

高等学校教材

地球重力场 在工程测量中的应用

管泽霖 宁津生 编

测绘出版社

内 容 简 介

本书着重介绍地区性地球重力场和固体潮的基本理论及其在工程测量中的应用,详细地讲述了地区性地球重力场的计算方法,并对重力测量的仪器原理和观测方法也作了介绍。

本书可作为有工程测量专业的高等院校教材和教学参考用书,也可作为工程测量、大地测量和地球物理勘探等有关科技人员的参考书。

地球重力场 在工程测量中的应用

管泽霖 宁津生 编

高等学校教材

*

测绘出版社出版

测绘出版社印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行

*

开本 787×1092 1/32·印张 9.125·字数 200 千字

1990 年 6 月第 1 版·1990 年 6 月第 1 次印刷

印数 0,001— 800 册·定价 1.90 元

ISBN 7-5030-0348-0/P·138

前 言

随着现代化大规模建设工程项目的不断增长,对工程测量的精度要求也越来越高,这不仅要有高精度的工程测量方法和仪器,而且还应考虑地球重力场,特别是地区性重力场对精密工程测量的影响。因此,在工程测量专业设置有关重力测量课程是必要的。本书就是按武汉测绘科技大学工程测量专业从1979年开始使用的讲义,经过多次修改和补充,最后定稿完成的适用于工程测量专业的教材。

我们认为本书的特点是:对地球重力场的基本理论有较全面的介绍;在介绍这些基本理论时,充分考虑到工程测量的特点,即以地区性的地球重力场为主要研究对象;在此基础上着重讲述了地区性地球重力场对工程测量中各种测量可能产生的影响及其顾及方法;全书尽可能地反映了国内外在这一学科领域中的新成就。上述特点也是学生学习本课程应掌握的重点。

我们希望学生学习本课程之后,可以应用所学知识独立判断在所承担的工程测量任务中是否需要考虑地球重力场的影响以及如何考虑这种影响,并且有能力进行方案的设计,选择适当的方法来解决所要考虑的问题。

本教程是按60学时编写的,如果学时偏少,可以适当的部分章节(例如第七章、第十章的最后两节)留给学生以后自学。

本书编写主要参考了В.В.Бровар:Гравитационное

поле в задачах Инженерной геодезии一书。

承蒙陆仲连教授、金国雄教授和孟德润副教授对本书提出了许多宝贵意见，武汉测绘科技大学尉明、李叶才和邱卫根同志为本书的校订做了很多工作以及金小莹同志为本书绘制了插图，特在此向他们一并致谢。

由于水平所限，书中难免有不妥之处，恳请读者批评指正。

作者

1988年2月

目 录

第一章	引言	(1)
第二章	地球重力场	(3)
§2-1	引力、离心力及重力	(3)
§2-2	引力位	(4)
§2-3	离心力位及重力位	(17)
§2-4	重力位水准面的特征	(20)
第三章	正常重力位和异常位	(27)
§3-1	正常重力位	(27)
§3-2	工程测量中采用的正常重力位	(33)
§3-3	扰动位和异常位	(35)
§3-4	异常位的形式	(46)
第四章	地球重力场的不均匀性对工程测量的影响	(50)
§4-1	概述	(50)
§4-2	归化到工程测量起算面上的水平角改正	(51)
§4-3	归化到工程测量起算面上的长度改正	(55)
§4-4	利用垂直投影将地面上的方位角传递到矿井内	(58)
§4-5	相对于工程测量起算面的高度	(62)
§4-6	水准测量的高程系统	(64)
§4-7	地区力高	(73)

第五章	计算异常位的方法	(76)
§5-1	重力异常与异常位的关系.....	(76)
§5-2	根据重力异常确定平面层的异常面 密度及平面的斯托克司公式.....	(78)
§5-3	异常位的一阶导数及布耶哈马方法.....	(84)
§5-4	重力异常归算与别列年方法.....	(90)
§5-5	重力测量误差与垂线偏差精度的关系.....	(103)
§5-6	用差分法计算垂线偏差.....	(108)
第六章	离散问题的异常场研究	(113)
§6-1	用离散虚拟质点逼近异常位.....	(113)
§6-2	重力异常的协方差.....	(116)
§6-3	异常场中其它量的协方差.....	(121)
§6-4	最小二乘配置 统计相关.....	(128)
第七章	异常位的级数形式	(137)
§7-1	用勒让德多项式展开异常位.....	(137)
§7-2	异常位展开式系统的计算.....	(142)
§7-3	异常位及其导数的计算.....	(151)
§7-4	最佳设计.....	(153)
§7-5	测量误差和权的选择.....	(156)
§7-6	设计方案预估.....	(159)
第八章	固体潮及其对精密工程测量的影响	(165)
§8-1	潮汐现象.....	(165)
§8-2	固体潮原理.....	(166)
§8-3	起潮力位的级数展开式.....	(172)
§8-4	引潮力位的杜德森展开式.....	(179)
§8-5	平衡潮及理论值的计算	(186)
§8-6	勒甫数.....	(189)

§8-7	固体潮对精密工程测量的影响·····	(196)
第九章	地球重力场在大地测量中的作用·····	(201)
§9-1	概述·····	(201)
§9-2	斯托克司和维宁·曼尼兹公式·····	(201)
§9-3	扰动位的球函数展开式以及用重力 资料求位系数的方法·····	(205)
§9-4	利用人造卫星轨道摄动及卫星测高资 料推算位系数和地球重力模型·····	(211)
§9-5	内插垂线偏差、天文水准及天文重力 水准·····	(227)
§9-6	多普勒及 GPS 水准 ·····	(236)
第十章	重力测量及固体潮观测的方法和仪器·····	(240)
§10-1	重力测量原理·····	(240)
§10-2	重力参考系统·····	(247)
§10-3	激光绝对重力仪·····	(250)
§10-4	静重力仪的共同特征·····	(254)
§10-5	ZSM 型石英弹簧重力仪·····	(257)
§10-6	拉科斯特-隆贝格重力仪 ·····	(267)
§10-7	重力位二阶导数的测量原理·····	(272)
§10-8	固体潮观测的仪器·····	(277)
参考文献	·····	(282)

第一章 引言

重力数据不论在大地测量的理论研究——地球形状及外部重力场中，还是在大地测量的实际工作——建立国家控制网中都是必不可少的。随着空间技术的发展，能够获得的地球重力场资料的种类在增多，范围遍及全球，同时重力测量的精度也愈来愈高。因此，目前不仅可以对全球性的重力场进行研究，而且也可以研究地球重力场随时间的变化。正是由于它能多方面地、广泛地和精确地反映地球这种固有的物理现象，因此它与天文学和地球物理学等学科的关系也就愈来愈密切了。

过去，由于工程测量的面积不大，精度要求不高，所以无需考虑地球重力场不均匀性的影响。但是，工程测量的精度也在随着各种工程建设的需要而日益提高。目前在一些特殊的高精度的工程测量中已提出了考虑地球重力场不均匀性影响的问题；在变形观测中开始注意弹性地球受日月引力作用的随时间的变化，即固体潮的影响。因此，我们编写这本书的目的是给工程测量专业的学生以必要的地球重力场知识，以便他们在今后的工程测量工作中遇到上述这类问题时应用。

本书的各章内容如下：

第二章，简要地阐述了重力和重力位的基本知识，它是以后各章的基础。

第三章，讨论了地球重力场的划分问题，给出了大地测

量和工程测量中正常重力位的具体形式，以此作为研究地球重力场不均匀性的依据。而异常位则是地球重力场不均匀性的表征，是我们的主要研究对象。

第四章，主要阐述了地球重力场的不均匀性如何影响工程测量的各种观测量，以及如何改正这些影响。另外，还对水准测量高程系统的具体计算公式进行了推导。

第五章，主要讨论了用积分形式表示异常位的计算方法。

第六章和第七章，此两章讨论了计算异常位的另外一些途径。前一章是以最小二乘配置方法为主，后一章着重介绍了球函数级数展开方法，这两种方法都是以离散性的重力数据为前提的。

第八章，首先讨论了固体潮的原理，并给出了计算固体潮影响的方法和公式，其次讨论了它对工程测量的影响及其改正方法。

第九章，简单地介绍了地球形状的理论研究和国家控制网中重力测量的作用，以及目前发展情况。目的是给工程测量专业的学生对理论大地测量的任务和近况有一个概括的认识。

第十章，介绍重力测量的仪器和测量方法以及成果整理，着重介绍用于野外测量的重力仪。另外，对用扭秤测量重力位二阶导数的原理也作了简单的介绍。最后还简单地介绍了重力固体潮和倾斜固体潮的观测仪器。

第二章 地球重力场

§ 2-1 引力、离心力及重力

在一个时空域内，如果存在着物理上的力的作用，我们总是用一个向量场来研究力、力源以及力的施加对象等。如果认为向量场是随时间变化的，那末作用在场内每个点上的力要用一个四维数组来表示。如果认为向量场是固定的，则只要用一个三维的欧拉空间来表示就可以了，写成符号即为

$$\vec{F}(\vec{\rho}) \in R_3$$

式中 $\vec{F}$ 是力， $\vec{\rho}$ 是计算 $\vec{F}$ 的那一点的向径。如果采用直角坐标，那末 $\vec{F}$ 就是该点的坐标 (x, y, z) 的函数。

对于不同的研究对象，可以采用不同的直角坐标。例如为了研究全球性的力场，所采用的坐标原点设在地球的质心上， Z 轴与地球的自转轴一致， XY 平面由赤道面构成， XZ 平面为格林尼治子午面， Y 轴指向东(右手系统)。这种坐标系称为地心直角坐标系。如果原点设在某一点上， Z 轴平行于地球自转轴， XZ 平面平行于起始子午面，这种坐标系称为站心直角坐标系。如果是研究小范围内的力场，坐标原点一般设于测区的起始点上，以该点的重力天顶作为 Z 方向， x 轴向北为正， y 轴向东为正，这种坐标系称为地平直角坐标系。本章一般采用地心直角坐标系。

假设空间有两个质点 P_1 和 P_2 ，按牛顿万有引力定律，可以写出它们之间的引力 $\vec{F}_1$ 和 $\vec{F}_2$ 为

$$\left. \begin{aligned} \vec{F}_1 &= f \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}_1 \\ \vec{F}_2 &= f \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}_2 \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

式中 m_1 和 m_2 分别为两质点的质量； $\vec{r}_1 = -\vec{r}_2$ 是联结两质点的向量，它们分别与引力 $\vec{F}_1$ 及 $\vec{F}_2$ 的方向一致， r 为两质点之间的距离， f 是引力常数，在 CGS 制中为

$$f = 6.67 \times 10^{-8} \pm 0.007 \times 10^{-8} (\text{cm}^3 \text{g}^{-1} \text{sec}^{-2})$$

由于 $\vec{F}_1$ 和 $\vec{F}_2$ 是对称的，那它们的大小相等、方向相反，因此，为了讨论方便起见，总是将其中的一点（例如 P_1 点）称为吸引点，而另一点（例如 P_2 点）称为被吸引点*，并且令该点的质量为单位质量（即 $m_2 = 1$ ），由此被吸引点上所受的引力为

$$\vec{F} = - f \frac{m}{r^3} \vec{r} \quad (2-2)$$

上式已略去了 $\vec{F}$ 、 m 和 $\vec{r}$ 的下指标，并且认为 $\vec{r}$ 与 $\vec{F}$ 的方向相反， F 由被吸引点起算向吸引点为正， r 则由吸引点起算向被吸引点为正。因此在 (2-2) 式右端有一“-”号。

在一些重力测量的书籍中，常常将 (2-2) 式写成

$$F = - f \frac{m}{r^2} \quad (2-3)$$

它的意义和 (2-2) 式相同。

* 通常总是在被吸引点上研究和计算力的大小、方向等等，故又称为研究点或计算点。

假设有一个质点 m ，它对外部各个被研究点就形成了一个中心向量场。为了画图方便起见，将它投影在一个二维的坐标面内，如图 2-1 所示，称之为质点引力场。

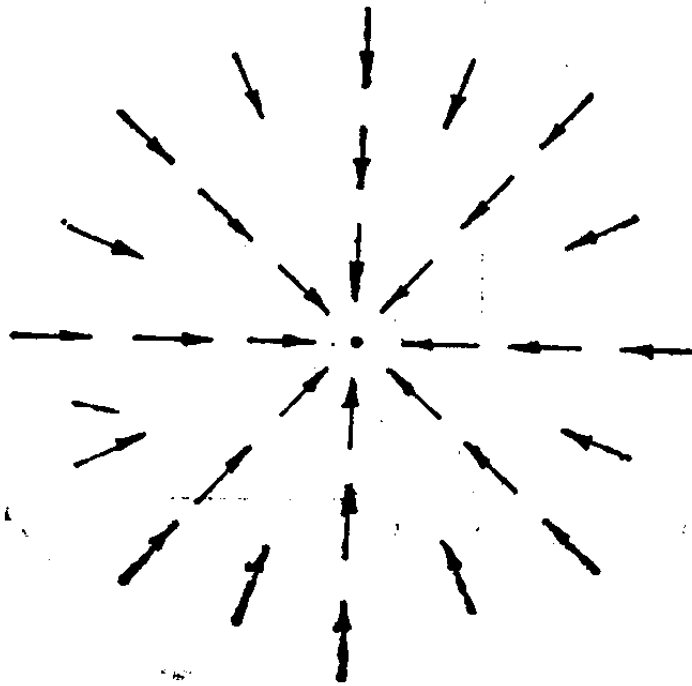


图 2-1

如果在整个域内有 n 个质点，它们的质量分别为 m_i ($i = 1 \dots n$)，则被吸引点 P 上的引力 $\vec{F}$ 为各个质点引力 $\vec{F}_i$ 的向量和，写成公式为

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = -f \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i^2} \vec{r}_i \quad (2-4)$$

式中 $\vec{r}_i = \vec{\rho} - \vec{\rho}_i$ ， $\vec{\rho}$ 为 P 点的向径， $\vec{\rho}_i$ 为质点 m_i 的向径。假设 P 点的坐标用 (x, y, z) 表示， m_i 点的坐标用 (a_i, b_i, c_i) 表示，则

$$\vec{r} = \vec{\rho} - \vec{\rho}_i = (x - a_i) \vec{i} + (y - b_i) \vec{j} + (z - c_i) \vec{k} \quad (2-5)$$

$$r = [(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 + (z - c_i)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ 分别为 X , Y , Z 轴上的单位向量。各符号意义如图 2-2 所示。

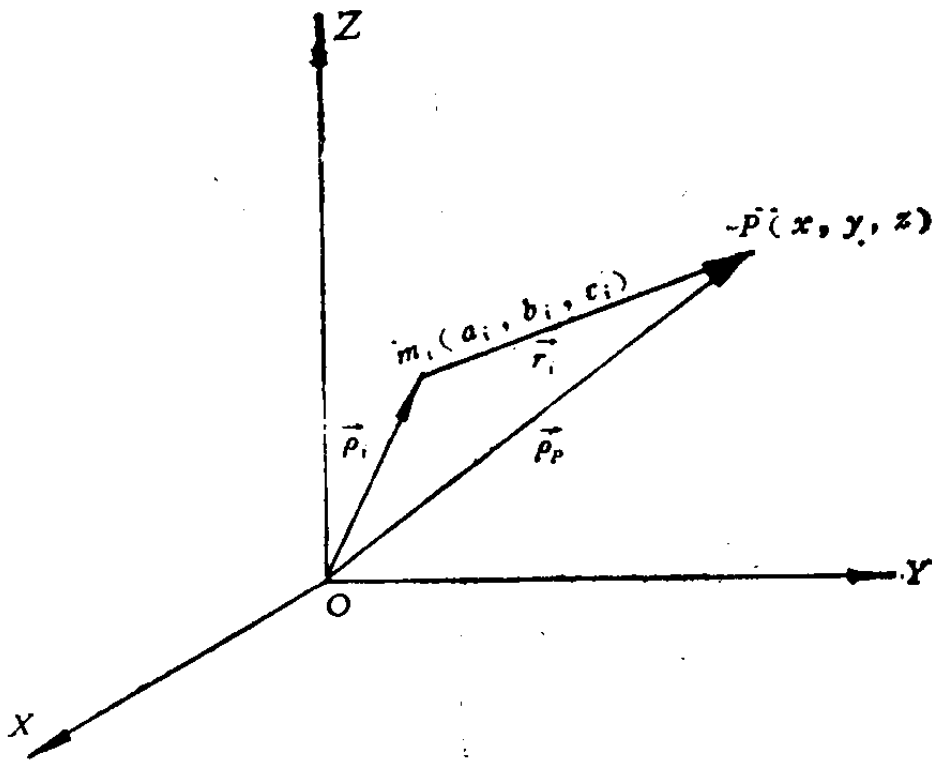


图 2-2

(2-4) 式称为质点系的引力。

如果有一个质体 τ 如图 2-3 所示, 质体内每一点的密度为 $\delta(\vec{\rho})$, 质元 $dm = \delta(\vec{\rho})d\tau$, 则此质体的引力可写成积分形式

$$\vec{F} = - f \int_{\tau} \frac{\delta(\vec{\rho})}{r^3} \vec{r} d\tau \tag{2-6}$$

式中 $\vec{r} = \vec{\rho} - \vec{\rho}_i$ 为被吸引点的向径 $\vec{\rho}$ 与吸引质元 dm 的向径 $\vec{\rho}_i$ 之差。

我们要研究的除引力之外还有离心力。设有一质体, 以等角速度 ω 绕固定轴旋转, 如图 2-4 所示。作用在质体表面 P 点的单位质量上有一惯性离心力 (简称离心力) $\vec{q}$ 为

$$\vec{q} = \omega^2 \vec{l} \tag{2-7}$$

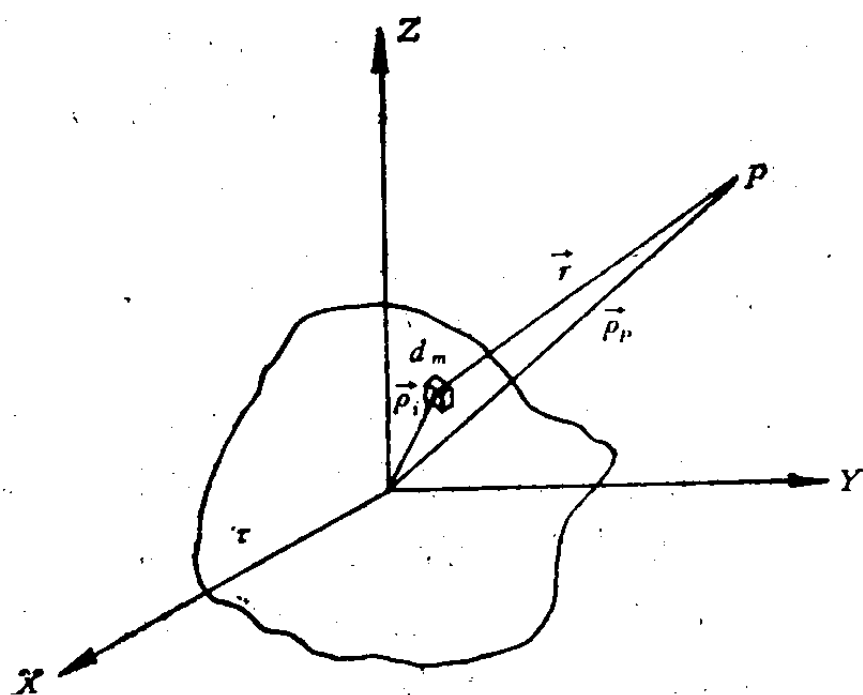


图 2-3

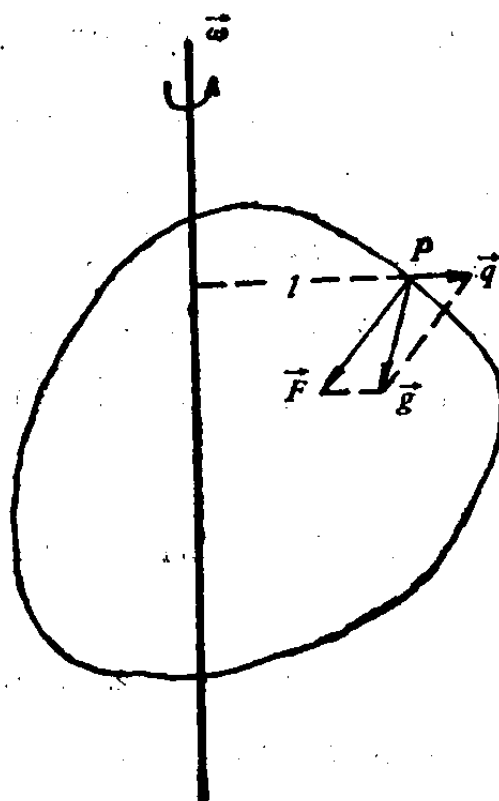


图 2-4

式中 $\vec{l}$ 为旋转轴到 P 点的垂直距离，方向背离旋转轴。

若此质体为地球，则作用在 P 点上有两个力：地球的引力 $\vec{F}$ 和离心力 $\vec{q}$ ，它们的合力称为重力 $\vec{g}$ ，即

$$\vec{g} = \vec{F} + \vec{q} = -f \int \frac{\delta}{r^3} \vec{r} d\tau + \omega^2 \vec{l} \quad (2-8)$$

P 点上地球的引力比离心力大得多(在离心力最大处约 300 倍)，因此重力 $\vec{g}$ 的方向总是朝向地球内部。随着 P 点位置的改变，重力的大小和方向也发生变化。

由于 P 点的质量为单位质量，因此重力与重力加速度的数值相等，方向相同，只是量纲不一样。

在本教程中，将重力加速度叫做重力。以后要讲的重力测量，实际上测的是重力加速度。因此这里将重力的单位规定为重力加速度的单位，即 1cm/sec^2 ，称为伽 (Gal)。它是以世界上第一个进行重力测量的意大利学者伽里略的名字命名的。由于伽的单位太大，使用不便，又规定了两种单位，即千分之一伽(称为毫伽 mGal) 和千分之一毫伽(称为微伽 μGal)。有时也用相对值来表示，即 1 伽为 10^{-8} ，毫伽为 10^{-6} ，微伽为 10^{-9} 。根据不同的要求和精度可分别选用。

§ 2-2 引力位

按§2-1 所述，要讨论力场，必须了解力的大小和方向，这是很不方便的。通常总是用一个简单的方法来描述它，因而引入位的概念。

对于引力场，在其场空间的每一点上存在一个连续的，并具有连续导数的标量函数，称为引力位 V 或引力位函数。

它与引力 $\vec{F}$ 之间的关系为

$$V(\vec{\rho}) = \int \vec{F}(\vec{\rho}) d\vec{\rho} \quad (2-9)$$

$$\nabla(V(\vec{\rho})) = \text{grad } V(\vec{\rho}) = \vec{F}(\vec{\rho})$$

式中 ∇ 称为梯度算子，其表达式为

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

$\vec{\rho}$ 为计算点的向径，即

$$\vec{\rho} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

x, y, z 为计算点的坐标。

满足(2-9)式的 V 函数称为引力位。这就是说要定义的引力位 V 函数，它的梯度必须是引力 $\vec{F}$ 。而要求得引力位函数，若按(2-9)式的前一方程对向量进行积分则很不方便，因为要解一个积分方程。因此，通常利用(2-9)式的后一方程求解，即先假设引力位的函数表达式，再证明它的梯度应当等于给定的向量(引力)。也就是说我们要找出一个数量场，使它满足这个条件。位函数是我们将要经常用到的一个数学工具。

现在仍从质点情况开始讨论引力位。假设吸引质量 m 位于坐标原点，向径为 $\vec{\rho}$ 的计算点上有一个标量函数，它的形式为

$$V(\vec{\rho}) = f \frac{m}{\rho} \quad (2-10)$$

它的梯度为

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\partial V}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \vec{k} \right) \\
 &= \frac{\partial V}{\partial \rho} \nabla(\rho)
 \end{aligned} \tag{2-11}$$

由于

$$\rho = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

则

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{1}{2} \rho^{-1} 2x = x\rho^{-1} \\
 \frac{\partial \rho}{\partial y} &= y\rho^{-1} \\
 \frac{\partial \rho}{\partial z} &= z\rho^{-1}
 \end{aligned} \right\} \tag{2-12}$$

于是

$$\nabla \rho = \vec{\rho} / \rho$$

又因 $\frac{\partial V}{\partial \rho} = -f m \rho^{-2}$

则将上两式代入 (2-11) 式可得

$$\nabla V = -f \frac{m}{\rho^3} \vec{\rho} \tag{2-13}$$

将上式与 (2-2) 式比较, $\vec{r}$ 与 $\vec{\rho}$ 都是吸引点到被吸引点间的距离向量, 两者是一致的, 所以证得 (2-10) 式就是引力位函数(实质上是质点引力位)。

对于一个质体, 同样假设在计算点上有一个数量函数为

$$V(\vec{\rho}) = f \int \frac{\delta}{r} d\tau \tag{2-14}$$