陕西省成人高校统编教材

IANXINGDAISHU

经济管理数学(二)

# 线性代数



刘生锋 惠风莲 主编
李天祥 主审

陕西科学技术出版社

(陕)新登字第 002 号

陕西省成人高校统编教材
经济管理数学(2)
线性代数
主编　刘生锋　惠凤莲
陕西科学技术出版社出版发行
(西安北大街 131 号)
新华书店经销　　西安理工大学印刷厂印刷
787×1092 毫米　32 开本　8.75 印张　18.5 万字
1995 年 8 月第 1 版　　1995 年 8 月第 1 次印刷
印数:1—5000
ISBN 7—5369—2336—8/G・611
定价:7.50 元

## 内容提要

本书是陕西省成人高校统编教材《经济管理数学》(二).全书共分七章,内容包括行列式、矩阵、n 维向量、线性方程组、方阵的特征向量与相似阵、投入产出数学模型、正交方阵约当标准形及其二次型.每一概念都从实例引入,深入浅出,叙述清楚,简明易懂.习题形式多样,且附有答案,每章有小结,体现了成人教学特点.该书可供各类高等院校(含本科)使用,更适合在职工程技术人员自学.

本书按照 46～54 学时编写,具有弹性,各类院校的有关专业可依照所给学时数选学有关内容(凡有 * 标志的为选学部分)

# 序

在我省成人高等教育战线，以党的十四大精神为指导，认真贯彻落实《中国教育改革和发展纲要》，大力推进成人高等教育改革的大好形势，供管理干部学院、职工高等学校、普通高等学校函授教育、夜大学经济管理类专业使用的新教材——《线性代数》，正式出版了，这既是我省成人高等教育在教材建设方面获得的一项重要成果，也是在教学改革方面取得的一个新成绩，令人十分高兴.

近十年来，我省成人高等院校担任经济管理类专业《线性代数》课程教学任务的老师们，在教学实践中，积极进行教学改革，摸索和积累了不少宝贵经验. 将这些经验加以系统总结，编写出具有成人教育特色的《线性代数》教材，既是进一步深化教学改革、提高教学质量、办出成人教育特色的迫切需要，也是广大师生的共同愿望. 在陕西省教育委员会成人教育处的倡导和组织下，刘生铎、惠凤莲、丁明妮、施棉棉、王素明、高振儒、张志等同志热情地担负起了这一项艰巨任务. 他们经过近一年时间的努力，编写出了这本《线性代数》教材. 这种团结协作、乐于奉献、迎难而上、勇于开拓的精神，令人钦佩.

在今年10月初召开的审稿会上，与会同志共同认为，这本教材有以下几个特点：(一)较好地贯彻了国家教委关于编写成人高等教育教材"既要保证高等教育规格要求，又要体现成人教育的特色的指导思想"，(二)较好地处理了基础课与专

业课之间的关系，坚持了基础理论教学以应用为目的，以必须、够用为度，以掌握概念、强化应用为重点的原则.(三)通俗易懂，便于自学.文笔比较流畅，层次清晰，并适当地选择了不同类型的例题、习题，便于学生自学自查.(四)博采众长.借鉴了广播电视大学、管理干部学院、普通高等学校部分《线性代数》教材的优点，又吸收了我省管理干部学院、职工高等学校、普通高校函授教育和夜大学经济类专业《线性代数》课的教学及教学改革经验.

编写一本好的《线性代数》教材，是很不容易的，需要在教学实践中不断加以补充，完善和提高.我希望各院校在使用过程中，能够提出宝贵意见，供本书在再版时进一步修改.

本教材将作为我省成人高校统考、抽考的依据.

李天祥

1994 年 12 月 2 日

# 目　　录

# 第一章　行列式

行列式是研究线性方程组的一个重要工具. 本章从二阶、三阶行列式出发引出 $n$ 阶行列式的概念并讨论其性质与计算方法，最后给出克莱姆法则.

## 第一节　二阶和三阶行列式

二元一次方程组的一般形式为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1—1}$$

用加减消元法得：

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$
$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，此方程组有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\[2ex] x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1—2}$$

为了便于使用和记忆，引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{2}$

称为二阶行列式，$a_{11}$、$a_{12}$、$a_{21}$、$a_{22}$ 称为二阶行列式的元素，横排称为行，纵排称为列，从左上到右下的对角线为**主对角线**，从右上到左下的对角线为副对角线.则二阶行列式的值等于主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积. 利用以上记号，二元一次方程组(1—1) 当

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

时，它的解可以表示为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \dfrac{D_1}{D} \\ x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \dfrac{D_2}{D} \end{cases}$$

其中 $D$ 是方程组(1—1) 未知数的系数，按其在方程组中的次序排列成的行列式称为系数行列式，$D_1$ 与 $D_2$ 分别是用常数项 $b_1$、$b_2$ 替换系数行列式第 1 列和第 2 列元素后构成的行列式.

类似地，为了讨论三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (1—3)$$

的解，我们引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1—4}$$

称为三阶行列式.

三阶行列式的展开式可按图 1—1 所示的"对角线法则"求得:展开式共有 $3! = 6$ 项,三项为正,三项为负.正的三项分别为三条实线(主对角线方向)上元素之积"$a_{11}a_{22}a_{33}$"、"$a_{12}a_{23}a_{31}$"、"$a_{13}a_{21}a_{32}$";负的三项分别为三条虚线(副对角线方向)上元素之积"$a_{13}a_{22}a_{31}$"、"$a_{12}a_{21}a_{33}$"、$a_{11}a_{23}a_{32}$".

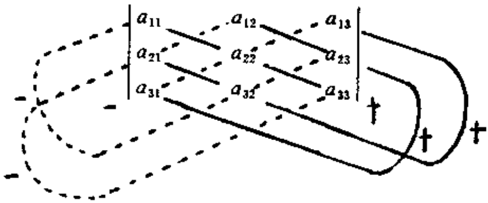


图 1—1

利用三阶行列式的记号,三元一次线性方程组当它的系数行列式 $D \neq 0$ 时,它的解可表为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} \\ x_3 = \dfrac{D_3}{D} \end{cases} \tag{1—5}$$

其中 $D_1$、$D_2$、$D_3$ 是用常数项 $b_1$、$b_2$、$b_3$ 分别替换系数行列式 $D$ 中的第一列、第二列、第三列后所构成的行列式.

**例 1** 求三阶行列式的值

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1 & 5\\ 3 & 4 & 7\\ 0 & 8 & 6\end{vmatrix}$$

**解**

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & 5\\ 3 & 4 & 7\\ 0 & 8 & 6\end{vmatrix}=2\times4\times6+1\times7\times0+5\times8\times3$$
$$-5\times4\times0-1\times3\times6-2\times7\times8$$
$$=38$$

**例 2** 解线性方程组

$$\begin{cases}x-y+2z=13\\ x+y+z=10\\ 2x+3y-z=1\end{cases}$$

**解** 因为

$$D=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}=1\times1\times(-1)+(-1)\times1$$
$$\times2+2\times1\times3-2\times1$$
$$\times2-(-1)\times1\times(-1)-1\times1\times3=-5$$

$$D_1=\begin{vmatrix}13 & -1 & 2\\ 10 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{vmatrix}=-5$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 13 & 2\\ 1 & 10 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=-10$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 13 \\ 1 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -35$$

所以 $x_1 = \frac{D_1}{D} = 1 \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 2 \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = 7$

## 第二节 $n$ 阶行列式的定义

为了给出 $n$ 阶行列式的定义，我们先介绍排列的逆序数的概念.

**一、排列的逆序数**

**定义 1.1** 由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 $n$ 级排列.

如：4321 与 3124 均是 4 级排列，而 51423 是一个 5 级排列.

由自然数 1,2,3 组成的有序数组共有 3! 个，它们是

123, 132, 213, 231, 312, 321.

一般的，$n$ 级排列的总个数有 $n!$ 个

1234 是一个 4 级排列，这个排列是按自然数顺序排列的，称为自然顺序. 在其他 4 级排列中，都可找到一个大数排在 1 个小数前面，例如 2143，2 排在 1 之前，4 排在 3 之前，这样的排列顺序与自然序相反，我们有下述定义.

**定义 1.2** 在一个 $n$ 级排列中，若一个较大的数排在一个较小的数的前面，则称这对数构成一个**逆序**. 一个 $n$ 级排列中逆序的总数，称为这个 $n$ 级排列的**逆序数**.

用在 $n$ 级排列前冠以 $N$，表示该 $n$ 级排列的逆序数.

**例 1** 求 5 级排列 31452 的逆序数

**解**　在5级排列31452中，共有31，32，42，52四个逆序，因此 $N(31452)=4$

**例2**　求 $n$ 级排列 $n(n-1)\cdots\cdots1$ 的逆序数

**解**　在这个排列中，比1大的数有 $n-1$ 个，比2大的数有 $n-2$ 个，…… 比 $n-1$ 大的数有1个

故　$$N(n(n-1)\cdots 3\ 2\ 1)=(n-1)+(n-2)+\cdots 2+1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

若一个排列的逆序数为奇数，称这个排列为**奇排列**，若为偶数，称为**偶排列**

$N(31452)=4$，它是偶排列

$N(23154)=3$，它是奇排列

$N(12\cdots n)=0$，我们规定它是偶排列

在一个排列中，将它的两个数对调，而其余的数不动，得到另一个排列，这样的交换称为**对换**，将31452经过1和5对换变成35412，而31452是偶排列，35412是奇排列，因此对换(15)改变了排列的奇偶性，一般地有

**定理1.1**　一个排列中的任意两个数对换，改变排列的奇偶性

**证**　首先讨论对换的两个数是相邻的情况，即

$$\cdots i\quad j\cdots \qquad (A)$$

$$\downarrow$$

$$\cdots j\quad i\cdots \qquad (B)$$

比较上而的二个排列，$i,j$ 以外的数彼此间的逆序状况在排列 $(A)$ 与 $(B)$ 中是一样的. $i,j$ 以外的数与 $i$（或 $j$）的逆序状况在 $(A)$ 和 $(B)$ 中也是一样的，仅仅改变了 $i$ 与 $j$ 的次序，因此，新

排列比原排列增加一个逆序(当 $i < j$ 时)或减少一个逆序(当 $i > j$ 时). 故排列(A) 与(B) 奇偶性改变.

现在看一般情形

设对换的两个数 $i$ 与 $j$ 之间还有 $t$ 个数 $k_1, k_2, \cdots, k_t$,即

$$\cdots\ i\ k_1\ k_2\ \cdots\ k_t j\ \cdots \qquad (C)$$

$$\cdots\ j\ k_1\ k_2\ \cdots\ k_t i\ \cdots \qquad (D)$$

排列(C) 变为排列(D) 可通过一系列相邻两数的对换得到,把排列(C) 经过 $t+1$ 次相邻两数对换变为排列(E).

$$\cdots\ k_1\ k_2\ \cdots\ k_t\ j\ i\ \cdots \qquad (E)$$

再把排列(E) 通过 $t$ 次相邻两数的对换变为排列(D) 于是,总共经过 $2t+1$ 次相邻两数的对换把排列(C) 变为排列(D),从而 $2t+1$ 次相邻两数的对换改变了排列的奇偶性,故(C) 与(D) 的奇偶性改变. 证毕

**定理 1.2** 在所有的 $n!$ 个 $n$ 级排列中,奇偶排列的个数相等,各为 $\frac{n!}{2}$ 个.

**证** 假设在 $n!$ 个 $n$ 级排列中有 $S$ 个奇排列,$t$ 个偶排列.

将这 $S$ 个奇排列的头两个数都对换一下,由定理 1.1 知,$S$ 个奇排列全部都变为偶排列,但偶排列一共有 $t$ 个故 $S \leqslant t$. 再将 $t$ 个偶排列的头两个数字对换,又得到 $t$ 个不同的奇排列,又有 $t \leqslant S$,故 $S = t$,即奇排列与偶排列的总数相等,又这两种排列共有 $n!$ 个,从而它们各占 $\frac{n!}{2}$ 个. 证毕

**二、$n$ 阶行列式的定义**

现在我们以三阶行列式为例,分析它的结构找出一般规律,引出 $n$ 阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

从上式不难发现

(1) 三阶行列式有 $3^2$ 个元素，它是 $3!$ 项的代数和，其中每一项都是取自不同行不同列的 3 个元素的乘积. 每一项都可表为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中行标按自然序排列 123，列标为 3 级排列 $j_1j_2j_3$，当 $j_1$，$j_2$，$j_3$ 取遍所有 3 级排列时，得到三阶行列式所有的项.

(2) 每项前所取的符号与该项列标构成的排列的奇偶性有关：当列标构成的排列是偶排列时取正号，是奇排列时取负号. 例如：$a_{11}a_{22}a_{33}$，$a_{12}a_{23}a_{31}$，$a_{13}a_{21}a_{32}$ 列标所成排列是偶排列，这三项前取正号. $a_{13}a_{22}a_{31}$，$a_{12}a_{21}a_{33}$，$a_{11}a_{23}a_{32}$ 列标所成排列是奇排列. 这三项前取负号.

(3) 带正号的项与带负号的项的个数分别为 3 项，各占总项数的一半.

上面这些规律显然对二阶行列式成立.

**定义 1.3** 设有 $n^2$ 个数，排成一个 $n$ 行 $n$ 列的正方表

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 $n$ 阶行列式，它表示所有这样乘积的代数和，每个乘积中含有 $n$ 个元素，这 $n$ 个元素分别取自不同行不同列，这些乘积

可写为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

每个元素的第1个下标(行标)按1 2 … $n$的自然顺序排列，第2个下标(列标)$j_1,j_2,\cdots,j_n$是某一个$n$级排列，每个这样的排列有一个逆序数，当这个逆序数为偶数时，这项前取正号，是奇数时，这项前取负号，$n$阶行列式用式子表示就是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1--6}$$

$\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}$ 表示当 $j_1j_2\cdots j_n$ 取遍所有 $n$ 级排列时的项加起来，由于 $n$ 级排列有 $n!$ 个，这样的项就有 $n!$ 项(通常用 $D$ 表示行列式)①

**例3** 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

**解** 根据定义

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2j_3j_4)} (-1)^{N(j_1j_2j_3j_4)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

---

① n阶行列式($n \geqslant 4$)的求值，没有对角线法则，只能用定义和性质化简计算.

因为行列式中有许多零元素，在展开式中有许多项为零，只要把不为零的项求出来就可以了，取一般项

$$(-1)^{N(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

显然只有 $j_1=4, j_2=3, j_3=2, j_4=1$ 时 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}\neq 0$ 其他项都含有零元素，因此它们之积为零，而 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 的第二个下标的排列 4321 逆序数是偶数，故这项前取正号.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$$

**例 4** 求下列四阶行列式值

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

**解** 由定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2j_3j_4)}(-1)^{N(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

因为行列式第四行除 $a_{44}$ 外，其他各元素都是零，所以只有 $j_4=4$ 时，有乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{44}$，又因为第三行中除元素 $a_{33}, a_{34}$ 外，其他两个元素都是零，按定义要求每项的元素应取自不同列，因此 $j_3$ 不能取 4，这样 $j_3$ 只能取 3，$j_3=3$ 有乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{33}a_{44}$，同理有 $j_2$ 只能取 2，$j_1$ 只能取 1，所以只有一项