给予了热情的帮助，我们在此一并感谢。

限于编者水平有限，书中难免出现各种错误，恳切希望广大读者批评指正。

编者

一九八七年九月

目　录

第一章　分析引论——函数、极限与连续

第一节　函数习题课

内容　函数概念，函数的几种特性，分段函数，复合函数，初等函数。

要求　深入理解函数的概念；会求函数的定义域和值域；会建立函数关系；会判定函数是否具有某种特性；熟练掌握基本初等函数的性质和图形；掌握复合函数的概念，会把复合函数拆成基本初等函数。

重点　函数概念

一、复习讨论题

1．叙述函数的定义，确定一个函数有哪几个要素？

2．下列各组函数是否为同一函数？为什么？

（1）　$y=\ln x^2$　与$y=2\ln x$

（2）　$y=|x|$　与$y=\sqrt{x^2}$

（3）　$y=\dfrac{x^2}{x}$　与$y=x$

3．指出下列函数的定义域

（1）圆面积与圆半径之间的函数关系：$A=\pi x^2$

（2）　$y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$

(3) $y=\sqrt{\sin x}$

(4) $y=\log_a\cos x$ ($a>1$)

(5) $y=\arcsin\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$

4. 函数$y=\sqrt{u}$和$u=\operatorname{sgn}x$能否构成一个复合函数？

5. 指出下列函数是怎样复合而成的？

(1) $y=\sqrt[3]{(1+4x)^2}$　　(2) $y=\arcsin(1-x)^3$

(3) $y=2^{\sin^2 x}$　　(4) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

二、例题

1. 求下列函数的定义域

(1) $y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$

(2) 已知$f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且$\varphi(x)\geqslant 0$，求$\varphi(x)$及其定义域。

2. 设函数$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，求$f(-x)$；$f(a+b)$；$[f(x)]^2$；$f[f(x)]$；$f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$

3. 已知$y=f(x)$的定义域是$[0,1]$，求

(1) $f(\lg x)$；(2) $f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$的定义域。

4. 设$f(x)=\begin{cases}x^2+x, & 当x\leqslant 1\\ x+5, & 当x>1\end{cases}$ 求$f(x+a)$。

5*. 设$g(x)=\begin{cases}1, & 当x\geqslant 0\\ -1, & 当x<0\end{cases}$

$$f(x)=\begin{cases}\lg x, & \text{当} x>0\\ x+1, & \text{当} x\leqslant 0\end{cases}$$

求$f[g(x)]$。

6. 设$M(x, y)$是曲线$y=x^2$上的动点，（如图1-1）问：

（1）弧$\overset{\frown}{OM}$的长度是否为x的函数？

（2）图1-1中阴影部分的面积是否为x的函数？

（3）当垂直于x轴的直线AB连续地平行移动通过图1—2中的阶梯形时，若直线AB的垂足为$x(0\leqslant x\leqslant 1)$，试将

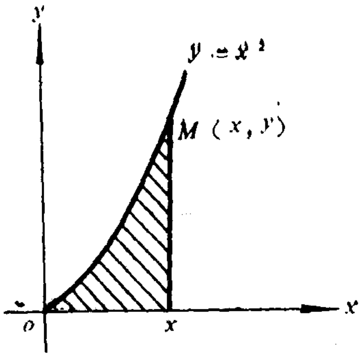

图1-1

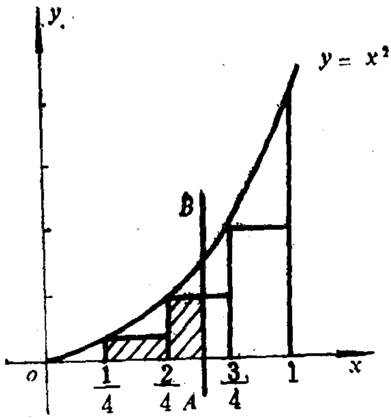

图1-2

阴影部分的面积S表为距离x的函数。

7. 下列函数中哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些是非奇非偶函数？

（1）$f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$

（2）$f(x)=(x^2+x)\sin x$

（3）$f(x)=\begin{cases}\pi+x, & 当 -\pi\leqslant x<0\\ \pi-x, & 当 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$

8. 证明：定义在对称区间（$-l$，l）内的任何函数 $f(x)$ 都可以表示为偶函数与奇函数之和的形式，并且表示法是唯一的。

9*. 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义，且$f(x)\neq 0$ $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$，试求 $f(1988)$。

10*. 设函数$f(x)$在（$-\infty$，$+\infty$）上是奇函数，且 $f(1)=a$，又对任何 x 值均有$f(x+2)-f(x)=2$。

（1） 试用 a 表示$f(2)$和$f(5)$；

（2） 问 a 取何值时，$f(x)$是以 2 为周期的周期函数。

11*. 用$[x]$表示 x 的整数部分（即不大于 x 的最大整数），证明：$y=x-[x]$ 是周期函数。并作出此函数的图形。

三、复习讨论题解答

1. 叙述函数的定义，确定一个函数有哪几个要素？

答 函数定义略。函数的定义中包含三个要素：（1）定义域（用D表示）：自变量的取值范围。（2）对应规律 f：自变量的值与因变量的值之间的对应关系。根据这个关系，对自变量x在定义域D中每一个值x_0，可以确定出因变量y的对应值$f(x_0)$。(3)值域$R=\{y: y=f(x), x\in D\}$：因变量的取值范围。在三要素中，定义域和对应规律是基本的，值域完全被定义域与对应规律所确定。

2. 下列各组函数是否为同一函数？为什么？

（1）$y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$

（2） $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$

（3） $y=\dfrac{x^2}{x}$ 与 $y=x$

解 （1） $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$ 不是同一函数，因为 $y=\ln x^2$ 的定义域是 $\{x: x\neq 0\}$ 不同于 $y=2\ln x$ 的定义域 $\{x: x>0\}$。

（2） $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 虽然表示形式不同，但定义域与对应规律都相同，所以它们是同一函数。

（3） $y=\dfrac{x^2}{x}$ 的定义域 $\{x: x\neq 0\}$ 不同于 $y=x$ 的定义域 $\{x: -\infty<x<+\infty\}$，故两函数不相同。

总之，两个函数相等的充要条件是它们的定义域与对应规律都相同。

3． 指出下列函数的定义域。

（1） 圆面积与圆半径之间的函数关系：$A=\pi x^2$

（2） $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$

（3） $y=\sqrt{\sin x}$

（4） $y=\log_a \cos x$ （$a>0$）

（5） $y=\arcsin\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$

解：（1） $\{x: x>0\}$；

（2） $\{x: x\neq 1,\ x\neq 2\}$；

（3） $\{x: 2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi,$

$k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$；

(4) $\left\{x:\ \frac{\pi}{2}(4k-1)<x<\frac{\pi}{2}(4k+1),\right.$

$\left. k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\right\}$;

(5) $\left\{x:\ -\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right\}$。

注：确定函数的定义域时，首先要根据函数的实际意义来确定自变量的变化范围，如(1)中的 x 表示圆半径，故只能取正值。如果函数是用分析式表示的，那么其定义域为使表达式有意义的一切实数。如(2)中用分式表示的函数，定义域为使分母不等于零的所有实数；(3)中的函数含有偶次根式，根号下的被开方式不能取负值；对数函数其真数必须大于零；反三角函数 $\arcsin x$，$\arccos x$ 中 x 的绝对值不大于1。

4. 函数 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=\operatorname{sgn}x$ 能否构成一个复合函数。

答：不能。$y=f(u)$ 和 $u=\phi(x)$ 要能构成复合函数，必须且只需 $u=\phi(x)$ 的值域完全落在 $y=f(u)$ 的定义域中。$u=\operatorname{sgn}x$ 的值域为 $\{-1,\ 0,\ 1\}$，$y=\sqrt{u}$ 的定义域为 $[0,\ +\infty)$，因 $-1\notin[0,\ +\infty)$，故 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=\operatorname{sgn}x$ 不能构成复合函数。

5. 指出下列函数是怎样复合而成的。

(1) $y=\sqrt[3]{(1+4x)^2}$　　(2) $y=\arcsin(1-x)^3$

(3) $y=2^{\sin^2 x}$　　(4) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

解　(1) $y=u^{\frac{2}{3}}$，$u=1+4x$

(2) $y=\arcsin u$，$u=v^3$，$v=1-x$。

(3) $y=2^u$，　$u=v^2$，$v=\sin x$。

（4） $y=\ln u$,　　$u=x+\sqrt{v}$, $v=1+x^2$。

四、例题分析

1. 求下列函数的定义域：

（1） $y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$

（2） 已知$f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且$\varphi(x)\geqslant 0$，求$\varphi(x)$及其定义域。

解 （1） 当$\sqrt{x^2-x-6}$与$\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$同时有定义时，函数才有定义，而这就要求满足下列不等式组：

$$x^2-x-6\geqslant 0 \qquad (\text{i})$$

$$\left|\frac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1 \qquad (\text{ii})$$

由（i）得：$(x-3)(x+2)\geqslant 0$　解得$x\geqslant 3$或$x\leqslant -2$

由（ii）得：$-7\leqslant 2x-1\leqslant 7$　　解得$-3\leqslant x\leqslant 4$

这两组解的公共部分就是上述不等式组的解，因此，函数的定义域为$-3\leqslant x\leqslant -2$或$3\leqslant x\leqslant 4$（如图1-3）。

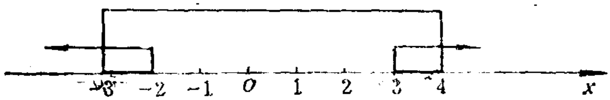

图1-3

（2）因为$f(x)=e^{x^2}$，所以$f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}$。

又因为$f[\varphi(x)]=1-x$，所以$e^{\varphi^2(x)}=1-x$。

依题意得　$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$。

当$\ln(1-x)\geqslant 0$时，$\varphi(x)$有意义。

即　$1-x\geqslant 1$，亦即$x\leqslant 0$。

因此，$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$ 的定义域为$x\leqslant 0$。

2. 设函数$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，求$f(-x)$；$f(a+b)$；$[f(x)]^2$；$f[f(x)]$；$f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$。

解 $f(-x)=\dfrac{1}{1-x}$

$$f(a+b)=\frac{1}{1+(a+b)}$$

$$[f(x)]^2=\left[\frac{1}{1+x}\right]^2=\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f[f(x)]=f\left(\frac{1}{1+x}\right)=\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}=\frac{x+1}{x+2}$$

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=f(x+1)=\frac{1}{1+(x+1)}=\frac{1}{x+2}$$

3. 已知$y=f(x)$的定义域是$[0,1]$，求

(1) $f(\lg x)$；(2) $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$的定义域。

解 这是求复合函数定义域的问题，若$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，要求$u=\varphi(x)$的值域在$y=f(u)$的定义域内，因而有

(1) 应有$0\leqslant\lg x\leqslant 1$即$1\leqslant x\leqslant 10$，因此$f(\lg x)$的定义域为$1\leqslant x\leqslant 10$。

(2) (2)的定义域应为$f(x+a)$与$f(x-a)$的定义域的公共部分。$f(x+a)$的定义域为$\{x:\ -a\leqslant x\leqslant 1-a\}$。事实上，由题设应有$0\leqslant x+a\leqslant 1$，即$-a\leqslant x\leqslant 1-a$。同理$f(x-a)$的定义域为$\{x:\ a\leqslant x\leqslant 1+a\}$。故$f(x+a)+f(x-a)$

的定义域由$1-a$与a的大小决定：

（i）若$1-a<a$，即$a>\frac{1}{2}$时，则此函数无意义。

（ii）若$1-a=a$，即$a=\frac{1}{2}$时，则此函数的定义域是$x=\frac{1}{2}$。

（iii）若$1-a>a$，即$0<a<\frac{1}{2}$时，则此函数的定义域是$a\leqslant x\leqslant 1-a$。

4．设$f(x)=\begin{cases} x^2+x, & \text{当} x\leqslant 1; \\ x+5, & \text{当} x>1。\end{cases}$

求$f(x+a)$

解　下面做法对吗？

用$x+a$替换$f(x)$中的x，得

$$f(x+a)=\begin{cases} (x+a)^2+(x+a), & \text{当} x\leqslant 1; \\ (x+a)+5, & \text{当} x>1。\end{cases}$$

这种做法是错误的，请找出错误原因。

下面是正确做法：

当$x+a\leqslant 1$时，即$x\leqslant 1-a$时，应将$x+a$代入到前一个式子中的x处；当$x+a>1$时即$x>1-a$时，应将$x+a$代入到后一个式子中的x处，所以有

$$f(x+a)=\begin{cases} (x+a)^2+(x+a), & \text{当} x\leqslant 1-a; \\ (x+a)+5, & \text{当} x>1-a, \end{cases}$$

5*．设$g(x)=\begin{cases} 1, & \text{当} x\geqslant 0; \\ -1, & \text{当} x<0。\end{cases}$

$$f(x)=\begin{cases} \lg x, & \text{当} x>0; \\ x+1, & \text{当} x\leqslant 0。\end{cases}$$

求$f[g(x)]$

解 $f[g(x)]=\begin{cases}\lg[g(x)], & 当g(x)>0;\\ g(x)+1, & 当g(x)\leqslant 0。\end{cases}$

因为当$g(x)>0$时，有$x\geqslant 0$，当$g(x)\leqslant 0$时，有$x<0$，所以可得：

$$f[g(x)]=\begin{cases}\lg 1, & 当x\geqslant 0;\\ -1+1, & 当x<0。\end{cases}$$

$$=0$$

此时$f[g(x)]$的定义域为$(-\infty, +\infty)$

6．设$M(x, y)$是曲线$y=x^2$上的动点，（如图1-1）问：（1）弧$\overset{\frown}{OM}$的长度是否为x的函数？

（2）图1-1中阴影部分的面积是否为x的函数？

（3）当垂直于x轴的直线AB连续地平行移动通过图1-2中的阶梯形时，若直线AB的垂足为x（$0\leqslant x\leqslant 1$），试将阴影部分的面积S表为距离x的函数。

解 （1）是。因为对$(0, +\infty)$中每一x值，都有一段弧$\overset{\frown}{OM}$的长度与之对应，所以弧$\overset{\frown}{OM}$的长度是x的函数。

（2）是。理由与（1）类似。

（3）当x在定义域$\{x: 0\leqslant x\leqslant 1\}$内连续变动，我们把它分成下列各区间来得出对应的$S$值。

显然， 当$0\leqslant x\leqslant \frac{1}{4}$时，$S=0$

当$\frac{1}{4}<x\leqslant \frac{1}{2}$时，$S=\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(x-\frac{1}{4}\right)$

当$\frac{1}{2}<x\leqslant \frac{3}{4}$时，

$$S=\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

当$\frac{3}{4}<x\leqslant 1$时，

$$S=\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(x-\frac{3}{4}\right)$$

由此：

$$S(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{4};\\ \frac{1}{4^2}\left(x-\frac{1}{4}\right), & \text{当 } \frac{1}{4}<x\leqslant\frac{1}{2};\\ \frac{1}{4^3}+\frac{1}{2^2}\left(x-\frac{1}{2}\right), & \text{当 } \frac{1}{2}<x\leqslant\frac{3}{4};\\ \frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^2}+\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(x-\frac{3}{4}\right), & \text{当 } \frac{3}{4}<x\leqslant 1。\end{cases}$$

7. 下列函数中哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些是非奇非偶函数？

（1） $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$

（2） $f(x)=(x^2+x)\sin x$

（3） $f(x)=\begin{cases}\pi+x, & \text{当 } -\pi\leqslant x<0;\\ \pi-x, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant\pi。\end{cases}$

解 （1） $f(-x)=\lg(-x+\sqrt{1+(-x)^2})$

$$=\lg\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\lg\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\lg(x+\sqrt{1+x^2})$$