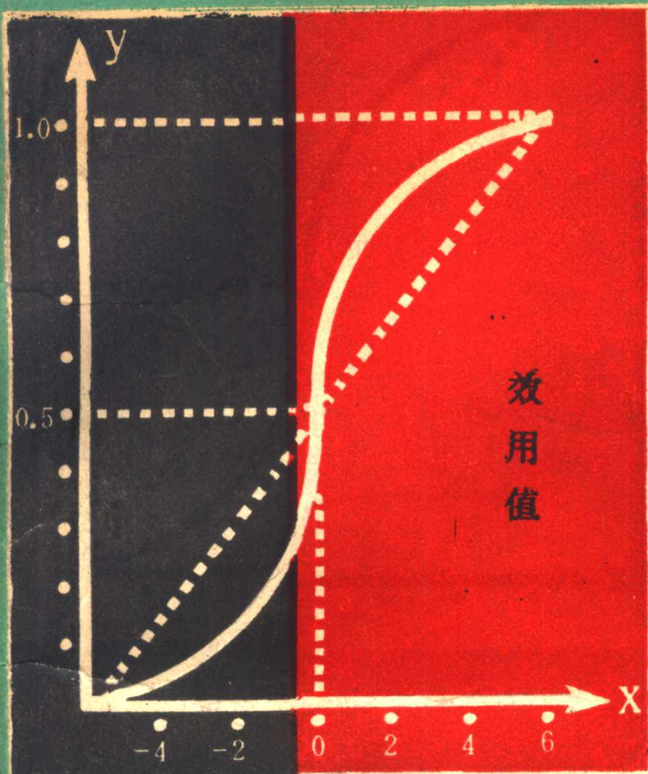
运筹学

——经济管理决策方法



中山大学
四川大学
西北大学　合编
武汉大学
湘潭大学

运　筹　学

——经济管理决策方法

主编：陈　度

编者：关伟德　朱求长　李　丹　李文高

余望之　周听祥　周德镇　颜云飞

四川大学出版社

内 容 简 介

本书是由中山大学、四川大学、西北大学、武汉大学和湘潭大学五所综合性大学经济管理学院和数学系的教师在多年的教学讲义基础上编写而成。书中内容包括线性规划、网络分析、决策分析、排队论、整数规划、动态规划、目标规划、非线性规划、存储论、对策论、摸拟方法。

本书是为经济管理专业和财经类专业的本科生、专科生和研究生编写的教材。书中各个部分理论完整、难易适当、知识覆盖面大，例题的选用密切与经济管理中的实际问题相结合，在写法上文字通俗易懂，数学推导过程清晰。

责任编辑 廖 斌

封面设计 羊 角

运筹学——经济管理决策方法

中山大学 四川大学 西北大学 武汉大学 湘潭大学 编著

四川大学出版社出版

四川省新华书店经销 四川省郫县犀浦印刷厂印刷

787×1092毫米 1/16 22.50印张 500千字

印数：1——8000册

1989年2月第一版 1989年2月第一次印刷

ISBN 7-5614-0183-3/O·34 定价：4.44元

编 者 的 话

现代科学技术和现代化管理方法是我国经济走向新的发展阶段的重要因素，我们不仅要学习先进的科学技术，而且要学习现代化的科学管理方法。现代管理科学与定量和优化有着密切的联系，由于电子计算机这个现代化管理手段的出现，使管理工作者有可能愈来愈多地利用数量方法来解决一些管理中的理论问题和实际问题。为了适应现代化管法的需要，近年来越来越多的学校，经济管理专业，都把“运筹学”作为基础课或专业基础课开设。

运筹学是近四十年发展起来的一门新兴学科，它为管理人员作决策时提供科学的依据，是实现管理现代化的有力手段。

运筹学内容非常广泛，各个分支有各自的特点，本书是根据中山大学、四川大学、西北大学、武汉大学和湘潭大学五所学校的管理学院的教师，近几年为经济和管理类专业讲授“运筹学——经济管理决策方法”课程，在这门课程的讲义基础上，取各家之长编写而成。

本书力求密切与经济和管理中的实际问题相结合，精选例题，着重实际应用，文字通俗易懂，概念深入浅出，计算方法步骤清楚，便于教学，每章后还附有一定数量应用习题。

本书共分十一章，各部分内容由下列同志执笔：线性规划（武汉大学朱求长），网络分析（西北大学李丹），决策分析和排队论（中山大学关伟德），整数规划（四川大学李文高），动态规划、目标规划和非线性规划(四川大学周德镇)，存储论（湘潭大学周昕祥），对策论（中山大学余望之），模拟方法（湘潭大学颜云飞）。全书由四川大学陈虔负责主编，图全部由四川大学王梅绘制。

本书主要是为综合大学经济和管理类专业本科所写的教材，也适用于专科和成人教育的同类专业的学生，授完本书约需 144 学时，各校可以按照教学大纲的不同要求，选取其中有关部分进行讲授。

本书封面上的五校和扉页上的编者均按笔划先后为序排列。

由于编者水平有限，不妥之处，望广大读者批评指正，不甚感谢。

1988年 6 月

目　　录

第一章　线性规划

线性规划是目前经济管理中经常使用而又有成效的优化技术，其原因有二：一是应用广泛。因经济管理中的大量优化问题可以用线性规划的数学模型来表示。二是方法成熟。1947年G.B.Dantzig已对一般的线性规划问题建立了解法，即单纯形法。今天，用单纯形法解线性规划的计算机程序已大量涌现，致使在电子计算机上求解此类问题已十分容易。我们将较为详细地讨论线性规划的方法和应用，本章略去了一些较为详细的理论证明，读者可从有关参考书中找到。

§1.1　什么是线性规划

一、线性规划的实例和模型

一个实际问题的数学模型，就是依据客观规律，对该问题中我们所关心的那些量进行科学的分析，找出反映这些量之间的本质联系的数学关系式。但一般说来，我们在工业、农业、交通运输、国防等各方面所遇到的实际问题是很复杂的，它们涉及的因素很多，要想建立包罗各种因素的数学模型，不仅不可能，也没有必要。一个可行的办法是择其主要者，抓住主要矛盾，建立能保证精确度要求，又尽量简单的数学模型，是企业管理人员必须付出巨大努力才得以完成的任务。

由于实际的线性规划问题一般都是很复杂的，而我们现在还是刚刚开始学习这些问题，故为了使读者易于掌握建立线性规划模型的方法，我们所选的例子都是经过大大简化的。只要弄懂了这些简单的模型，今后遇到较为复杂的问题也就有办法了。

例1　饼干生产问题：某食品厂生产Ⅰ型和Ⅱ型两种饼干。在每种饼干的生产过程中，都需使用搅拌机（记为A）、成型机（记为B）和烘箱（记为C）三种设备。已知每生产一吨Ⅰ型饼干需要在A、B、C上工作的时间分别为3，4，4小时，而对Ⅱ型饼干而言，相应的时间为5，2，4小时。每生产1吨Ⅰ、Ⅱ型饼干可分别获得利润5百元和4百元。这些饼干在市场上都很畅销，但由于各种条件限制，A，B，C每天可供利用的工时分别不能超过15，10，22小时。上述情况均列于表1.1中。现问应如何安排每天Ⅰ、Ⅱ型饼干的生产量，才能使该厂获得最大的利润？

表 1.1

单位时耗 产品 / 资源	Ⅰ	Ⅱ	现有工时
搅拌机（小时）	3	5	15
成型机（小时）	4	2	10
烘　箱（小时）	4	4	22
利　润（百元/吨）	5	4	

解　用x_1，x_2分别表示Ⅰ、Ⅱ型饼

干每天的生产量，以吨为单位。根据每吨Ⅰ、Ⅱ型饼干对资源的消耗情况和现有的资源数量，应有：

$$3x_1+5x_2\leqslant 15 \quad （搅拌机限制）$$

$$4x_1+2x_2\leqslant 10 \quad （成型机限制）$$

$$4x_1+4x_2\leqslant 22 \quad （烘箱限制）$$

另外，显然x_1、x_2不能为负数。

用z_1表示每日生产Ⅰ型饼干x_1吨、Ⅱ型饼干x_2吨所获得的利润，则有：

$$z_1=5x_1+4x_2$$

我们的目标是使z_1达到最大值。

今后，为书写的方便，将上述模型记为：

$$\max\ z_1=5x_1+4x_2 \qquad (1.1)$$

$$\text{s.t.}\quad 3x_1+5x_2\leqslant 15 \qquad (1.2)$$

$$2x_1+x_2\leqslant 5 \qquad (1.3)$$

$$2x_1+2x_2\leqslant 11 \qquad (1.4)$$

$$x_1,\ x_2\geqslant 0 \qquad (1.5)$$

后面我们说到例1，就是指问题（1.1）—（1.5）和表1.1. 有时，市场需求也会对某些产品的产量提出一定限制，如在此例中，若还要求Ⅰ型饼干每日至少生产3吨，则在约束条件中还须加上$x_1\geqslant 3$。

例2 运输问题：设有三个产煤基地（简称产地）A_1、A_2、A_3，其产量分别为9吨、10吨、6吨，另有四个城市（简称销地）B_1、B_2、B_3、B_4需要销煤，其销量分别为6吨、6吨、3吨、10吨，已知从每个产地到各销地的单位运价（此例中是每吨运费）如表1.2所示。又假定运费与运输量成正比，现问应如何安排调拨计划，才能使总的运费最省？

表 1.2

销地 每吨运费 产地	B₁	B₂	B₃	B₄	产量
A_1	10	4	9	3	9
A_2	3	1	5	2	10
A_3	4	5	2	4	6
销量	6	6	3	10	

（注：表中最下一行表示各销地之销量，最右一列表示各产地之产量）。

解 设用x_{ij}表示从A_i调到B_j的调拨数（$i=1, 2, 3$；$j=1, 2, 3, 4$）。因为总的产量$9+10+6$等于总的销量$6+6+3+10$，故产销是平衡的。

显然，从A_1调往四个销地的总量应等于A_1的产量9，即有

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=9$$

同理可得对A_2、A_3的两个类似的等式。另一方面，三个产地运往B_1的总量应等于B_1的需要量，即有

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=6$$

对B_2、B_3、B_4亦可得类似的等式。我们的目标是使总运费z最少，故有如下的数学模型：

$$\min\ z=10x_{11}+4x_{12}+9x_{13}+3x_{14}+3x_{21}+x_{22}+5x_{23}+2x_{24}+4x_{31}+5x_{32}$$

$$+2x_{33}+4x_{34}$$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=9 \\
& x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=10 \\
& x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=6 \\
& x_{11}+x_{21}+x_{31}=6 \\
& x_{12}+x_{22}+x_{32}=6 \\
& x_{13}+x_{23}+x_{33}=3 \\
& x_{14}+x_{24}+x_{34}=10 \\
& x_{ij}\geqslant 0 \quad (i=1,\ 2,\ 3;\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4)
\end{aligned}
$$

由以上诸例可见，线性规划问题的数学模型（简称线性规划模型）之一般形式为：

$$
\begin{aligned}
\min\ (\text{或}\ \max)\ & z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \\
\text{s.t.}\quad & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n(\bullet)b_1 \\
& a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n(\bullet)b_2 \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n(\bullet)b_m \\
& x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

其中的 a_{ij}, b_i, c_j（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$; $j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$）均为已知实常数，（$\bullet$）表示"$\leqslant$"或"$\geqslant$"或"$=$"．其中的 z 称为**目标函数**，（1.6）称为**约束条件**。

这表明，线性规划模型由三部分构成：

1）一组**决策变量** $x_1,x_2,\cdots,x_n$，通常要求它们非负。这些未知量的值，正是需要我们去确定的。

2）表示所给问题的最优化指标的目标函数 z。它是决策变量的线性函数，我们要求它的**最大值**或**最小值**（统称**最优值**）。

3）一组约束条件（线性等式或线性不等式），它们确定决策变量所能取值的范围。

正因为目标函数和约束条件都是决策变量的线性表示式，所以，这类模型便叫**线性规划模型**，相应的问题就叫线性规划问题。以后我们把"线性规划"简写为"L.P."，它是 Linear Programming 的头两个字母。

二、线性规划模型的标准型

从上段已可看到，由于对目标的追求和约束形式的不同，线性规划模型的具体形式是多种多样的，但我们可将它们都化为同一种形式，即所谓标准型。对标准型的L.P.问题进行了研究以后。其它的L.P.问题便迎刃而解。下面我们先介绍什么是L.P.模型的标准型，然后再讨论怎样化为标准型。

1. 什么是标准型

线性规划模型的标准型或称 L.P. 问题的标准型为：

$$\min \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{1.7}$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n \geqslant 0 \tag{1.9}$$

利用矩阵和向量的符号，上述各式可写为：

$$\min\ z = c^T x \tag{1.7$'$}$$

$$Ax = b \tag{1.8$'$}$$

$$x \geqslant 0 \tag{1.9$'$}$$

其中

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix},\ 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ a_{ij}\ \text{都是实数}$$

c^T 表示 c 的转置，用 R^n 记 n 维实向量空间，则，$c \in R^n$，$b \in R^m$，$x \in R^n$，(1.9)$'$ 中的 0 也是一个 n 维向量。$x \geqslant 0$ 意味着 x 的所有分量都大于等于零。

为了使得我们的讨论能够抓住最主要的内容，对标准型L.P.问题（1.7)$'$—(1.9)$'$ 作出如下假设：

（1）A 的秩 $r(A) = m$，且 $m < n$。这就是说，（1.8）中包含的 m 个方程式都是彼此独立的，没有多余方程，且方程个数小于未知量个数。

（2）$b \geqslant 0$（若有某个 $b_i < 0$，则可将该 b_i 之方程的两边乘以 -1）。

今后，都将在这些假设条件下讨论标准型 L.P. 问题。

对于 L.P. 问题的解：若点 $x \in R^n$ 满足（1.8）$'$和（1.9）$'$，则称它为 L.P. 问题（1.7)$'$—(1.9)$'$的**一个可行解**。全部可行解所组成之集，称为**可行解集**（或可行域），记为 S. 使目标函数 z 达到最优值（有限常数）的可行解叫**最优解**。在标准型下，最优值就是指目标函数的最小值。对于给定的 L.P. 问题，若存在最优解，则称它**有解**，否则称为**无解**。

2. 怎样化为标准型

若已给问题是 max 型问题（称为最大化问题），即求 max $z(x)$，则我们可先将其目标函数反号化为 min 型问题（称为最小化问题），即求 min $-z(x)$，所得之最优解即为原问题之最优解。

对于约束条件中含有“$\leqslant$”的不等式，在其左边加入非负变量（称为**松弛变量**），

当约束不等式中含有"$\geqslant$"号时，在其左边减去一个非负变量（也叫松弛变量），便可将不等式化为等式。加入松弛变量使不等式化为等式的这一做法，只是改变了约束条件的形式，而未改变其实质。而因目标函数只依赖于原有变量，故它亦无变化，即松弛变量并不进入目标函数中，或说松弛变量在目标函数中的系数皆为零。

若约束条件中对某些变量的符号没有限制，则可采取变量替换的办法化为标准型。

例3 将例1之模型（1.1）—（1.5）化为标准型。

解 在含有"$\leqslant$"的三个不等式中，分别加入非负变量x_3, x_4, x_5，再用$z=-z_1$，化为min型问题，于是得标准型如下：

$$\min\ z=-5x_1-4x_2 \tag{1.10}$$

$$\text{s.t.}\quad 3x_1+5x_2+x_3=15 \tag{1.11}$$

$$2x_1+x_2+x_4=5 \tag{1.12}$$

$$2x_1+2x_2+x_5=11 \tag{1.13}$$

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_5\geqslant 0 \tag{1.14}$$

例4 将下面L.P.问题化为标准型：

$$\begin{aligned}\min\ & z=5x_1+x_2+x_3\\ \text{s.t.}\ & 3x_1+x_2-x_3\leqslant 7\\ & x_1-2x_2+4x_3\geqslant 6\\ & x_2+3x_3=10\\ & x_1,x_2\geqslant 0,\ x_3\text{无符号限制}\end{aligned}$$

解 令$x_3=x_4-x_5$，此处$x_4, x_5\geqslant 0$。再引入松弛变量x_6, x_7，则有如下标准型：

$$\begin{aligned}\min\ & z=5x_1+x_2+x_4-x_5\\ \text{s.t.}\ & 3x_1+x_2-(x_4-x_5)+x_6=7\\ & x_1-2x_2+4(x_4-x_5)-x_7=6\\ & x_2+3(x_4-x_5)=10\\ & x_1,\ x_2,\ x_4,\ \cdots,\ x_7\geqslant 0\end{aligned}$$

三、关于线性规划问题求解的一些基本定理

求解L.P.问题的根本任务就是要找出目标函数在满足约束条件下的最大值或最小值。因为在约束方程组中，$m<n$，故在一般情况下，可行解集S及其边界是无穷点集，相应的，z也就有无穷多个值。要从这无穷多个值中找出一个最大(小)的，一般来说是不可能的。

然而，值得庆幸的是，由于L.P.问题的特殊结构，致使其可行解集具有一些"很好的"性质（下面将给出），再加上目标函数是个线性函数，于是，就使最优解的出现范围大为缩小。这样，就使我们可能实现一个从无限到有限的转化，即从对无穷多个函数值的比较，转化为只须考察有限多个函数值，从而找出目标函数的最大(小)值。

要从无穷多个可行解中找出最优解来，是一件非常困难的工作。此问题的解决建立

在一系列最重要定理的基础上，而这些定理又是从图解法的启示中得来的。

1. 图解法

对于两个变量的L.P.问题，可用图解法求解。此法简便、直观，所给问题也无须化为标准型。

例5 用图解法解例1，即解（1.1）—（1.5）：

$$\max \quad z_1 = 5x_1 + 4x_2 \qquad (1.1)$$

$$\text{s.t.} \quad 3x_1 + 5x_2 \leqslant 15 \qquad (1.2)$$

$$2x_1 + x_2 \leqslant 5 \qquad (1.3)$$

$$2x_1 + 2x_2 \leqslant 11 \qquad (1.4)$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

把x_1和x_2看成平面上点的坐标（如图1.1），每个不等式决定一个半平面，图中直线（1.4）（其方程就是将不等式（1.4）的"≤"改为"="而得来）上的箭头即指明该约束条件所决定的半平面。显然，同时满足全部约束条件的点集就是图1.1中的多边形$OABC$，它就是所给问题的可行解集S。注意，由图1.1可见，直线（1.4）并不构成可行解集边界的一部分，它实际上是个多余的约束，即点（x_1，x_2）只要满足了（1.2）和（1.3），就一定满足（1.4）。

现在，我们来在S中找出最优解，即使目标函数取最大值的点。当z_1取定某一常数z'时，等式

$$5x_1 + 4x_2 = z'$$

代表一直线，其上所有点的目标函数值都相同，故称它为目标函数**等值线**，将上式改写为：

$$x_2 = -\frac{5}{4}x_1 + \frac{1}{4}z'$$

当z'改变时，得一族斜率$k = -\frac{5}{4}$的平行线。当z'逐步增大，则等值线离开原点愈远。我们要想在多边形$OABC$上找出一点，使其对应之z'最大，那就要在上述平行线（即等值线）中找出这样一条，它既与多边形$OABC$相交，又离原点尽可能地远。由图1.1可见，经过B点的一条即符合此要求，即B点的坐标既满足约束条件，又使目标函数取最大值。

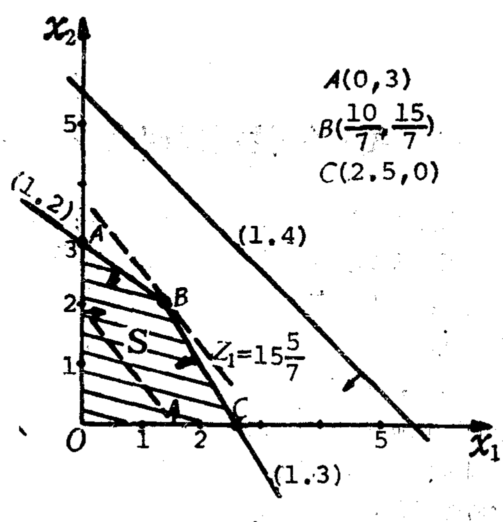


图 1.1

B点系二直线$3x_1 + 5x_2 = 15$与$2x_1 + x_2 = 5$之交点。解此方程组得B点之坐标为$x_1 = \frac{10}{7}$，$x_2 = \frac{15}{7}$。这就是最优解，它

是多边形 $OABC$ 的一个顶点。目标函数之最优值为 $z^{*}=15\frac{5}{7}$。这就是说，某食品厂每天应安排生产Ⅰ型饼干 $\frac{10}{7}$ 吨，Ⅱ型饼干 $\frac{15}{7}$ 吨，则能获得最大利润 $15\frac{5}{7}$ 百元。也只有这样，资源才得以最有效的利用。

例 6 假若例 1 中的食品厂考虑到市场销售情况的变化或原料价格的变化，需要调整饼干的售价，于是利润获得情况也随之变化。比如假设Ⅰ型饼干每吨由获利润 5 百元降为 3 百元，而Ⅱ型饼干每吨获利由 4 百元升为 5 百元。于是目标函数即为

$$z_1=3x_1+5x_2$$

由图 1.1 可知，此时一切目标函数等值线都与 AB 边平行，而最优等值线就将与 AB 边重合。因此，AB 上每一点都是最优解，最优值都是 15. 此例中最优解有无穷多个，即出现所谓多重最优解的情况，但下述结论亦真：最优值可在某些顶点上(此例中的 A, B)达到。

通过用图解法求解只有两个变量的特殊的 L.P. 问题，我们可以获得某些解一般 L.P. 问题的重要规律，主要的有以下两点：

第一，关于可行解集的结构问题。从二维情形已可见，可行解集的图形有个特点：它的所有边界部分总是向外凸出的，而决无一处是向图形里面凹进去的。在有界集情形（如例 1 ）就是一个凸多边形，在无界集情形，也表现着这种凸性，总之，凸性似乎应是可行解集的一个基本特性。

第二，关于最优解的获得方法问题。如果 L.P. 问题有最优解，则最优解可在可行解集的某些“顶点”中找到。

可以证明，上述两个结论在一般情况下（即在 n 维空间中）确实是对的。为了使大家容易理解有关的基本原理，我们将结合两个几何概念来加以介绍。

2. 凸集和极点

设 $E\subset R^n$。若 E 中任意两点 $x^{(1)}$ 和 $x^{(2)}$ 的连线上的一切点仍属于 E，即若 $x^{(1)}\in E$，$x^{(2)}\in E$，就必有 $x=ax^{(1)}+(1-a)x^{(2)}\in E$（其中 $0\leqslant a\leqslant 1$），则称 E 为**凸集**。

例如三角形、矩形、四面体、实心圆、实心球等都是凸集，而圆环、圆周都不是凸集。图1.2中点集 D、E 是凸集，F 不是凸集。

若对于凸集 E 中的点 x，不存在 E 中两个相异的点 $x^{(1)}$ 和 $x^{(2)}$，使下式成立。

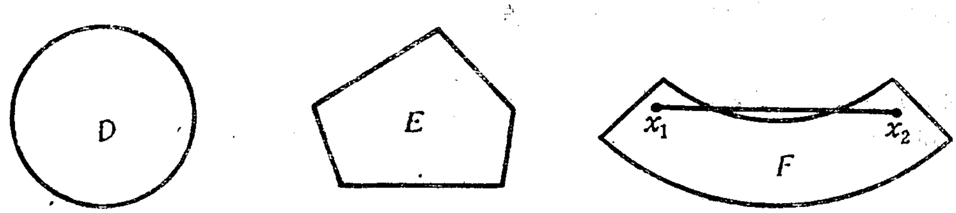


图 1.2

$$x = ax^{(1)} + (1-a)x^{(2)} \qquad (0<a<1)$$

则称 x 为 E 的**极点**或**顶点**。用几何语言说，极点就是不能成为 E 中任何线段的内点的那种点。例如三角形、矩形、四面体之顶点，圆周上的一切点都是这些图形各自的极点。

图1.2中 D 的边界点都是极点，E 的五个顶点也都是极点。

3. 基本定理

现在可以将有关的定理综合地叙述如下：

线性规划问题的可行解集 S（若非空）是凸集；只要有可行解，就一定有极点，且极点的个数是有限的；若线性规划问题有最优解，则至少有一个极点就是最优解。或者说，若目标函数有最优值，则最优值必至少在某一极点上达到。

为了给出寻找极点的具体方法，我们再从解方程组的角度讨论几个概念。

4. 基、基解和基可行解

为了方便起见，我们将标准型 L.P. 问题中的（1.8）写成

$$\sum_{j=1}^{n} P_j x_j = b \qquad (1.15)$$

其中
$$P_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

称为 x_j 的系数列向量。

现考查由 A 的全部列向量构成的向量组 $P=(P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_n)$。因 $r(A)=m$，所以，P 的极大无关组含有 m 个线性无关的向量。这些向量所对应的变量在今后的讨论中起着重要的作用。为此，

设 $\quad x_{j1},\ x_{j2},\ \cdots,\ x_{jm} \qquad (1.16)$

是约束方程组（1.8）中的 m 个变量。如果与这些变量对应的 m 个系数列向量

$$P_{j1},\ P_{j2},\ \cdots,\ P_{jm}$$

线性无关（亦即它是向量组 P 的一个极大无关组），则称（1.16）是 L.P. 问题（1.7）—（1.9）的**一组基**，记为 β，并称（1.16）中的每个变量为**基变量**，而称方程组（1.8）中的其它变量为**非基变量**。又把 m 阶方阵

$$B=(P_{j1},\ P_{j2},\ \cdots,\ P_{jm})$$

叫做基 β 所对应的**基阵**。显然 B 的行列式 $|B| \neq 0$.

现设（1.16）是一组基。在（1.8）中令所有非基变量为0，则（1.8）变为：

$$\sum_{k=1}^{m} P_{jk} x_{jk} = b$$

因为 $P_{j1},\ P_{j2},\ \cdots,\ P_{jm}$ 线性无关，故此方程组有唯一解。设此解为：

$$x_{j1}=\bar{b}_1,\quad x_{j2}=\bar{b}_2,\quad \cdots,\quad x_{jm}=b_m$$

则如下取值的 x_1，x_2，…，x_n：

$$\begin{cases} x_{jk}=\bar{b}_k, & k=1,\ 2,\ \cdots,\ m \\ \text{其余 } x_j=0 \end{cases} \tag{1.17}$$

是（1.8）的一组解，显然它是由基所决定的。

故称（1.17）为由基（1.16）所确定的**基解**。若基解中所有的 $x_j\geqslant 0$，则称此基解为**基可行解**，这时还把基（1.16）叫做**可行基**，把由基所对应的基阵叫**可行基阵**。若基可行解的所有基变量均取正值，则称它为**非退化的（或正则的）基可行解**，相应的基阵叫非**退化的可行基阵**；如果有些基变量取零值，则称为**退化的基可行解**，相应的基阵叫**退化的可行基阵**。

例 7　研究下述问题的基和基解：

$$\begin{aligned} \min\ & z=x_1+2x_2-x_3 \\ \text{s.t.}\ & x_1 \qquad\quad +2x_4-x_5=8 \\ & \qquad x_2 \qquad + x_4+x_5=1 \\ & \qquad\quad x_3+ x_4-x_5=6 \\ & \qquad\quad x_1,\ \cdots,\ x_5\geqslant 0 \end{aligned} \tag{1.18}$$

解　我们有

$$A=(P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ P_5)=\begin{pmatrix}1&0&0&2&-1\\0&1&0&1&1\\0&0&1&1&-1\end{pmatrix}$$

（ⅰ）因为 P_1，P_2，P_3 线性无关，所以 $\beta_1=(x_1,\ x_2,\ x_3)$是一组基，它对应的基阵是 $B_1=(P_1,\ P_2,\ P_3)$．在（1.18）中令非基变量 x_4 和 x_5 为0，则得 $x_1=8$，$x_2=1$，$x_3=6$，故 β_1 所确定的基解为$(8,\ 1,\ 6,\ 0,\ 0)^T$。显然它是基可行解，从而 β_1 是可行基，B_1 可行基阵。

（ⅱ）因为 P_3，P_4，P_5 也线性无关，所以 $\beta_2=(x_3,\ x_4,\ x_5)$也是一组基，它对应的基阵是 $B_2=(P_3,\ P_4,\ P_5)$．在（1.18）中令非基变量 $x_1=x_2=0$，则该方程组变为：

$$\begin{aligned} 2x_4-x_5&=8 \\ x_4+x_5&=1 \\ x_3+ x_4-x_5&=6 \end{aligned}$$

其解为：$x_3=1$，$x_4=3$，$x_5=-2$．故 β_2 确定的基解为$(0,\ 0,\ 1,\ 3,\ -2)^T$．因 $x_5<0$，所以此基解不是基可行解，从而 β_2 不是可行基，B_2 也不是可行基阵。

类似地还可以求出其他一些基和基解。但可见，对于一个给定的矩阵 $A_{m\times n}$ 来说，$Ax=b$的基最多只有 C_n^m组，从而基解及基可行解的个数也是有限的。

我们知道基可行解和极点有等价性。因为 $x\in S$ 是极点的充分必要条件是：它是基可行解。由此可知，关于极点的所有结果都可转到基可行解上，比如我们有：只要有可

行解，就一定有基可行解，且基可行解的个数是有限的；若L.P.问题有最优解，则至少有一个基可行解就是最优解。

我们曾经谈到，由于约束方程组中方程的个数少于未知量的个数，致使约束方程组有无穷多个解，再加上考虑非负条件，构成的可行解，一般来说，仍是无穷多个。要从这无穷集合中选出一个最优解来，通常是很困难的，然而，由于有了上述一系列基本定理，就使这一困难在原则上得到了解决。这些定理中，对我们来说，最重要的结论就是：L.P.问题如果有最优解，则最优解可在基可行解中找到，而基可行解的个数是有限的。因此，我们只需在有限多个基可行解中去寻找最优解。下一节要讲到的单纯形法，就是根据这些原理构思出来的。

§1.2 单纯形法

从上节末可知，若已给L.P.问题的最优解存在，则只需在有限多个基可行解中去寻找。如此说来，求解线性规划问题一事似应已完全解决，因为我们可以先把有限多个基可行解找出来，然后再一个一个地比较在这有限多个基可行解上的目标函数值，从中选出最小者，由此便可得出最优解和目标函数的最优值。

但实际上这种办法是很难采用的。因为矩阵A有m行、n列，因而$Ax=b$的基解最多时可以有C_n^m个，C_n^m这个数增长极快，比如当$n=20$，$m=10$时，$C_n^m=184786$。在基解中满足非负条件的，即基可行解，一般说来，也很多很多。故当m，n较大时，要想把全部基可行解求出来，工作量很大。因此我们需要寻找一种新的更有效的办法，使得我们在任意地获得一个基可行解x以后，若它不是最优解，我们便能很容易地得到一个新的基可行解x'，而$z(x')$比$z(x)$更接近目标函数的最优值。这样，我们便能迅速地达到最优值，而且不需要把所有基可行解都搜索出来。

我们知道，基可行解完全是由可行基决定的。现在再给出一个最优基和最优基阵的概念。

若可行基β所确定的基可行解是最优解，则称β为**最优基**，相应的基阵称为**最优基阵**。

于是，我们的任务就是：如何从一切可行基中把最优基找出来，具体地说，这里面包含以下三个问题：

（1）如何获得第一个可行基（亦称初始可行基）？

（2）怎样判断一个可行基是不是最优基？

（3）若所得可行基不是最优基，怎样由它出发，去寻找新的“更好的”可行基，以致最终求出最优基？

后两个问题较为麻烦，我们将首先研究它们。为此，当然假设初始可行基是容易作出来的。为了有效地解决这些问题，线性规划理论已经建立了自己的基本工具，这就是单纯形表。用它解题或作理论分析，都很方便。