配合人教社初中新教材使用（2002年修订本）

北京九所名校

金牌解题

初二几何 全一册

本册主编 倪斯杰 清华大学附中 特级教师

北京大学附中
清华大学附中
北京师范大学附中
北京二中
北京四中
北京八中
北京八十中
北京师范大学实验中学
中国人民大学附中
教师编写组

团结出版社 知识出版社

编者的话

◉ 经人教社授权并经人教社资深编辑审定，与人教版初中新教材严格同步
◉ 以习题和试题为主，分层次设置铜、银、金牌题，检验和激励学业金牌
◉ 荟萃名校名师，集中重点、难点与考点，突出综合应用和发散思维训练

《北京九所名校金牌解题》丛书自2001年出版以来，得到全国各地教师、家长的好评，尤其受到广大中学生的欢迎。这次修订出版，我们广泛听取了社会各界的意见，力求贯彻教育部关于中学教学和升学考试改革的精神，紧扣人民教育出版社修订出版的2002年秋季初中教材，使本丛书内容特色更加突出鲜明。

一、加强针对性，提高实用性。首先，遵照教育部最新颁布的教学大纲和新的教改精神，针对人民教育出版社出版的2002年秋季初中教材三个年级共24种(包括初一7种、初二9种、初三8种)课本进行了全面修订的状况，经人民教育出版社授权并经人民教育出版社各科资深编辑审定，本丛书24种辅导读物都进行了大幅度调整修改，做到与新教材严格同步。其次，从学生的实际需要出发，本丛书坚持精编精练、以习题为主的原则。为尽量减轻学生负担，学期本一般在16万字左右，学年本也严格控制在26万字左右。各学科依课本单元体例，除了必要的知识结构和目标要求的介绍之外，每种书90%的内容都是例题解析、单元练习和测验，以及期中期末试题。第三，内容集中。有关例题解析注意突出不同知识点的典型性和启示性，大量的习题和测试题注意有关重点、难点和考点内容，特别注意对一些在教学中经常出现的疑点、易误点和引申点内容的讲解提示和专题训练，这样使本丛书大大增强了在教学中的针对性和实用性。

二、突出金牌解题，激励金牌学习。本丛书一个与众不同的特点是，在大量的单元练习和测试题中，依据不同层次，特意按铜牌题、银牌题和金牌题进行划分和设置。铜牌题主要为知识重点、难点、疑点等的选择题，侧重于基本知识的记忆与掌握；银牌题则多为知识点实际应用的一些选择题和问答题，侧重于学科知识的全面了解和灵活运用；金牌题则突出一些难度较高的本学科知识点扩展和引申的综合训练题，以及本学科和相关学科彼此交叉的发散思维题，更突出综合分析思维能力训练。全部习题和试题都附有参考答案，一些有难度、较复杂的题目还附有解题提示。这种特色安排，既照顾到一般同学的基本学业水平和教学大纲的基本要求，尤其有利于广大学生检验和了解自己的学业程度，激发学习的兴趣和进取心，不断提高学业成绩和综合素质，争创学业金牌。

三、荟萃名校名师，打造“金牌”名牌。本丛书24种图书按不同学科由北京大学附中、清华大学附中、中国人民大学附中北京师范大学附中、北京师范大学附属实验中学、北京二中、四中、八十中、一零一等北京名牌中学的特、高级教师和骨干教师主编、撰稿，集中总结了他们多年的教学经验。丛书既注意学科基础知识的牢固掌握，又注意解题难度、强度的提高；既注意突出学科知识点及其内在联系的系统讲解，又注意相关学科知识的综合应用和发散思维训练；既注意典型例题和考点习题的示范，又注意解题思路和答题技巧的介绍。它充分适应我国中学教学实践，努力体现中学教学改革方向，全面反映名校名师的先进教学水平，在众多的教辅读物中，力求打造精品名牌。我们热诚希望本丛书能为广大中学师生赢得一块块教学金牌提供有益帮助。

由于我国中学教学改革的实践还处在探索过程中，本书的编著者也在不断学习和实践，丛书中难免存在不妥和错讹之处，希望得到社会各界和广大中学师生批评指正。

2002年5月

目　录

第三章　三　角　形

一、三角形

(一) 基本知识点透析

1. 知识点

(1) 三角形，三角形的角，外角、边及三角形角平分线、中线、高线的定义.

(2) 三角形三条边之间的关系及三角形的分类.

(3) 三角形的内角和定理及其推论.

2. 重点：

(1) 定理：三角形的内角和等于 180°

推论：三角形的一个外角等于和它不相邻的两内角和.

(2) 定理：三角形两边之和大于第三边.

3. 难点：

三角形的角与角及边与边之间的关系.

4. 误点：

三角形的边上高不一定在三角形的内部.

(二) 重难点解析

【例 1】 已知：如图 3-1，E 为 BC 上一点，D 在 BA 的延长线上，DE 交 AC 于 F 点，$\angle B=45°$，$\angle C=30°$，$\angle EFC=70°$，求：$\angle D$ 的度数.

【分析】 要求$\angle D$ 的度数，注意到$\angle D$ 在$\triangle AFD$ 内或$\triangle BED$ 内，因此可考虑$\triangle AFD$ 或$\triangle BED$，有两种解法. 若考虑$\triangle AFD$，注意到$\angle DFA$ 和$\angle EFC$ 是对顶角，可求出$\angle DAF$，又$\angle DAF$ 为$\triangle ABC$ 的外角，由三角形的外角性质及题目条件可求出$\angle DAF$；若考虑$\triangle BED$，注意到$\angle DEB=\angle C+\angle EFC$，因而可求出，而$\angle B$ 已知，由三角形的内角和定理求出$\angle D$.

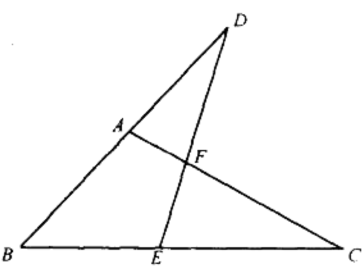

图　3-1

【解法 1】 $\because \angle DAF=\angle B+\angle C=45°+30°=75°$，

$\angle AFD=\angle EFC=70°$，

$\therefore \angle D=180°-\angle AFD-\angle DAF=180°-70°-75°=35°$

【解法 2】 $\because \angle DEB = \angle C + \angle EFC = 30° + 70° = 100°$

$\therefore \angle D = 180° - \angle B - \angle BED = 180° - 45° - 100° = 35°$

【小结】

关于求此类角的问题，一般是看所求的角在哪些三角形中，这些三角形的其他角是否能利用已知角或三角形角之间的关系求出，如能求出，问题就得到解决.

【例 2】 已知等腰三角形一边等于 4cm，一边等于 9cm，那么它的周长等于______cm.

【分析】 要求出三角形的周长，必须先求出三角形的各边，由已知可知腰长可能为 4cm，也可能为 9cm，但由三角形三边的关系可知腰长不可能为 4cm，所以三边长为：9cm，9cm，4cm.

【解】 设另一边长为 $x$cm，根据三角形三边之间的关系有：

$$9 - 4 < x < 4 + 9 \quad 即 \quad 5 < x < 13$$

$\therefore$ 另一腰长为 9cm.

$\therefore$ 三角形的周长为：$9 + 9 + 4 = 22$ (cm).

【小结】 已知等腰三角形两边长，求周长，必须要先确定腰长，确定腰长的依据是利用三角形三边之间的关系：第三边的长应大于另两边之差而小于另两边之和.

【例 3】 如图 3-2 所示，$\triangle ABC$ 中，D 为 BC 上一点，$DF \perp BC$，$DE \perp AB$ 于 E，若 $\angle AFD = 155°$，$\angle B = \angle C$，求 $\angle FDE$ 的度数：

【分析】 要求 $\angle FDE$ 的度数，首先要判断它是如何形成的，$FD \perp BC$、$DE \perp AB$，可见它是由两条垂线构成的，这时，从已知可得 $\angle AFD = 155°$，从而可以求出 $\angle DFC$ 的度数及 $\angle C$ 的度数，又因 $\angle B = \angle C$，故可求出 $\angle B$ 的度数，因此可求出 $\angle EDB$ 的度数. 此时不难发现 $\angle FDE$ 与 $\angle EDB$ 相关，即 $\angle FDE$ 与 $\angle EDB$ 互余.

【解】 $\because \angle AFD + \angle DFC = 180°$，$\angle AFD = 155°$

$\therefore \angle DFC = 25°$

$\because FD \perp BC$

$\therefore \angle FDC = 90°$

$\therefore \angle DFC + \angle C = 90°$

$\therefore \angle C = 65°$

$\because \angle B = \angle C$

$\therefore \angle B = 65°$

$\because DE \perp AB$

$\therefore \angle DEB = 90°$

$\because \angle B + \angle EDB = 90°$

$\therefore \angle EDB = 25°$

$\because \angle FDC + \angle FDE + \angle EDB = 180°$

$\therefore \angle FDE = 180° - 25° - 90° = 65°$

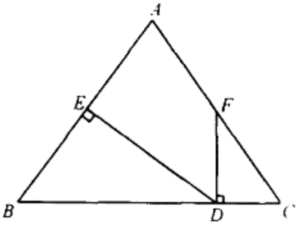

图 3-2

【小结】 在某些特殊三角形的求角问题中，注意到其特殊性，如直角三角形两锐角互余、等腰三角形知其一角的度数，可求出其他两角度数.

【例 4】 已知：如图 3-3，$\triangle ABC$ 中，$\angle A = 70°$，BE 是 AC 上的高，CF 是 AB 上的高，H 是 BE 和 CF 的交点，求 $\angle BHC$ 的度数.

【分析】 利用三角形的高线的定义和直角三角形两锐角互余求出 $\angle BFH$ 和 $\angle ABE$、从

而求出$\angle BHC$.

【解】 $\because BE$ 是 AC 上的高，CF 是 AB 上的高，

$\therefore \angle AEB=90°$，$\angle BFC=90°$

在$\triangle ABE$ 中

$\because \angle A+\angle ABE+\angle AEB=180°$，$\angle A=70°$，

$\angle AEB=90°$，

$\therefore \angle ABE=180°-70°-90°=20°$

在$\triangle BHF$ 中，

$\because \angle BHC=\angle FBH+\angle BFH$，$\angle BFH=90°$，$\angle FBH=20°$，

$\therefore \angle BHC=90°+20°=110°$

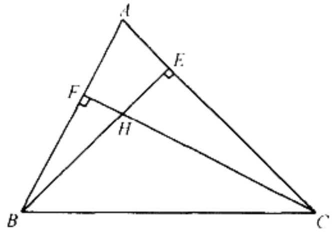

图 3-3

【例 5】 等腰三角形 ABC 中，腰 AC 上的中线 BD 把三角形的周长分为 9 和 15 两部分，求这个三角形各边的长.

【分析】 题中含有三个条件，一是“等腰”，于是有 $AB=AC$，二是“中线”，于是有 $AD=DC$，三是“周长分为 9 和 15 两部分”，因而就出现两种情况：$AB+AD=9$，$BC+CD=15$ 或 $AB+AD=15$，$BC+CD=9$，因此，可以利用方程组的知识求出三边长.

【解】 设 AB、BC 和 CA 的长分别为 x，y，z，则：

$$\begin{cases} x=z \\ x+\dfrac{z}{2}=9 \\ y+\dfrac{z}{2}=15 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x=z \\ x+\dfrac{z}{2}=15 \\ y+\dfrac{z}{2}=9 \end{cases}$$

分别解设 $x=z=6$，$y=12$ 或 $x=z=10$，$y=4$

但 $x+z=12=y$，不满足三角形三边之间的关系，因而只能是 $x=z=10$，$y=4$.

答：三角形的三边长分别为 10，10，4.

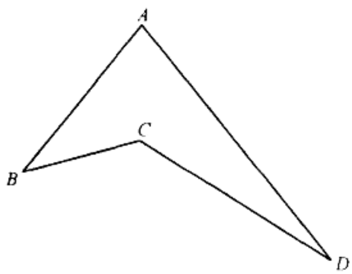

图 3-4

（三）知识点引申

【例 6】 如图 3-4，C 是$\angle BAD$ 内一点，连 CB，CD.

求证：$\angle BCD=\angle B+\angle A+\angle D$

【分析】 要证$\angle BAD=\angle B+\angle A+\angle D$，是不可能直接证明，因为和我们所学的相关定理没有任何联系，因此需要进行转化，转化成我们所熟悉的图形加以证明，即转化为三角形，若连结 AC，则转化成两个三角形，但各角之间的关系不是很明显，再延长 AC 则可构成三角形的外角关系，从而可证结论，另一方面，若直接延长 BC 或 DC 就可转化成含外角关系的三角形，从而可推证出结论.

【证法 1】 如图 3-5 连接 AC 且延长到一点 E

$\because \angle BCE=\angle CAB+\angle B$

且$\angle ECD=\angle D+\angle CAD$

$\therefore \angle BCE+\angle ECD=\angle CAB+\angle B+\angle D+\angle CAD$

$\because \angle BCE+\angle ECD=\angle BCD$，$\angle CAB+\angle CAD=\angle BAD$

$\therefore \angle BCD=\angle B+\angle BAD+\angle D$

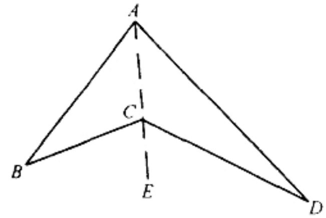

图 3-5

【证法 2】 如图 3-6 延长 DC 交 AB 于 M 点：

$\because \angle BCD$ 是 $\triangle BCM$ 的外角，

$\therefore \angle BCD = \angle B + \angle BMC$.

$\because \angle BMC$ 是 $\triangle AMD$ 的外角，

$\therefore \angle BMC = \angle A + \angle D$.

$\therefore \angle BCD = \angle B + \angle A + \angle D$.

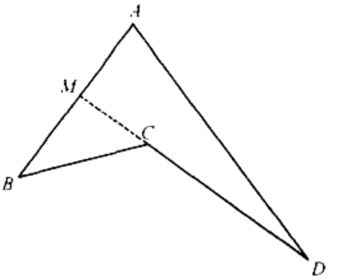

图 3-6

【小结】 当题目的图形是我们不熟悉的图形时，一般要用作辅助线的方法把它们转化成我们所熟悉的图形，再利用相关定理加以解决，作辅助线常见的方法有：①连接两点之间的线段，②延长线段，③在直线和线段上截取一条线段、④过一点作已知直线的平行线、

【例 7】 如图 3-7 所示，点 P 为$\triangle ABC$ 内一点，求证：

$$PA + PB + PC < AB + AC + BC$$

【分析】 显然要利用三边之间的关系，但是这些线段没有相对集中在一个三角形中，因此须作辅助线，延长 BP 交 AC 于 Q，容易证明 $AB + AC > BP + PC$，同理可证 $AP + BP < AC + BC$，$AP + PC < AB + BC$，三式相加即可．

【证明】 延长 BP 至 Q，与 AC 交于 Q.

在$\triangle ABQ$ 中，$\because AB + AQ > BQ$

在$\triangle PQC$ 中，$\because PQ + QC > PC$

$\therefore AB + AQ + PQ + QC > BQ + PC$

即 $AB + AC + PQ > BP + PQ + PC$

$\therefore AB + AC > BP + PC$

类似可证：$AB + BC > AP + PC$，$BC + AC > AP + BP$

$\therefore 2(AB + AC + BC) > 2(AP + BP + CP)$

即　$AP + BP + CP < AB + AC + BC$

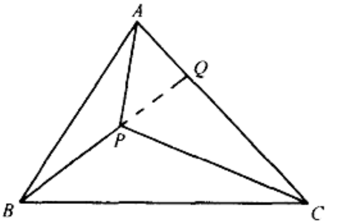

图 3-7

(四) 金牌题解和知识点应用

☆基本能力训练题(铜牌题)

一、选择题

1. 三角形的高是一条　　　　(　　)

A. 直线　　B. 垂线　　C. 垂线段　　D. 射线

2. 下面四组数据中能构成三角形是　　　　(　　)

A. 2、2、4　　B. 1，2，4　　C. 1，1，4　　D. 2，3，4

3. 已知三角形的两边长是 6，8，那么第三边 a 的取值范围是　　　　(　　)

A. $2 \leqslant a < 14$　　B. $2 \leqslant a \leqslant 14$　　C. $2 < a \leqslant 14$　　D. $2 < a < 14$

4. 在三角形的内角中，最多可能有　　　　(　　)

A. 两个锐角　　B. 两个钝角

C. 两个直角　　D. 一个钝角或一个直角

5. 如果三角形的一个内角等于其他两角的差，那么这个三角形一定是　　　　(　　)

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形

C. 钝角三角形　　　　　　　　D. 等边三角形

6. 锐角三角形中，任意两角之和必大于　　（　　）

A. 90°　　B. 100°　　C. 110°　　D. 120°

7. 在△ABC 中，$\angle A = 50°$，$\angle B$ 比$\angle C$ 大 30°，则$\angle B$ 的度数是　　（　　）

A. 50°　　B. 80°　　C. 50°或 80°　　D. 以上都不对

8. 三角形三个角的度数的比为 2:3:4、则这个三角形三个内角的度数是　　（　　）

A. 20°，30°，40°　　B. 40°，60°，80°

C. 36°，54°，90°　　D. 不能确定

9. 如图 3-8，△ABC 中，$\angle B = \angle ACB$，$CD \perp AB$ 于 D，CE 平分$\angle ACB$，若$\angle DCE = 42°$，则$\angle BAC$ 的度数是（　　）

A. 118°　B. 116°　C. 114°　D. 112°

10. 已知△ABC 中，$\angle A = 46°$，BD，CE 平分$\angle ABC$，$\angle ACB$，且 BD、CE 交于 F 点，则$\angle BFC$ 等于　　（　　）

A. 136°　B. 163°　C. 123°　D. 113°

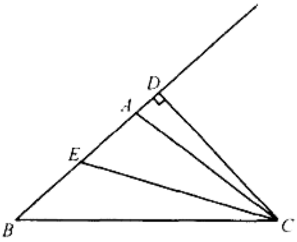

图 3-8

二、填空题

11. 等腰三角形的周长为 24cm，若其中一边长为 6cm，则其他两边长分别为______.

12. △ABC 中，$\angle A:\angle B:\angle C = 1:3:5$，则$\angle A =$______，$\angle B =$______，$\angle C =$______，这个三角形按角分类是______三角形.

13. 以 a，b，c 为三边的三角形的周长为 15，若 $a + c = 2b$，$a + b = 2C$，则 $a =$______，$b =$______，$c =$______.

14. △ABC 中，若$\angle A = \frac{2}{3}\angle B$，$\angle A = \frac{4}{5}\angle C$，则$\angle A =$______，$\angle B =$______，$\angle C =$______.

15. 等腰三角形的一个角为 50°，则其余两个角的度数为______.

16. 如图 3-9，△ABC 中，CD 是$\angle ACB$ 的平分线，DE 平分$\angle CDB$，若$\angle A = 66°$，$\angle B = 44°$，则$\angle ADE =$______.

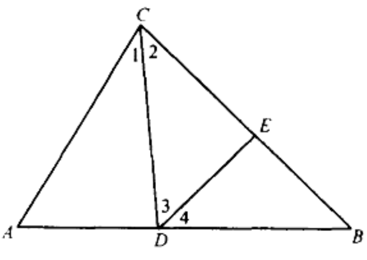

图 3-9

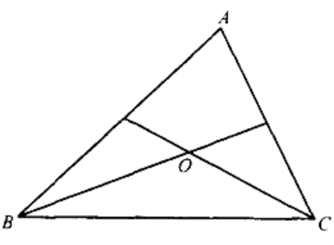

图 3-10

三、解答题

17. 周长为 21cm 的等腰三角形，被它一腰上的中线分成了两个三角形，若这两个三角形周长的差为 3cm，求这个等腰三角形的边长.

18. 已知：如图 3-10，△ABC 中，$\angle ABC$、$\angle ACB$ 的平分线交于 O 点，求证：$\angle BOC =$

$90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$.

19. 已知：如图 3-11，$\triangle ABC$ 中，$\angle B$ 的平分线交 $\angle C$ 的外角平分线于 D 点，$\angle A=90^\circ$，求 $\angle D$ 的度数.

20. 如图 3-12，$\triangle ABC$ 中，$BA\perp CA$ 于 A，E 是 BC 上一点，D 是 BA 延长线上一点，连 DE 交 AC 于 F，若 $\angle D=39^\circ$，$\angle C=42^\circ$，求 $\angle DEB$ 的度数.

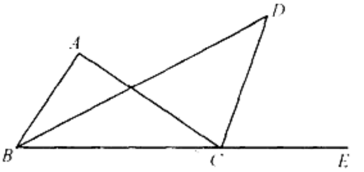

图 3-11

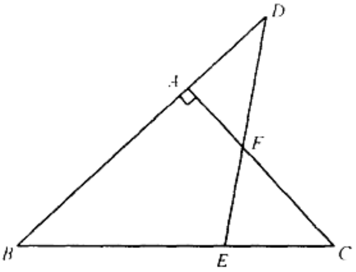

图 3-12

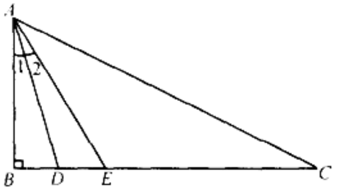

图 3-13

☆能力拓展训练题(银牌题)

21. 如图 3-13，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=90^\circ$，$\angle C=34^\circ$，$\angle 1=\angle 2$，$\angle ADC=104^\circ$，求 $\angle CAE$ 的度数.

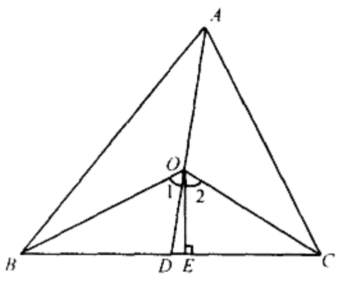

图 3-14

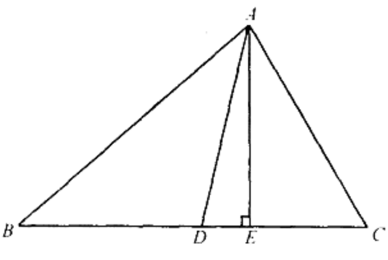

图 3-15

22. 如图 3-14，已知 $\triangle ABC$ 中，AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于 D，BO 平分 $\angle ABC$，CO 平分 $\angle ACB$，$OE\perp BC$ 于 E 点. 求证：$\angle 1=\angle 2$.

23. 如图 3-15，AD 平分 $\angle BAC$，$AE\perp BC$ 于 E，$\angle C>\angle B$. 求证：$\angle DAE=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$.

☆创新意识训练题(金牌题)

24. 如图 3-16，CP、BP 分别平分 $\angle DCA$，$\angle ABD$

求证：$\angle P=\frac{1}{2}(\angle A+\angle D)$.

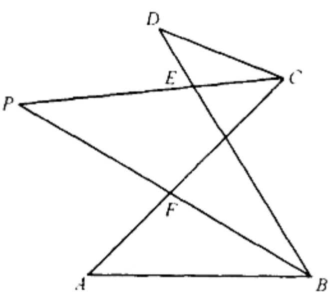

图 3-16

25. 如图 3-17，D 是$\triangle ABC$ 的$\angle C$ 的外角平分线与 BA 的延长线的交点，求证：$\angle BAC > \angle B$.

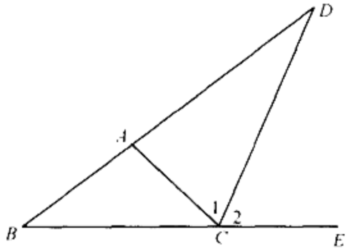

图 3-17

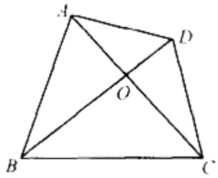

图 3-18

26. 已知，如图 3-18 四边形 $ABCD$，求证：$\frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA) < AC + BD < AB + BC + CD + DA$.

二、全等三角形

(一) 基本知识点透析

1. 知识点：

(1) 全等三角形的基本概念，全等三角形的对应边及对应角.

(2) 全等三角形的性质及判定方法："SAS"、"ASA"，"AAS"，"SSS"，及直角三角形的判定方法，"HL"

(3) 三角形的角平分线定理

(4) 命题，互逆命题，定理，互逆定理的定义.

2. 重点：

灵活的应用全等三角形的判定方法证明两个三角形全等.

3. 难点：

证明两三角形全等，掌握几何中命题的证明书写过程，书写要规范，推理要有理有据，有层次.

4. 误点：

找全等三角形的对应边，对应角，应注意分清，还要注意"SSA"有时是不成立的，不能运用它来判定两三角形全等.

(二) 重难点解析

【例 1】 已知如图 3-19，过$\triangle ABC$ 的顶点 A 作 $AF \perp AB$ 且 $AF = AB$，作 $AH \perp AC$ 且使 $AH = AC$，连结 BH、CF 且 BH 与 CF 交于 D 点. 求证：$BH = CF$

【分析】 若能证明$\triangle AFC \cong \triangle ABH$，问题就可以解决了，由已知$AF = AB$、$AC = AH$，如果能证明$\angle FAC = \angle BAH$就可以了，注意到$\angle FAB = \angle HAC = 90°$，$\angle BAC$是公共角，问题很快就解决了.

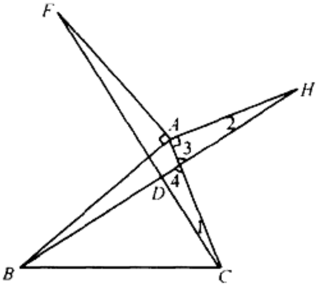

图 3-19

证明：$\because AF \perp AB$，$AH \perp AC$

$\therefore \angle FAB = \angle HAC = 90°$

$\therefore \angle FAB + \angle BAC = \angle HAC + \angle BAC$

即$\angle FAC = \angle BAH$

在$\triangle ABH$与$\triangle AFC$中

$$\begin{cases} AB = AF \\ \angle HAB = \angle FAC \\ AH = AC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABH \cong \triangle AFC$（SAS）

$\therefore BH = CF$（全等三角形的对应边相等）

【例 2】 已知：如图 3-20，$\triangle ABC$中，$BD \perp AC$，$CE \perp AB$，F是BD上一点，$BF = AC$，延长CE至M，使$CM = AB$，求证：$AF \perp AM$.

【分析】 要证明$AF \perp AM$，则只须证明$\angle 1 + \angle 2 = 90°$，而由已知$CE \perp AB$可知$\angle 2 + \angle M = 90°$，因此只须证$\angle 1 = \angle M$即可，由图观察可知，只须证$\triangle AFB \cong \triangle MCA$，这由已知条件不难推出.

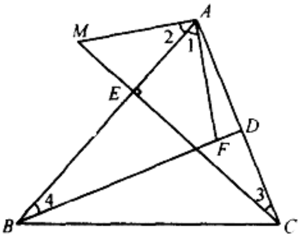

图 3-20

证明：$\because CE \perp AB$

$\therefore \angle 2 + \angle M = 90°$

$\angle 3 + \angle BAC = 90°$

同理可证：$\angle 4 + \angle BAC = 90°$

$\therefore \angle 3 = \angle 4$

在$\triangle AFB$和$\triangle MAC$中

$$\begin{cases} AB = MC \\ \angle 4 = \angle 3 \\ BF = AC \end{cases}$$

$\therefore \triangle AFB \cong \triangle MAC$（SAS）

$\therefore \angle 1 = \angle M$

又$\because \angle 2 + \angle M = 90°$

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90°$

$\therefore AF \perp AM$

【例 3】 如图 3-21，若EB平分$\angle ABC$，EC平分$\angle BCD$，且$AB /\!/ DC$，BE、CE交于E点，过E作AD交AB，CD于A，D两点.

求证：$BC = AB + CD$.

【分析】 要证$BC = AB + CD$，有两种思路，一是在BC上截取BM，使$BM = AB$，只须证$CM = CD$即可，二是延长CD至H，使得$CH = BC$，只须证$DH = AB$，然后都可转化成证全等的问题.

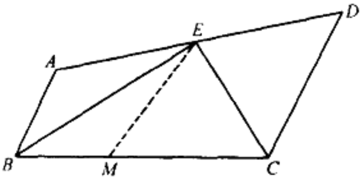

图 3-21

证明：在 BC 上截取一点 M，使 $BM=AB$，连接 EM

$\because BE$ 平分 $\angle ABC$

$\therefore \angle ABE=\angle MBE$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle MBE$ 中

$$\begin{cases} AB=BM \\ \angle ABE=\angle MBE \\ BE=BE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle MBE$（SAS）

$\therefore \angle A=\angle BME$

又 $\because AB /\!/ DC$

$\therefore \angle A+\angle D=180°$

$\because \angle EMB+\angle EMC=180°$

$\therefore \angle A+\angle D=\angle EMB+\angle EMC$

$\therefore \angle D=\angle EMC$

$\because EC$ 平分 $\angle DCM$

$\therefore \angle DCE=\angle MCE$

在 $\triangle DEC$ 和 $\triangle MEC$ 中

$$\begin{cases} \angle DCE=\angle MCE \\ EC=EC \\ \angle D=\angle EMC \end{cases}$$

$\therefore \triangle EDC \cong \triangle EMC$（ASA）

$\therefore CD=CM$

$\because BC=BM+MC$

$\therefore BC=AB+CD$

【小结】 证明一条线段等于另两条线段的和(或者差)，通常是采用"截长补短"的方法转化成证明两条线段相等的问题，具体方法：在较长的线段上截取一段等于其中一条较短的线段，然后证明剩下一段等于另一条线段；或延长一条较短的线段使它等于较长的线段，然后证明延长的一段等于已知另一条线段.

【例 4】 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=\angle ACB$，延长 AC 到 D，使 $AB=CD$，$AE=EC$

求证：$2BE=BD$.

【分析】 为了证明 $2BE=BD$，考虑到 BE 是 $\triangle ABC$ 的中线，所以把 BE 延长至 F，使 $BF=2BE$，只须证 $BF=BD$ 即可，这样就可以把线段"倍半"的数量关系转化成证明两条线段相等的问题.

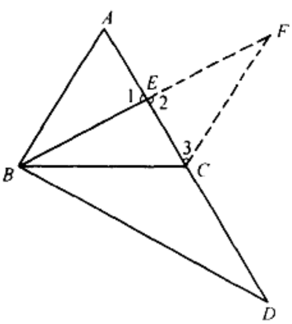

图 3-22

证明：如图 3-22 延长 BE 到 F，使 $BE=EF$，连接 FC.

$$\because \begin{cases} BE=EF\text{（作图）} \\ \angle 1=\angle 2 \\ AE=EC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CFE$（SAS）

$\therefore FC=AB$，$\angle A=\angle 3$

$\because AB = CD$

$\therefore FC = CD$

又 $\because \angle BCD = \angle ABC + \angle A$，$\angle BCF = \angle ACB + \angle 3$，$\angle ABC = \angle ACB$，$\angle 3 = \angle A$

$\therefore \angle BCD = \angle BCF$

在$\triangle BCD$和$\triangle BCF$中

$$\begin{cases} FC = CD \\ \angle BCF = \angle BCD \\ BC = BC \end{cases}$$

$\therefore \triangle BCD \cong \triangle BCF\ (SAS)$

$\therefore BD = BF$

$\because BF = 2BE$

$\therefore BD = 2BE$

【小结】 证明一条线段等于另一条段的一半(或两倍)时，常采用"倍长线段"的方法，把此类问题转化成证两线段相等的问题.

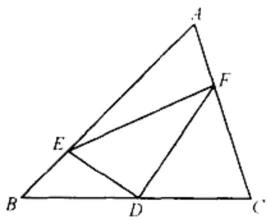

图 3-23

【例5】 如图3-23，在$\triangle ABC$中，D是BC中点，$ED \perp DF$.

求证：$BE + FC > EF$.

【分析一】 要证明$BE + FC > EF$，只能利用三角形三边关系定理来证，但这三条线段比较分散，不在同一三角形中，因此需作辅助线，利用全等三角形的移角和移边作用，把它们集中到一个三角形来，注意到D是BC的中点，因而有$BD = CD$，过D点的线段还有ED和FD，因此我们可以延长ED或FD来构成全等三角形，如果延长FD至P，使$FD = PD$，连BP，则$\triangle FDC$与$\triangle PDB$全等，所以FC就移到了BP的位置，同时有$DE \perp DF$，且$DF = DP$，易证$\triangle EDF \cong \triangle EDP$，这样$EF$就移到了$EP$的位置，三条相关线段就移到同一个三角形中去了.

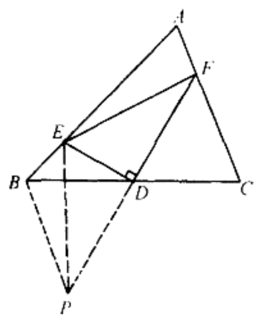

图 3-24

【证法1】 如图3-24延长FD至P，使$DP = DF$，连BP、EP

$\because D$是BC中点，

$\therefore BD = DC$

在$\triangle FDC$和$\triangle PDB$中

$$\begin{cases} BD = DC \\ \angle FDC = \angle PDB \\ DP = DF \end{cases}$$

$\therefore \triangle FDC \cong \triangle PDB\ (SAS)$

$\therefore FC = BP$

$\because DE \perp DP$

$\therefore \angle EDF = \angle EDP = 90°$

在$\triangle EDF$与$\triangle EDP$中

$$\begin{cases} PD = FD \\ \angle EDF = \angle EDP \\ ED = ED \end{cases}$$

$\therefore \triangle EDF \cong \triangle EDP$ (SAS)

$\therefore EF = EP$

在 $\triangle EBP$ 中，$BE + BP > EP$

$\therefore BE + CF > EF$

【分析二】 为了证明 $BE + CF > EF$，须将 BE、CF、EF 移到同一个三角形中，则需要构造以 BE、CF、EF 为边的三角形，因此也可以作 $\angle MDF = \angle FDC$，证 $\triangle MDF \cong \triangle CDF$，同时还可以证明 $\triangle MDE \cong \triangle BDE$，这样也能达到同样的效果.

【证法 2】 如图 3-25 作 $\angle FDM = \angle FDC$，且使 $DM = DC$，连接 MF、EM，在 $\triangle MDF$ 与 $\triangle CDF$ 中，

$$\begin{cases} DM = DC \\ \angle MDF = \angle CDF \\ FD = FD \end{cases}$$

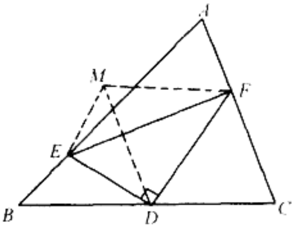

图 3-25

$\therefore \triangle MDF \cong \triangle CDF$ (SAS)

$\therefore MF = FC$，$\angle MDF = \angle FDC$

$\because ED \perp DF$

$\therefore \angle BDE + \angle FDC = \angle EDM + \angle MDF = 90^\circ$

$\therefore \angle BDE = \angle EDM$

在 $\triangle MDE$ 与 $\triangle BDE$ 中，

$$\begin{cases} DM = DC = BD \\ \angle BDE = \angle MDE \\ DE = DE \end{cases}$$

$\therefore \triangle MDE \cong \triangle BDE$ (SAS)

$\therefore EM = BE$

在 $\triangle MEF$ 中，$EM + MF > EF$

$\therefore BE + FC > EF$

小结：当题目中要证明的一些元素是比较分散远离的时候，可以通过作适当的辅助线，造个等三角形，把分散的线段或角集中到相关的图形中，集中的方法就是利用全等三角形的移角和折边作用，若题目中给出了中点或角平分线时，可以通过“倍长中线”或在角的一边上截相等线段的方法造全等三角形.

(三) 知识点引申

在几何题的证明中，经常会应用三角形全等，因而经常用辅助线构造全等三角形，构造全等三角形的方法很多，根据已知条件，有以下几种典型的方法：

第一种，如果图形中有某条线段的中点条件时，可以用倍长中线的方法构造全等三角形，有时也可倍长相关线段取得同样的效果.

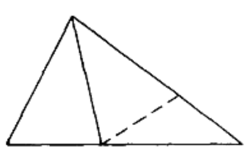

图 3-26

第二种：如题设中有角平分线条件时，也可以构造全等三角形．如图 3-26、3-27、3-28.

第三种：有公共顶点且有一个顶角或底角相等的两个等腰三角形中，一定能构造或存在全等三角形：如图 3-29.

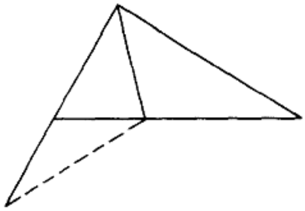

图 3-27

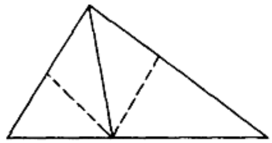

图 3-28

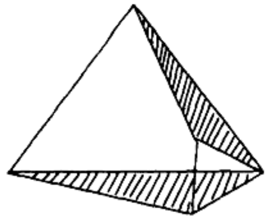

图 3-29

【例 6】 如图 3-30，已知 AB = AC，AD = AE，∠BAC = ∠DAE = 90°，$BM = EM$，求证：$AM \perp DC$.

【分析】 此题由条件很难找出什么办法证明 $AM \perp DC$，我们注意到 $BM = ME$，可利用倍长中线的方法，延长 AM 至 N，使 $MN = AM$、连 EN，则有$\triangle ABM \cong EMN$，从中发现 $EN = AB$、$EN // AB$，进而得出 $AC \perp EN$，再进一步发现$\angle 1 + \angle AEN = 90° = \angle 1 + \angle DAC$，从而有$\triangle AEN \cong \triangle DAC$，所以$\angle EAN = \angle ADC$，再由$\angle DAE = 90°$，不难证$\angle ADC + \angle DAM = 90°$，$\therefore AM \perp DC$

证明：延长 AM 至 N，使 $MN = AM$，连接 EN，在$\triangle EMN$ 和$\triangle BMA$ 中

$$\begin{cases} MN = AM \\ \angle EMN = \angle BMA \\ EM = BM \end{cases}$$

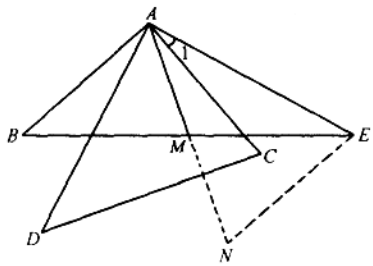

图 3-30

$\therefore \triangle EMN \cong \triangle BMA$（$SAS$）

$\therefore EN = AB$，$\angle MEN = \angle MBA$

$\therefore EN // AB$

又 $\because \angle BAC = 90°$

$\therefore AC \perp EN$.

$\therefore \angle 1 + \angle AEN = 90°$

$\because \angle DAE = 90°$，即$\angle 1 + \angle DAC = 90°$

$\therefore \angle DAC = \angle AEN$

$\because AB = AC$，$AB = EN$

$\therefore AC = EN$

在$\triangle DAC$ 和$\triangle AEN$ 中

$$\begin{cases} AD = AE \\ \angle DAC = \angle AEN \\ AC = EN \end{cases}$$

$\therefore \triangle DAC \cong \triangle AEN$（$SAS$）

$\therefore \angle ADC = \angle EAN$

$\because \angle EAN + \angle DAM = 90°$

$\therefore \angle ADC + \angle DAM = 90°$

$\therefore AM \perp DC$

【例 7】 如图 3-31，设 M 是等腰 $Rt\triangle ABC$ 的直角边 AC 的中点，$AD \perp BM$ 于 E，AD 交 BC 于 D. 求证：$\angle AMB = \angle CMD$.

【分析一】 要证$\angle AMB=\angle CMD$，可以利用全等三角形的移角作用．考虑到$AB=AC$，$\angle 1=\angle 2$，可过C作$CG\perp AC$，交AD的延长线于G，则$\triangle BAM\cong\triangle ACG$，于是$\angle G=\angle BMA$，只须证$\angle G=\angle DMC$，注意到$\triangle DMC\cong\triangle DCG$，利用全等三角形的性质即可证．

【证法1】 过C作$CG\perp AC$，交AD的延长线于G．

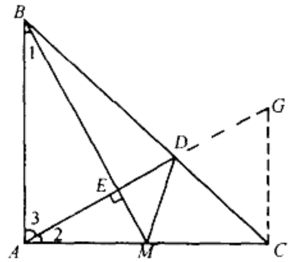

图 3-31

$\because AB\perp AC$

$\therefore \angle 2+\angle 3=90°$

又$\because AD\perp BM$

$\therefore \angle 3+\angle 1=90°$

$\therefore \angle 1=\angle 2$

$\because CG\perp AC$

$\therefore \angle ACG=90°=\angle BAM$

在$\triangle BAM$和$\triangle ACG$中，

$$\begin{cases}\angle BAM=\angle ACG=90°\\ AB=AC\\ \angle 1=\angle 2\end{cases}$$

$\therefore \triangle BAM\cong\triangle ACG$（ASA）

$\therefore \angle AMB=\angle G \quad AM=CG$

$\because M$交AC中点 $\therefore AM=CM$

$\therefore CM=CG$

又$\because \angle MCD=45° \quad \angle MCG=90°$

$\therefore \angle GCD=45°$

$\therefore \angle MCD=\angle GCD$

在$\triangle MCD$与$\triangle GCD$中

$$\begin{cases}MC=CG\\ \angle MCD=\angle GCD\\ CD=CD\end{cases}$$

$\therefore \triangle MCD\cong\triangle GCD$（SAS）

$\therefore \angle G=\angle CMD$

$\therefore \angle AMB=\angle CMD$

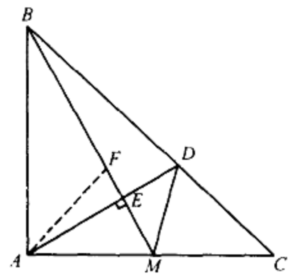

图 3-32

【分析二】 要证$\angle AMB=\angle CMD$，须构造以它们为对应角的全等三角形，注意到$AM=MC$、$\angle MCD=45°$，$\angle BAM=90°$，因此可作$\angle BAM$的角平分线AF，然后想办法证$\triangle AMF\cong\triangle CMD$显然，它们全等还差一条件：$AF=CD$，注意到$AF$与$CD$分别在$\triangle AFB$和$\triangle ACD$中，可证$\triangle AFB\cong\triangle ACD$，由已知和三角形全等的判定易证．

【证法2】 如图3-32，作$\angle BAM$的平分线AF，交BM于F，则$\angle BAF=\angle FAM=45°$

又$\because \angle ACD=45°$

$\therefore \angle BAF=\angle ACD$

又$\because \angle BAM=90°$

$\therefore \angle BAE+\angle CAD=90°$

又$\because AD\perp BM$

$\therefore \angle ABF+\angle BAE=90°$

$\therefore \angle CAD=\angle ABF$

在$\triangle ABF$和$\triangle CAD$中，