# 理论力学习题解析

陈笃炎　高松坡
赵成璧　徐步政　编

中国农业机械出版社

本书分静力学、运动学、动力学三篇共十六章。内容参考工科120学时理论力学教学大纲，并力求与现行通用教材相配合。每章分理论提要和习题解析两部分。全书共收集各种类型、不同深度的习题508道，其中85%以上都作了较详细的解答。

本书可供电视大学、职工大学、函授大学和工科院校学生参考，亦可供一般工程技术人员参考。


理论力学习题解析

陈笃炎　高松坳　赵成璧　徐步政　编

责任编辑　袁明

中国农业机械出版社出版

北京市海淀区阜成路东 钓鱼台乙七号

四川省金堂新华印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

新华书店经售

*

787×1092　32开　$25^1/_2$印张　569千字

1984年10月北京第一版 · 1986年12月成都第二次印刷

印数：33,601—36,200　　定价：5.20元

科技新书目：131—161

统一书号：15216 · 192

# 前　言

理论力学是工科院校机械、土建、航空、动力等类专业的一门重要的技术基础课程。其任务是使学生掌握物体机械运动的一般规律及其研究方法，培养分析和解决工程中力学问题的能力，并为学习一系列后继课程和有关科学技术打好必要的基础。

理论力学的基本理论一般并不难懂，但如何应用有关理论去分析和解决问题，对初学者来说，往往比较困难，关键应加深对有关定理和概念的理解和掌握力学的分析方法。因此，解题是理论力学学习中颇为重要的一环。这就是说，在理论指导下，通过一定数量的解题训练，是掌握本课程基本理论和分析方法的必要实践。为此，本书在总结基本理论的基础上，分析和解答了各种类型和不同深度的习题，以供初学理论力学的读者参考。

本书分静力学、运动学、动力学三篇共十六章，内容参考工科120学时理论力学教学大纲，并力求与现行通用教材相配合，每章分理论提要和习题解析两部分。理论提要是一章内容的总结，概述了基本概念、定理、公式以及解题要点或解题步骤；习题主要选自国内外理论力学和工程力学的教材、参考书和习题集。全书共收集各类不同深度的习题508道（静力学144道，运动学115道、动力学249道），其中85%以上都作了较详细的解答。在解题方法方面，力求做到概念明确，推理有据，步骤清楚。对有多种解法的习题，我们一

般只采用习题所在章节教学内容所要求的解法，因而不一定是最佳解法。

本书可供电视大学、职工大学、函授大学和工科院校学生参考，亦可供一般工程技术人员参考。

参加本书编写的有陈笃炎、高松坡、赵成璧、徐步政，并由陈笃炎负责主编。

由于编者水平所限，书中缺点和错误之处，敬希读者批评指正。

编　者

一九八二·九

# 目　录

# 第一篇 静 力 学

## 第一章 汇 交 力 系

### 理 论 提 要

作用在物体上各力的作用线都相交于一点的力系称为**汇交力系**。根据力的可传性，各力作用线的汇交点可看成是各力的公共作用点，所以汇交力系有时也称为**共点力系**。另外，按照各力的作用线是否都位于同一平面内，汇交力系又分为**平面汇交力系**和**空间汇交力系**。

### 一、汇交力系的合成

作用于物体上的力系如果可以用一个力来代替而不改变对物体的运动效应，那么这个力就称为该力系的**合力**，而力系中的各个力则称为**分力**。由各分力求合力叫做力系的合成；反之，一个力也可以分解为若干个分力。

**（一）力的平行四边形法则和力三角形法则**

作用于物体上同一点的两个力可以合成为一个合力，合力与原来两力共作用点，并等于两力的矢量和；即合力矢由以原来两力矢为邻边所构成的平行四边形的对角线来表示。

设物体上$A$点作用有两个力$\boldsymbol{F}_1$和$\boldsymbol{F}_2$（图1-1a），用$\boldsymbol{R}$代表它们的合力，则有矢量表达式

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2 \qquad (1\text{-}1)$$

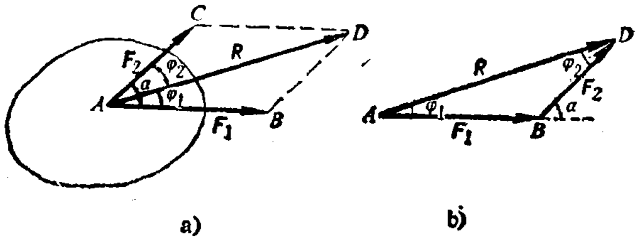



图 1-1

为求合力$\boldsymbol{R}$的大小和方向，可以用几何作图法或者用三角公式计算。

**几何作图法：**

选取适当的比例尺作出力的平行四边形，其对角线的长度按比例等于合力的大小，对角线与分力之间的夹角则表示合力的方向。可分别用尺和量角器在图中量出。

由图1-1a可见，求合力$\boldsymbol{R}$时，实际上不必作出整个力的平行四边形，而只要将力$\boldsymbol{F}_1$和$\boldsymbol{F}_2$首尾相接作出力三角形$ABD$（图1-1b），则矢量$\boldsymbol{AD}$就代表合力矢$\boldsymbol{R}$。这种合成方法称为**力三角形法则**。

**用三角形公式计算：**

若已知$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$及其夹角$\alpha$，则用余弦定理得合力$\boldsymbol{R}$的大小为

$$R=\sqrt{F_1^2+F_2^2-2F_1F_2\cos(180^\circ-\alpha)} \qquad (1\text{-}2)$$

合力$\boldsymbol{R}$与两分力$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$之间的夹角$\varphi_1$、$\varphi_2$，可由正弦定理求得，即

$$\frac{F_1}{\sin\varphi_2}=\frac{F_2}{\sin\varphi_1}=\frac{R}{\sin(180^\circ-\alpha)}$$

所以

$$\sin\varphi_1=\frac{F_2\sin\alpha}{R},\qquad \sin\varphi_2=\frac{F_1\sin\alpha}{R} \tag{1-3}$$

此外

$$R=F_1\cos\varphi_1+F_2\cos\varphi_2 \tag{1-4}$$

力的平行四边形法则（或力三角形法则）是解决力系的合成和力的分解问题的基础。

**（二）汇交力系的合成**

汇交力系合成的结果得一合力，合力的作用线通过力系的汇交点，合力的大小和方向等于力系中各力的矢量和。

设物体上作用一汇交力系$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，……$\boldsymbol{F}_n$，则该力系的合力

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\cdots+\boldsymbol{F}_n=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i$$

或简写为

$$\boldsymbol{R}=\Sigma\boldsymbol{F} \tag{1-5}$$

Ⅰ．合成的几何法

应用力多边形法则将力系中各力按首尾相连的次序作出力多边形(作图的顺序不影响合成的结果)，连接第一个力的始端和最后一个力的末端所得力多边形的封闭边，就是合力矢$\boldsymbol{R}$。

对于平面汇交力系，用几何作图法求合力很方便，只要选取适当的比例尺并足够精确地作出力多边形，则合力$\boldsymbol{R}$的大小和方向就可以按同一比例尺在图中直接量出。对于空间汇交力系，由于力多边形是一条空间折线，因而不容易直接量出合力的大小和方向，所以空间问题一般不用几何作图法，而采用解析法。

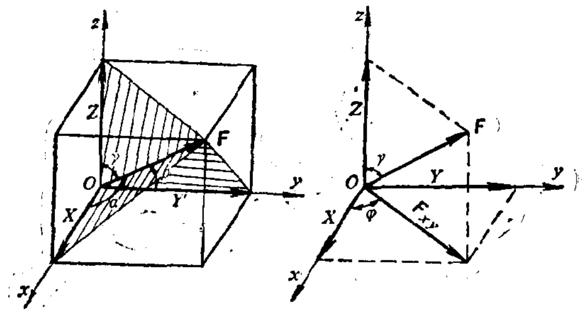
Ⅱ．合成的解析法

（1） 力在直角坐标轴上的投影

**直接投影法**

若已知力$\boldsymbol{F}$与空间直角坐标系三个轴的夹角分别为$\alpha$、$\beta$和$\gamma$（图 1-2 a），则力$\boldsymbol{F}$在三个坐标轴上的投影分别为

$$\left.\begin{aligned} X&=F\cos\alpha \\ Y&=F\cos\beta \\ Z&=F\cos\gamma \end{aligned}\right\} \tag{1-6}$$




a)　　　　b)

图 1-2

如果已知力$\boldsymbol{F}$在三个坐标轴上的投影$X$、$Y$和$Z$，也可以反过来求出力$\boldsymbol{F}$的大小和方向，即

$$\left.\begin{aligned} &F=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2} \\ &\cos\alpha=\frac{X}{F},\qquad \cos\beta=\frac{Y}{F},\qquad \cos\gamma=\frac{Z}{F} \end{aligned}\right\} \tag{1-7}$$

**二次投影法**

这种方法的要点是先将力$\boldsymbol{F}$投影到某一坐标面上，而后再将坐标面上的投影投影到坐标轴上。如图 1-2b 所示，

先求力$F$在$Oxy$面上的投影$F_{xy}$，显然$F_{xy}=F\sin\gamma$，而后再将$F_{xy}$投影到$x$和$y$轴上，于是可得

$$\left.\begin{aligned}X&=F\sin\gamma\cos\varphi\\Y&=F\sin\gamma\sin\varphi\\Z&=F\cos\gamma\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}8)$$

在某些实际问题中，当力$F$与坐标轴之间的夹角不易直接确定时，应用二次投影法往往是较为方便的。

（2） 力沿直角坐标轴的分解

在空间矢量运算中，力矢有时须用矢量分解式表示。为此，将力$F$按坐标轴$x$、$y$和$z$的方向分解为空间正交分量$F_x$、$F_y$和$F_z$（图1-3），这些分量称为力$F$的**坐标轴向分量**。写成关系式有

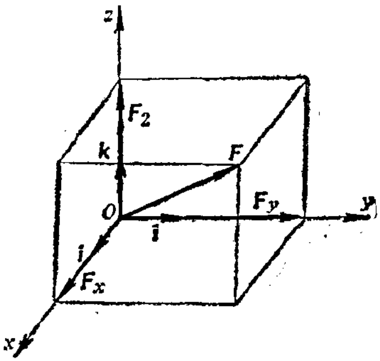



图 1-3

$$F=F_x+F_y+F_z\qquad(1\text{-}9)$$

容易看出，力$F$的坐标轴向分量的模，分别与该力在相应坐标轴上投影的绝对值相等，即

$$|F_x|=|X|,\quad|F_y|=|Y|,\quad|F_z|=|Z|$$

令$i$、$j$、$k$分别表示直角坐标轴$x$、$y$、$z$的单位矢量，则上式可写为

$$F_x=Xi,\quad F_y=Yj,\quad F_z=Zk\qquad(1\text{-}10)$$

因而（1-9）式又可写为

$$F=Xi+Yj+Zk\qquad(1\text{-}11)$$

这就是力$F$沿坐标轴向的分解式。

（3） 用解析法求合力

由合矢量与分矢量的投影关系定理可知，合力在某一轴上的投影等于诸分力在同一轴上投影的代数和。于是，汇交力系的合力$\boldsymbol{R}$在直角坐标系$Oxyz$的三个轴上的投影分别为

$$\left.\begin{aligned}R_x&=X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n=\Sigma X\\R_y&=Y_1+Y_2+\cdots\cdots+Y_n=\Sigma Y\\R_z&=Z_1+Z_2+\cdots\cdots+Z_n=\Sigma Z\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}12)$$

算出合力的投影之后，合力$\boldsymbol{R}$的大小和方向即可用下列公式求得：

$$\left.\begin{aligned}R&=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}\\&=\sqrt{(\Sigma X)^2+(\Sigma Y)^2+(\Sigma Z)^2}\\\cos(\boldsymbol{R},x)&=R_x/R,\quad\cos(\boldsymbol{R},y)=R_y/R,\\&\qquad\cos(\boldsymbol{R},z)=R_z/R\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}13)$$

## 二、汇交力系的平衡条件

汇交力系平衡的充分和必要条件是力系的合力等于零。即

$$\boldsymbol{R}=0\quad\text{或}\quad\Sigma\boldsymbol{F}=0\qquad(1\text{-}14)$$

**（一）汇交力系平衡的几何条件：** 力多边形自行封闭。

**（二）汇交力系平衡的解析条件——平衡方程**

Ⅰ．平面汇交力系

$$\left.\begin{aligned}\Sigma X&=0\\\Sigma Y&=0\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}15)$$

Ⅱ．空间汇交力系

$$\left.\begin{aligned}\Sigma X&=0\\\Sigma Y&=0\\\Sigma Z&=0\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}16)$$

### （三）求解物体在汇交力系作用下平衡问题的一般方法和主要步骤

1．明确研究对象

弄清题意，根据问题的要求，选取合适的研究对象，并单独画出其简图。

2．分析研究对象的受力情况，作受力图

先在图上画出全部主动力；而后根据约束的性质，解除约束画出相应的约束反力。如存在二力构件时，要注意约束反力的作用线应沿二力作用点的连线。在同一平面内受三个力作用而平衡的构件中，若已知其中两个力的作用线的交点，则第三个力的作用线必通过该点(三力平衡汇交定理)，通常可由此确定第三个力的作用线。

3．根据汇交力系的平衡条件求出未知量

用几何作图法解题时，要按力多边形中各力首尾相接的条件画出封闭的力多边形，而后用尺和量角器在图中量出未知力的大小和方向。为此要注意作图的精度和比例尺的选定。

用解析法解题时，首先要根据实际情况选择合适的坐标轴，尽量使每个平衡方程中只出现一个未知量，以避免解联立方程。要注意力在坐标轴上投影的符号及数值，对于未知力的指向，可以先假定，而后从解出结果的正负号来决定其正确的指向。

4．必要时应对计算结果进行分析讨论。

# 习 题 解 析

## 一、力的合成和分解

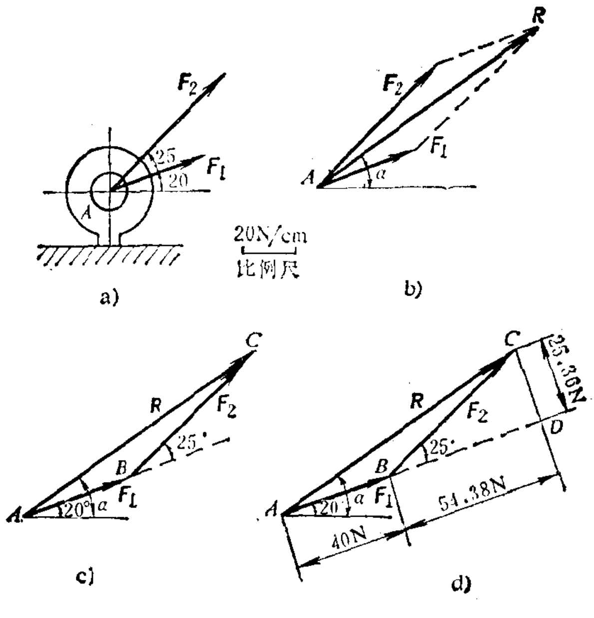
**1-1** 作用在圆环$A$上的两个力$\boldsymbol{F}_1$和$\boldsymbol{F}_2$（图a），其大小分别为$F_1=40$N，$F_2=60$N，试求该两力的合力。

**解：**（一）用几何作图法求解

选比例尺如图示。按比例以$\boldsymbol{F}_1$和$\boldsymbol{F}_2$为邻边作力的平行四边形(图b)或作力三角形（图c）。由图上量得合力

$$R=98\text{N}, \qquad \alpha=35°$$

$\alpha$为合力$\boldsymbol{R}$与水平方向的夹角。




题 1-1 图

（二）用三角公式计算

这种方法仍以力的平行四边形法则或力三角形法则为依据，但不需要严格按比例作图，而是应用三角学中余弦定理和正弦定理来计算合力的大小和方向。

对图c应用余弦定理，得

$$R^2=F_1^2+F_2^2-2F_1F_2\cos B$$

即

$$R^2=40^2+60^2-2\times40\times60\cos155^\circ$$

可解出合力$\boldsymbol{R}$的大小为

$$R=97.73\text{N}$$

再应用正弦定理，得

$$\frac{F_2}{\sin A}=\frac{R}{\sin B}$$

代入已知数值，得

$$\sin A=\frac{60\sin155^\circ}{97.73}=0.259$$

$$\therefore\quad A=15^\circ$$

于是得合力$\boldsymbol{R}$与水平方向的夹角

$$\alpha=A+20^\circ=35^\circ$$

（三）另一种三角解法（图d）

由直角三角形$BCD$，得

$$CD=F_2\sin25^\circ=60\sin25^\circ=25.36\text{N}$$

$$BD=F_2\cos25^\circ=60\cos25^\circ=54.38\text{N}$$

再由直角三角形$ACD$，得

$$\text{tg}A=\frac{25.36}{94.38}=0.269$$

$$\therefore\quad A=15^\circ$$

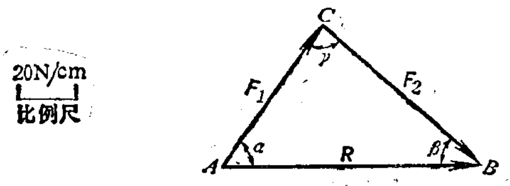
$$R=25.36/\sin A=97.73\text{N}$$

$$\alpha=A+20^\circ=35^\circ$$

**1-2** 已知两共点力 $F_1=60\text{N}$，$F_2=75\text{N}$，如其合力 $R=93\text{N}$，试求该两力与合力之间的夹角。

**解：**（一）用几何作图法求解

选比例尺如图示。在图上任取一点 $A$，自 $A$ 点按比例画矢量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{R}$，再分别以 $A$ 和 $B$ 点为圆心，以 $|\boldsymbol{F}_1|=60\text{N}$，$|\boldsymbol{F}_2|=75\text{N}$ 为半径作两圆弧得交点 $C$，按照力的三角形法则，显然 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{F}_1$，$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{F}_2$。由图中直接量得




题 1-2 图

$\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{R}$ 的夹角　　$\alpha=53°$

$\boldsymbol{F}_2$ 与 $\boldsymbol{R}$ 的夹角　　$\beta=40°$

（二）用三角公式计算

对力的三角形 $ACB$ 应用余弦定理，得

$$R^2=F_1^2+F_2^2-2F_1F_2\cos\gamma$$

即

$$\cos\gamma=\frac{F_1^2+F_2^2-R^2}{2F_1F_2}=\frac{60^2+75^2-93^2}{2\times60\times75}$$

$$=0.064$$

$$\therefore\quad \gamma=86.33°$$

再应用正弦定理，得

$$\frac{F_1}{\sin\beta}=\frac{F_2}{\sin\alpha}=\frac{R}{\sin\gamma}$$

所以

$$\sin\alpha=\frac{F_2\sin\gamma}{\mathrm{R}}=\frac{75\times0.998}{93}=0.805$$

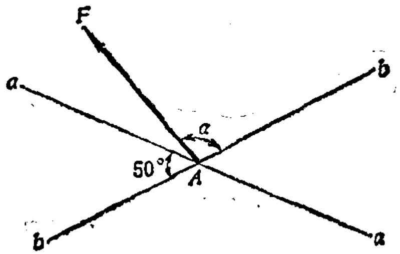
$$\therefore\quad \alpha=53.61^\circ$$

$$\sin\beta=\frac{F_1\sin\gamma}{R}=\frac{60\times0.998}{93}=0.644$$

$$\therefore\quad \beta=40^\circ$$

**1-3** 将$F=800\mathrm{N}$的力沿图示$a—a$和$b—b$线分解，已知$\boldsymbol{F}$沿$b—b$线分力的大小为120N，试求角$\alpha$。

答：$\alpha=123.4^\circ$




题 1-3 图

**1-4** 力$\boldsymbol{F}$的大小$F=140$ N，试将它分解为两力$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$，使能同时满足下列条件：（1）$F_1+F_2=160\mathrm{N}$；(2)两分力$\boldsymbol{F}_1$和$\boldsymbol{F}_2$之间的夹角为60°，求此两分力的大小。

答：$F_1=60\mathrm{N}$，$F_2=100\mathrm{N}$

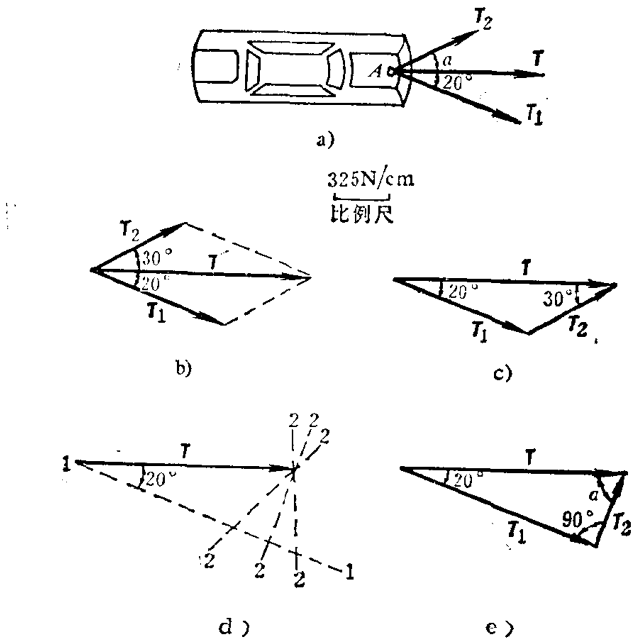
**1-5** 一汽车因故障停在路上，用图 a 所示两根绳索拖动。若两绳的合力$T=1300\mathrm{N}$，方向沿汽车的轴线。试求：

Ⅰ．已知$\alpha=30^\circ$时，两绳拉力$\boldsymbol{T}_1$和$\boldsymbol{T}_2$的大小。

Ⅱ．欲使$T_2$值为最小，角$\alpha$及$\boldsymbol{T}_1$、$\boldsymbol{T}_2$的大小。

**解：**

Ⅰ．已知$\alpha=30^\circ$，求$\boldsymbol{T}_1$、$\boldsymbol{T}_2$的大小




题 1-5 图

（1）用几何作图法求解

选比例尺如图示。按比例先画出合力 T＝1300N， 方向水平向右，再以两绳为邻边作出力的平行四边形（图b），或者按比例作出力三角形（图c）， 由同一比例尺在图b或图c中量得

$$T_1=848\text{N},\ T_2=582\text{N}$$

（2）用三角公式计算

根据力三角形，应用正弦定理，得

$$\frac{T_1}{\sin 30°}=\frac{T_2}{\sin 20°}=\frac{T}{\sin 130°}$$

所以