高等学校数学学习辅导教材

GAODENG XUEXIAO SHUXUE XUEXI FUDAO JIAOCAI

高等数学习题全解

[下 册]

同济·高等数学(三、四版)

陈小柱 陈敬佳/编 著

GAODENG SHUXUE XITI QUANJIE

大连理工大学出版社

高等学校数学学习辅导教材

高等数学习题全解

(下册)

同济高等数学(三版、四版)

陈小柱　陈敬佳　编著

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题全解(上、下册)/陈小柱,陈敬佳编著. —大连:大连理工大学出版社,2002.8

高等学校数学学习辅导教材

ISBN 7-5611-1990-9

Ⅰ.高… Ⅱ.①陈… ②陈… Ⅲ.高等数学-解题 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 047405 号

大连理工大学出版社出版发行
大连市凌水河 邮政编码:116024
电话:0411-4708842 传真:0411-4701466
E-mail:dutp@mail.dlptt.ln.cn
URL:http://www.dutp.com.cn
大连理工印刷有限公司印刷

开本:850 毫米×1168 毫米 1/32 字数:410 千字 印张:12.75
印数:1—10000 册

2002 年 8 月第 1 版 2002 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑:刘 杰 责任校对:杜 娟
封面设计:王福刚

定价:25.00 元(下册 12.50)

卷首赠言

著名教育家钱令希院士指出："学习如同在硬木头上钻螺丝钉，开头先要搞正方向，锤它几下，然后拧起来就顺利了。否则钉子站得不稳不正，拧起来必然歪歪扭扭，连劲也使不上。求学之道慎起步啊！"

——摘自《中国科学院院士自述》

著名数学家北京大学教授姜伯驹院士指出："高等数学最重要的概念是什么，有相当一部分同志对这个问题看法是：高等数学这个课程中最重要、最基本的概念是极限，我不是太赞成这个看法"，"你要说高等数学，那首先是微分、积分这些概念弄清楚，并且会用，我觉得高等数学的重点首先应该是这个"。

——摘自《数学的实践与认识》1997.4

前 言

高等数学课的重要性是众所周知的。在高等数学的教学过程中，正面临着一个**无法回避却日益突出**的**矛盾**：一方面，高等数学课的学时普遍减少，另一方面，期末考试、后续专业课程及考研对学生学习这门课又有较高的要求。

正是为了解决这一问题，我们编写了这本具有工具书性质的《高等数学习题全解》(上、下册)。

对于想更进一步学好高等数学这门课程的学生是大有益处的。

由于同济四版教材只对三版教材每章末增加了总习题，其他习题基本上沿用了第三版，故本书既适合第三版的读者，也适合第四版的读者。每道题我们都选用了较好的解题思路，但限于篇幅，一题多解的工作只好留给读者。

为了给尽可能多的读者提供便利，本书三部分分别是：同济大学主编《高等数学》(上、下册)第三版、第四版习题全解、第四版第一章～十二章总习题全解及考研资料。

每章又分三部分：导学、本章知识结构、习题全解。“导学”不同于一般的“内容提要”或“本章小结”。“导学”呈献给读者的是教学实践中的“抑扬顿挫”，“起承转合”和“弦外之音”。我们渴望初学者学得更轻松。

本书由姜乃斌教授担任主审，参加审稿的有刘晓东教授及王志平副教授。

限于编者水平，加之时间仓促，不妥之处一定存在，希望广大读者提出批评和指正。

编　者

2002 年 4 月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目 录

第一部分

第二部分

第三部分*

* 关于全部历届考研数学真题及其分类全解(含理工类:数学一、数学二;经济类:数学三、数学四)和由科学研究而划分出的通用教材中的考研命题敏感区,请参阅大连理工大学出版社《考研数学真题全解及考点分析》系列教材。

第八章　多元函数微分法及其应用

> 人生成功的秘诀是当机会来到时，你已经准备好了。
>
> ——迪斯累里

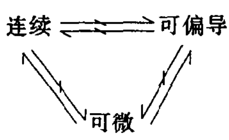
一、导　学

下册难度系数明显加大，务必更多地投入时间和精力。

上册书的第一章，对应着这里第一节。本章即多元微分学的全部内容。

压缩是合理的。例如，第二节偏导数，抓住"偏"字。偏向于某一变元，把另一个或多个变元看做常数，从而把多元降格为一元。于是上册的求导知识自此大量涌入。又如，第六节微分法在几何上的应用，抓住"切向量"与"法向量"(在阅读课本时，体会两向量是如何被"发现"的)，上册平面方程与直线方程的知识就够用了。要在对比中学习，并善于转化。

把握"差异"是关键。本章前三节各有一个反例：第一节 P8 的反例说明函数在某一点极限不存在(因而不连续)，第二节 P17 的反例表明偏导数存在(均算出为 0)的点可以不连续，第三节 P23 的反例显示，偏导数存在的点可以不可微，因而有了以下关系：



"$\longrightarrow$" 表示"可推出"

"$\not\longrightarrow$" 表示"推不出"

这与上册不同，其根源之一是 $P(x,y)\longrightarrow P_0(x_0,y_0)$（在平面上）的方式比 $x\longrightarrow x_0$（在数轴上）的方式要复杂得多。另外，上册的罗必塔法则等内容，在下册并无对应的情形。

本章掌握得如何的试金石在第四节、第五节。如果“谁是谁的函数”不清楚，即“关系没弄明白”，如果P32例4看不懂，如果对P40 $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$ 等记号“讨厌”，那么可以肯定，本章没学好。第四节P32倒数第一行并不难看懂：

树状图：$f_1'\begin{cases} u\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \\ v\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \end{cases}$ 从 f_1' 到 z 有两条路，因而两项相加；每条路均是两步，因而均为两个因子相乘。有

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1'}{\partial z} &= \frac{\partial f_1'}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f_1'}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} \\ &= f_{11}'' + xyff_{12}'' \end{aligned}$$

第五节隐函数求导公式(2)，(4)，(6)的共同特征为：负号，分式，互倒(例如，在 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$ 中，左边 z 上 x 下，右边 x 上 z 下，互倒。雅可比记号下的情形也是如此)。

P39推导公式(4)时，把 z 看成 x,y 的函数，而在用公式(4)时，$F_x = F_x(x,y,z)$ 的含义是把 y,z 看成常数，对 x 求偏导。

雅可比式记号的引入使得公式更加简明。

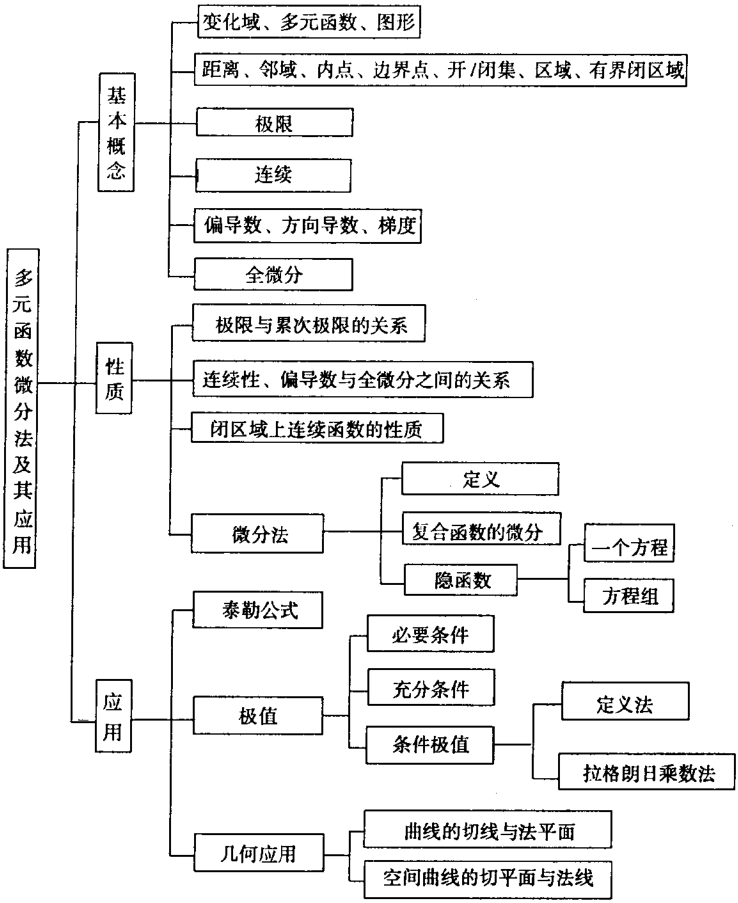
拉格朗日乘数法的精髓：把函数与条件“捆”在一个式子中。例如，$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$，再由“三元”函数 $L(x,y,\lambda)$ 有极值的必要条件

$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_\lambda = 0(\text{即 } \varphi(x,y) = 0) \end{cases}$$

得驻点，最后根据实际问题本身判定是否为最值，无须再用充分条件定理进行判别。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

二、本章知识结构



三、习题全解

习题 8-1

1. 已知函数 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}$，试求 $f(tx,ty)$。

解 用tx,ty去替换等式两边的x,y得

$$f(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2-tx\cdot ty\cdot \mathrm{tg}\,\frac{tx}{ty}$$
$$=t^2\left(x^2+y^2-xy\mathrm{tg}\,\frac{x}{y}\right)=t^2f(x,y)$$

2. 试证函数 $F(x,y)=\ln x\cdot\ln y$ 满足关系式:

$$F(xy,uv)=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v)$$

证明 左边$=F(xy,uv)=\ln(xy)\cdot\ln(uv)$

$=(\ln x+\ln y)(\ln u+\ln v)$

$=\ln x\cdot\ln u+\ln x\cdot\ln v+\ln y\cdot\ln u+\ln y\cdot\ln v$

$=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v)$

$=$右边

3. 已知函数 $f(u,v,w)=u^w+w^{u+v}$,试求 $f(x+y,x-y,xy)$。

解 令 $u=x+y,v=x-y,w=xy$

$$f(x+y,x-y,xy)=(x+y)^{xy}+(xy)^{(x+y)+(x-y)}$$
$$=(x+y)^{xy}+(xy)^{2x}$$

4. 求下列各函数的定义域:

(1) $z=\ln(y^2-2x+1)$;

(2) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$;

(3) $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$;

(4) $u=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{z}}$;

(5) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$;

(6) $z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$;

(7) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}$

$(R>r>0)$;

(8) $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解 (1) $y^2-2x+1>0$,即函数的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid y^2-2x+1>0\}$$

(2) $x+y>0,\quad x-y>0$,即函数的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x+y>0,\quad x-y>0\}$$

(3) 要求:$4x-y^2\geqslant 0, 1-x^2-y^2>0$ 且

$1-x^2-y^2\neq 1$ 解得

$$D=\{(x,y)\mid y^2\leqslant 4x,\quad 0<x^2+y^2<1\}$$

(4) 该函数的定义域为

$$D=\{(x,y,z)\mid x>0,\quad y>0,\quad z>0\}$$

(5)$y\geqslant 0,\quad x-\sqrt{y}\geqslant 0$ 即 $x\geqslant\sqrt{y}$,

可得 $x\geqslant 0$ 且 $x^2\geqslant y$,该函数定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0,\quad x^2\geqslant y\}$$

(6)$y-x>0,\quad x\geqslant 0,\quad 1-x^2-y^2>0$,函数的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid y-x>0, x\geqslant 0,\quad x^2+y^2<1\}$$

(7)$R^2-x^2-y^2-z^2\geqslant 0$,　即 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$

$x^2+y^2+z^2-r^2>0$,　即 $x^2+y^2+z^2>r^2$

函数的定义域为

$$D=\{(x,y,z)\mid r^2<x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\}$$

(8)$x^2+y^2\neq 0$

且 $\left|\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 1$　即 $z^2\leqslant x^2+y^2$,函数定义域为

$$D=\{(x,y,z)\mid z^2\leqslant x^2+y^2,\quad x^2+y^2\neq 0\}$$

5. 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$;　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{x^2+y^2}$

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{1}{x^2+y^2}$;　　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$;　　(6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{x}$

(7) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$

解　(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}=\dfrac{1-0\times 1}{0^2+1^2}=1$

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{x^2+y^2}=+\infty$

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(2-\sqrt{xy+4})(2+\sqrt{xy+4})}{xy(2+\sqrt{xy+4})}\text{(分子有理化)}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}}=-\frac{1}{4}$$

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(\sqrt{xy+1}+1)(\sqrt{xy+1}-1)}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\sqrt{xy+1}+1)=2$$

(6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{xy}\cdot y=\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin t}{t}\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ y\to 0}}y=1\cdot 0=0$

(7) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x^2+y^2}{2}}{(\dfrac{x^2+y^2}{2})^2}\cdot\dfrac{x^2+y^2}{4x^2y^2}$

$$\left(\text{用公式:}1-\cos t=2\sin^2\frac{t}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)=+\infty$$

6. 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

证明　由 $x^2+y^2\geqslant 2|xy|$，　即 $|xy|\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{2}$，

得
$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$$

对于任给 $\varepsilon>0$，取 $\delta=2\varepsilon$，

当　$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right| \leqslant \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} < \frac{\delta}{2}=\varepsilon$$

由极限定义有 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

7. 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x+y}{x-y}$；　　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

(1) 证明　让动点 $P(x,y)$ 沿 $y=2x$ 趋向 $(0,0)$

得 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=2x\to 0}} \dfrac{x+y}{x-y}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2x}{x-2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{-x}=-3$

让动点 $P(x,y)$ 沿 $x=2y$ 趋向 $(0,0)$

得 $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x=2y\to 0}} \dfrac{x+y}{x-y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{3y}{y}=3$

$-3\neq 3$，而极限存在要求：沿任何路径取极限都相等，

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x+y}{x-y}$ 不存在。

(2) 证明　让动点 $P(x,y)$ 沿 $y=x$ 趋于 $(0,0)$

得 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{x^4}=1$

让动点 $P(x,y)$ 沿 $y=2x$ 趋向 $(0,0)$，则

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=2x\to 0}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^4}{4x^4+x^2}=0$$

$1\neq 0$ 所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 不存在。

8. 函数 $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 在何处间断？

解　为使函数表达式有意义，需 $y^2-2x\neq 0$，所以，在 $y^2-2x=0$ 处，函数

$$z=\frac{y^2+2x}{y^2-2x} \text{ 间断。}$$

习题 8-2

1. 求下列函数的偏导数：

(1) $z = x^3y - y^3x$; (2) $s = \dfrac{u^2 + v^2}{uv}$

(3) $z = \sqrt{\ln(xy)}$; (4) $z = \sin(xy) + \cos^2(xy)$

(5) $z = \ln\tan\dfrac{x}{y}$; (6) $z = (1 + xy)^y$

(7) $u = x^{\frac{y}{z}}$; (8) $u = \arctan(x - y)^z$

解 (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y - y^3$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 3xy^2$

(2) $\dfrac{\partial s}{\partial u} = \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{u}{v} + \dfrac{v}{u}\right) = \dfrac{1}{v} - \dfrac{v}{u^2}$

$\dfrac{\partial s}{\partial v} = \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{u}{v} + \dfrac{v}{u}\right) = \dfrac{1}{u} - \dfrac{u}{v^2}$

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\ln x + \ln y}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{\ln x + \ln y}} \cdot \dfrac{1}{x}$

$= \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}}$

同理 $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}$

(4) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \cos(xy) \cdot y + 2\cos(xy) \cdot [-\sin(xy)] \cdot y$

$= y[\cos(xy) - \sin(2xy)]$

由于 x 与 y 可以互换，对称，

因而 $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x[\cos(xy) - \sin(2xy)]$

(5) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{\tan\dfrac{x}{y}} \cdot \sec^2\dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{y}\csc\dfrac{2x}{y}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{\tan\dfrac{x}{y}} \cdot \sec^2\dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{-x}{y^2} = -\dfrac{2x}{y^2}\csc\dfrac{2x}{y}$

(6) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y(1 + xy)^{y-1} \cdot y = y^2(1 + xy)^{y-1}$

因为 $z = (1 + xy)^y = e^{y\ln(1+xy)}$

故 $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}e^{y\ln(1+xy)} = e^{y\ln(1+xy)}\left[\ln(1 + xy) + y \cdot \dfrac{x}{1 + xy}\right]$

$= (1 + xy)^y\left[\ln(1 + xy) + \dfrac{xy}{1 + xy}\right]$

(7) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{y}{z}x^{(\frac{y}{z}-1)}$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com