数学基础知识丛书

逻辑代数初步

莫绍揆

江苏人民出版社

逻辑代数初步

莫绍揆

江苏人民出版社

内 容 提 要

这套《丛书》共二十四册，系统介绍数学基础知识和基本技能，供中学数学教师、中学生以及知识青年、青年工人阅读。

《丛书》根据现行全日制十年制学校《中学数学教学大纲》（试行草案）精神编写，内容上作了拓宽、加深和提高。《丛书》阐述的数学概念、规律，力求符合唯物辩证法，渗透现代的数学观点和方法，以适应四个现代化的需要。为了便于读者阅读，文字叙述比较详细，内容由浅入深，由易到难，循序渐进，习题、总复习题附有答案或必要的提示。

本书共分四个部分，前三部分完整地介绍逻辑代数（布尔代数）三个组成部分：集合代数，命题代数，开关代数；第四部分着重对中学数学中的重要概念"对应"与"函数"，用逻辑代数的现代数学观点，予以严格阐述。

本书在编写过程中，曾得到汪灵华、吕义忠、陈光还等同志的宝贵帮助。

逻辑代数初步

莫 绍 揆

江苏人民出版社出版
江苏省新华书店发行
徐州印刷厂印刷
1980年5月第1版
1980年5月第1次印刷
印数： 1—80,000册
书号：13100·048 定价：0.42元
责任编辑 何震邦

目　　录

一、集 合 代 数

§1 集合的定义和表示法

集合是数学中一个很根本的概念，很难再用别的词来定义它。通常只是描述它的一些特性，帮助人们对它的理解。

把一些确定的、彼此不同的事物作为一个整体来考虑时，这个整体便说是一个**集合**，简称为**集**，这些事物叫做该集合的**元素**。我们说，这些元素组成该集合；这些元素属于该集合；又说该集合由这些元素组成，或该集合含有这些元素等等。

例如，这间房子里的椅子，这所学校里的教室，全世界上活着的鱼，2 与 8 之间的整数，一切正整数等等，这些都组成集合。

上面那段描述集合的话，还须给一些补充解释。

第一，一集合中的元素的性质丝毫没有限制，既可以是生物（如鱼），又可以是非生物（如椅子），既可以是具体的（鱼和椅子），又可以是抽象的（如正整数），还可以是介于具体和抽象之间的（如教室，教室是一些房屋，但却是作一定用途的房屋，因为兼注意其用途，它不能说完全是具体的了）。可见不同集合之间的元素可以千差万别，没有任何限制。

不但不同集合之间的元素可以不同，就是同一集合之间的元素亦可以性质迥异，不能强求一律。茶壶、茶杯、茶盘

当然是不同类的，但通常却把这三者合起来组成一个集合，叫做茶具。又如桌子和椅子当然是不同类的，但通常却把一张桌子和四张椅子合成一集合，叫做家具。由于这些是常见的，人们习以为常不以为怪。如果把“太阳、墨水瓶、数2”合起来组成一个集合，人们便要惊异了，会问：“这样的集合有什么用？要它做什么？”的确，在目前，这个集合是没有用处，但它确确实实是一个集合。它的元素尽管彼此截然不同，但可以合起来组成一个集合。

第二，集合中的元素的个数亦没有限制，既可以是有限的（如在这房内的椅子的个数），又可以是无限的（如全体正整数的个数），个数有限时既可以马上知其确切数（如这房间内的椅子的个数），又可以目前暂时不知其确切数（如全世界上活着的鱼），这些都是容许的。

第三，所谓“确定的”，指这些事物本身应该是确定的东西，不能是一些模糊不清没有明确意义的概念。所谓“明确”是指某一事物是否在该整体内必须是明确的，或者在其中，或者不在其中，不应模棱两可，也不应该有第三个可能。例如，“很大的数”便很难说组成一个集合。它含有什么数，不含有什么数呢？一般说，0不在其中，“一万”似乎在其中，但“一千”在不在其中？10在不在其中？这便很难说了。象这样连元素“在不在其中”都不能明确，便不能组成集合。

第四，所谓“彼此不同”，是说，在集合中同一事物不能算作不同的元素而必须作为同一个元素对待。这里用例子可以看得更清楚。例如，作为数列来说，{1，1，3，2，1,}和{1，3，2}是不同的，前数列有五项，第一项,第二项，第五项都是1，但须作为三项而看待，后一数列则只有三项，

第一项是1，第二项是3．两数列显然是不同的数列．如果作为集合，由于同样的“1”只能看作一个元素，因此两个集合都只有三个元素，即1，2，3，所以两个集合是相同的集合．

第五，“作为一个整体来考虑”，这很重要．必须注意，作为整体的集合和集合中每个元素都是不相同的，正如作为整体的“代表团”和代表团中的每个成员都不相同一样．在日常，我们必须把“代表团的意见”和该团中各成员的“个人意见”区别开来，就是这个道理．又如，我们经常说：“这班学生有五十人”，这是说，作为整体的“这班学生”有五十人，至于其中成员，即每个学生，都只是一个人而不是五十个人．由这些例子，便可以看出两者的区别了．

另外还有两个问题必须弄清楚．

第一，只由一个元素组成的集合是否和该元素本身相同呢？现在大家都承认两者是不相同的，应加区别．正如，当某代表团只由一个代表组成时，虽然由同样一个人说话，但作为“代表团意见”发表的和作为“个人意见”发表的，这两种意见应该是有区别的．最近，有人提出，在某些特殊情况下，可以把两者看作一样，但是除去所说的若干特殊情况外，对其余情况，两者必须区别，不能混同．所以，我们认为，无论如何，一般说来，两者是不同的，应该加以区别的．

第二，没有元素能否组成集合呢？长期以来，人们都认为，没有元素当然没有集合，正如没有米当然煮不成饭一样．但是后来随着数学的发展表明，如果容许没有元素的集合，那么讨论起来更加方便，正如算术中把“没有人”叫做“0

个人”以后，运算起来更加方便一样。因此，现在大家都承认，没有元素也可以组成集合，叫做空集合。空集合一般以 ϕ（或 0 ）表示。

下面讨论集合的表示法。

空集合用 ϕ 表示，集合通常以大写拉丁字母如 A，B，C 表示。集合的元素，一般用小写拉丁字母如 a，b，c 等表示。

要确定或描述一个集合又该使用什么方法呢？如果该集合是由有限多个元素组成，而这些元素，我们又已经完全知道得清清楚楚的，那末最简便的方法是把元素一一列举出来，这叫做**列举法**。例如，$A_1=\{$太阳，墨水瓶，数2$\}$，$A_2=\{2,3,4,5,6,7,8\}$。

即使该集合由有限多个元素组成，但其元素太多，不便一一列举（如全世界的人），或者其元素目前还不能完全确知（如全世界活着的鱼），“不能确知”不但由于个数太多，有时即使个数极少也不能确知，例如五次方程

$x^5-4x^3+7x^2-9=0$ 只有五个根，但这五个根是什么，我们是不知道的，遇到这些情况便不应该用列举法。如果集合是由无限多个元素组成的（例如，全体正整数的集合）更不能用列举法。这时只能写出其元素的刻划特征，即这集合中各元素都共有这个特征，而集合以外的元素都不具有这个特征。特征性质都借助于“x”表示，例如

$A_3=\{x:\ x^5-4x^3+7x^2-9=0\}$；

$A_4=\{x:\ x$ 为世界上活着的鱼$\}$。

如果不致引起误会，亦可简写为：

$A_3=\{x^5-4x^3-7x^2-9=0$ 的根$\}$；

$A_4=\{$世界上活着的鱼$\}$。

这样的表示法叫做写出**特征法**。

这两种方法是最常用的方法。其中以写出特征法更为基本，因为凡能用列举法写出的，都可改用写出特征法。例如，上面列举法的两例，用特征法表示为

$A_1=\{x: x=$太阳或$x=$墨水瓶或$x=2\}$；

$A_2=\{x: x$为整数并且$2\leqslant x\leqslant 8\}$。

当然，如果可用列举法时，则使用列举法每每更清楚些也更方便些，所以列举法也不应该废除。

为了能够形象化地帮助理解，我们又可用图表示集合。最通常的方法是对给定的集合用圆表示，圆内的点表示该集合的元素，圆外的点表示不是该集合的元素，不同的圆表示不同的集合，但须注意，除非一圆包含在另一圆之内，否则，不能认为圆画得大些便表示相应的集合多些元素。这种圆通常叫做维因（*Venn*）圆，其实是由大数学家欧拉（*Euler*）首先使用的。

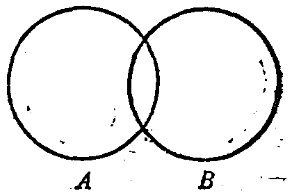

图 1

集合和传统逻辑中的概念有很密切的关系，概念是从事物的外表现象中抽象而得的抽象的东西。在传统逻辑中，概念分内涵与外延两方面。内涵指概念的本质，外延指该概念所包括的事物的总体。例如，“对边两两平行的四边形”是“平行四边形”这个概念的内涵，而各个各个的平行四边形的总体便是平行四边形这个概念的外延。这是传统逻辑对概念的讨论内容。

容易看见，集合便是某个概念的外延，而该集合的特征性质便是该概念的内涵。例如，设

$A=\{x: x$ 为其两双对边两两平行的四边形$\}$。

这里 A 便既是一个集合，又是平行四边形这个概念的外延，而“其两双对边两两平行的四边形”既是集合 A 的特征性质，又是平行四边形这个概念的内涵。可以说，讨论集合实质上便是从外延观点来讨论概念。

以前的传统逻辑讨论概念的时候，大体上更重视内涵，当外延相同但内涵不同时仍然当作不同的概念。例如“鬼”“有棱角的圆”这两概念，就其外延来说，都是空集，但内涵不同，我们一直把这两个看作不同的概念。如果着重外延，应该认为其外延是相同的，都是空集。

以前人们都想把传统逻辑改革，一直没有很好的结果，都是由于人们注重内涵的缘故，从布尔开始强调“外延”，把一概念的外延，即集合，作为专门研究的对象，不再拘泥于其内涵是否相同，于是才出现布尔代数，才使数理逻辑进入一个新的转折点。

可以说，把概念的讨论换为集合的讨论，这标志着注重点由内涵转为外延，标志着数理逻辑出现了新面貌，这是一个很重要的事件。

§2 两集合间的关系

定义 如果集合 A 的元素和集合 B 的元素全同，那末 A 和 B 相等，记为 $A=B$。

如果集合 A 的元素都也是集合 B 的元素，我们便说 B **包含** A，或说 A **被** B **包含**（或 A 含于 B），记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$。这时 B 的元素不必一定也是 A 的元素，如果 B 有些元素不是 A 的元素，便说 B **真包含** A，或说 A **被** B **真包含**（或 A **真**含于 B），记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$。

当A被B包含时，又说A为B的子集合（或子集），当A被B真包含时，亦说A为B的真子集合（真子集）。

如用图表示，则表示A的圆便画在表示B的圆的内部。因此，B是否包含A，可以由图很清晰地看出来。

试举一例。设$A_1=\{$偶质数$\}$，$A_2=\{$非平方数$\}$，$A_3=\{12$的因子$\}$，$A_4=\{8$的质因子$\}$，则有$A_1\subset A_2$，$A_1\subset A_3$，$A_1=A_4$，而A_2与A_3则互不包含但有公共元素。A_1的元素的特征（偶质数）和A_4的元素的特征(8的质因子)表面看来很不一样，但所含元素却完全相同，都只含有“2”一个元素，因此便有$A_1=A_4$。

设有任一集合A，当把A的元素逐次抽掉时，依次得到A的各个子集，最后，当把A的所有元素完全抽掉时，便得到空集。可见空集是任何集合A的子集。这也可这样理解："C为A的子集"指C的任何元素都是A的元素，亦即不可能找出是C的元素而不是A的元素的；当C为空集时，当然不可能找出是C的元素而不是A的元素的（因为，空集本身根本没有元素，当然更找不出满足该条件的元素了）。因此，根据定义，空集是任何集合的子集。

反之，如果有一集合B它是任何集合的子集，那末B必是空集。试设A_1，A_2无公共元素，B既是任何集合的子集，当然同时是A_1的子集又是A_2的子集了，满足这个条件的只有空集。

如果用圆表示集合，由于空集没有任何元素，所以空集不能用任何圆表示。因此，在维因圆表示法中，只能用空白表示空集合。

有没有一个集合它包含每一个集合呢？亦即，有没有一个集合它以每一集合为其子集呢？这个集合必以每一个集合

的元素为其元素，亦即它的元素穷尽了世界上所有的事物。这种集合是否存在呢？根据多方研究，现在大家都承认，无条件地以一切集合为其子集的集合是不存在的，但以一定范围内的各个集为其子集的集合则是存在的，叫做该范围的**全集**，并记为 I。严格说来，如果讨论的范围不同，则全集 I 也是不相同的，须使用不同的记号。但当讨论范围确定后，相应的全集便只有一个，所以通常便只使用 I，不再区别了。

在图形表示中，一般把全集 I 特用矩形表示，由于所讨论的集合都被 I 所包含，因此表示各集合的圆便都画在该矩形之中。

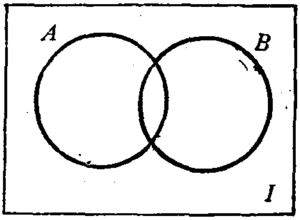

图 2

总结起来有：对任何集合 A 而言，

$$\phi \subseteq A \quad 及 \quad A \subseteq I.$$

换句话说，空集被任何集合 A 所包含，而全集包含任何集合 A。

§3 集合间的运算

上面讨论的两集合间的相等和包含，很类似于两数之间的相等和大小。我们知道在两数之间可以进行加减乘除等运算，同样，两集合之间亦有它们的运算，即由两个给定的集合可以作出一个新集合。下面研究集合的运算。

设给出两个集合 A，B，则

$$C_1 = \{x; \quad x 属于 A 或 x 属于 B\}$$

便叫做 A 与 B 的**并集**。记为 $C_1 = A \cup B$。读做 A 联 B，或 A 并 B。显然，C_1 的元素是由 A 的元素与 B 的元素汇总而得。当然，同时属于 A 又属于 B 的一个元素在 C_1 内只能算作一个。通常把并和算术中的加相对应。

其次，

$$C_2=\{x: \quad x\text{既属于}A\text{又属于}B\}$$

便叫做A与B的**交集**，记为 $C_2=A\cap B$，读为A**交** B。显然，C_2的元素恰是A与B的公共元素。通常把交和算术中的乘相对应。

其次，

$$C_3=\{x: \quad x\text{不属于}B\}$$

便叫做B的**补集**，记为 $C_3=B'$(或$\overline{B}$,或$-B$)，又叫补B。实施补运算时叫做**取补**，例如求B'便叫做取B的补。显然，C_3的元素是由B以外的（即不在B中的）元素所组成。由于$B''=B$，因此曾经有人把补运算和算术中"取反号"运算相对应（这也就是为什么B'又写为$-B$的缘故），但除去这一点彼此相似外，别的性质两者几乎毫无相似之处，作这个对应是弊多利少，现在很少作这种对应，因此，我们也不考虑这种对应。

并、交、补是集合代数中三个最基本的运算。有些书还引入求差运算：

$$C_4=\{x: x\text{属于}A\text{但不属于}B\}.$$

C_4叫做B相对于A的补集，记为$C_4=A-B$或$C_4=A\setminus B$，读为A减去B或A抽去B。有些人把$A\setminus B$和算术中的减法相对应（这便是记号$A-B$和求差运算、差集等名称的由来），但这种对应也因用处很少，不常被人采用。

补运算可用求差运算表示，因为$B'=I\setminus B$；反之，有了交运算以后求差运算可用交、补运算表示：$A\setminus B=A\cap B'$ 由于补运算是一元的，求差运算是二元的，两相比较，补运算要简单一些；因此取补运算代替求差运算作为基本运算是有好处的。

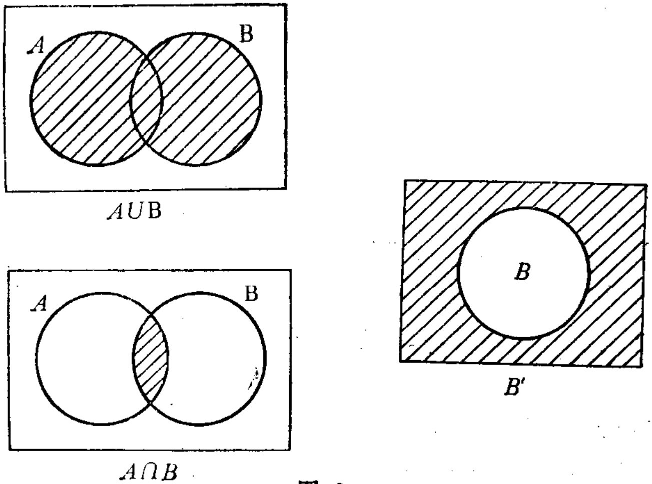

图 3

在图解法中，A与B之并可用A圆与B圆的合并来表示，A与B之交可用A圆与B圆的公共部分来表示，B之补可用B圆以外的部分来表示，这些都不再是圆，而是别的形状的区域。因此，所谓维因圆只是指对给定的集合用圆表示，并不是说所有的集合都用圆表示（这是无法贯彻到底的）。

例 设$A=\{$曲线l_1上的点$\}$，$B=($曲线l_2上的点$)$，那末，$A\cup B$便由两条曲线上全体的点所组成，而$A\cap B$便由两曲线的交点所组成，B'则由曲线l_2以外的点所组成（假定两曲线所在的面的点组成全集 I ）。

在这里，所谓取补在集合论中永远是就所讨论范围的全集而取补的，这同日常语言使用的取补（“非”“无”诸字样）方法不同，后者一般不是就全集而取补，只是就与该集有最密切关系的集而取补。

例如，中学生在学过虚数复数后，按理至少应该

取复数集为全集，“无理数”应该指“就复数集而言有理数的补集”，亦即指有理数以外的复数，包括$2i$，$1+i$等等，它们应该都算无理数。但是事实上，在中学里所谓无理数仅指有理数以外的实数如$\sqrt{2}$，π等等，不包括虚数的。又如，在平面几何里，讨论过许多图形后，应以“平面上的图形”作为全集才对，“不等边三角形”（它相当于“等边三角形的补集”）应该指“等边三角形以外的图形”，亦即应包括四边形，圆乃至椭圆双曲线等等。但事实上，通常所说的“不等边三角形”是就“三角形集”而取补的，它仅指“等边三角形以外的三角形”甚至不包括“等腰三角形”。凡此种种，表明日常用语中的“非”“不”“无”等词，和集合论上的取补并不完全相同，必须注意其区别，不能混用。

再举几个集合运算例子。

例 设$A=\{x:-3\leqslant x<1\}$，$B=\{x:2<x\leqslant 5\}$，$C=\{x:0\leqslant x\leqslant 7\}$，而以整个实数轴作为全集I。用开、闭区间记号写为：$A=[-3,1)$，$B=(2,5]$，$C=[0,7]$，$\mathrm{I}=(-\infty,\infty)$。这时有：

$A\cup B=[-3,5]\setminus[1,2]$；　$A\cap B=\phi$；

$A\cup C=[-3,7]$；　$A\cap C=(0,1)$；

$B\cup C=[0,7](=C)$；　$B\cap C=(2,5](=B)$；

又 $A'=(-\infty,-3)\cup[1,\infty)$；

$B'=(-\infty,2)\cup(5,\infty)$；

$C'=(-\infty,0)\cup(7,\infty)$。

又 $(A\cup B)\cap C'=[-3,1)$；

$(A\cup C)\cap B'=[-3,2]\cup(5,7]$；

$(A\cup C)\cap A'=[1,7]$；等等。

以上由读者自行绘出各区间图验证。

§4 集合运算的规律

上面是具体给定的集合间进行的运算，这和对具体的数字进行算术运算相同。在代数中，除对具体数字进行运算外，还须对文字（包括未知数和文字系数）进行运算。由于文字所取的值还未给出，在进行运算时，必须保证不管文字将来取得什么值，变换前后全式所取得的值不变（因此，所作变换也叫做恒等变换）。要能满足这个保证，必须对运算规律加以研究，使文字变换前后全式所取的值不变。这样一来，运算规律的研究，便是代数学的一个重要任务。

同样，在集合的运算方面，除对具体给定的集合进行运算外，还应该对一般的集合（所谓集合变元）进行运算，这时我们也只能作恒等变换，以保证不论集合变元取得怎样的具体集合为值，变换前后全式的值不变。所以研究有关集合运算的规律，也是集合代数中的一个重要任务。

很有趣的是，有关集合运算的规律和有关数的运算的规律非常类似，尤其是当我们作下列的对比时，其类似点更多（当然亦有例外，必须随时注意）：

集合	$\cup$	$\cap$	$'$	$\subset$	$\subseteq$	$=$	ϕ	I
数	$+$	$\times$	（无）	$<$	$\leqslant$	$=$	0	1

（A）**交换律** （1）$A\cup B=B\cup A$；（2）$A\cap B=B\cap A$。这两者分别和 $a+b=b+a$（加法交换律）；$a\cdot b=b\cdot a$（乘法交换律）相应。这两定律的证明非常简单，因为$A\cup B$，$B\cup A$都是由A的元素与B的元素汇总而组成；$A\cap B$，$B\cap A$都是由A，B的公共元素组成，显然它们是相等的。