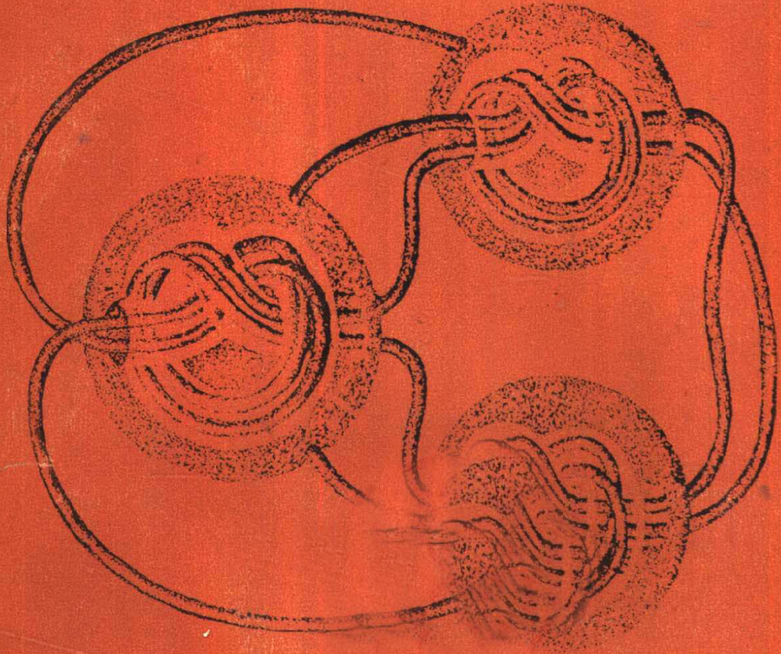

拓扑学的基础和方法

〔日〕野口 宏著

科学出版社

拓扑学的基础和方法

〔日〕野口 宏 著

郭卫中 王家彦 译

孙以丰 校

科 学 出 版 社

1 9 8 6

内 容 简 介

本书的主要内容大体可分为三部分：第一部分简要地介绍了拓扑学的发展情况；第二部分着重讲述了集合、映射、拓扑空间、流形、闭曲面的分类和向量场等拓扑学的基本内容，这是这本书的主体部分；第三部分研究了拓扑学在力学和生物学方面的一些应用，借以说明拓扑学与实际的联系以及它在其他学科中应用的广泛性.

本书的特点是，它选择了拓扑学最基本最主要的内容，巧妙地利用了大量的图和例，直观生动，容易理解.

本书可供大学生、中学数学教师、数学工作者以及想了解拓扑学的数学爱好者阅读.

野口 宏

トポロジー——基礎と方法

日本評論社，1979，第1版第11刷

拓扑学的基础和方法

〔日〕野口 宏 著

郭卫中 王家彦 译

孙以丰 校

责任编辑 杜小杨

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1986年3月第一版 开本：787×1092 1/32

1986年3月第一次印刷 印张：8 1/4

印数：001—6,200 字数：186,000

统一书号：13031·3070

本社书号：4409·13—1

定价： 1.95 元

译 者 的 话

《拓扑学的基础和方法》的作者是日本早稻田大学理工学部教授、理学博士野口宏先生。

《拓扑学的基础和方法》一书是 1971 年于日本出版的，到 1979 年已印刷了十一次，在较短的时间内印刷次数如此之多，可想而知它是深受日本广大读者欢迎的一本畅销书。

这本书的内容大体上可分为三部分：第一部分简要地介绍了拓扑学的发展状况；第二部分，也是本书的主体部分，用较多的篇幅着重叙述了拓扑学的基本内容和方法；第三部分研究了拓扑学在力学和生物学方面的一些应用。

这本书的显著特点是，它选择了拓扑学最基本最主要的内容；采用了由浅入深，通俗易懂的方法；巧妙地使用了大量的图和例，来说明拓扑学的抽象概念。我们相信把这样一本好书介绍给我国广大读者，将对拓扑学的教学、研究以及普及工作起到有益的作用。

本书可供大学生、中学数学教师、科技工作者、数学工作者以及想了解拓扑学的数学爱好者学习和参考。也可作为大专院校数学专业的教学参考书。

本书的前十章是郭卫中译的，后四章是王家彦译的。全部译稿承吉林大学数学系孙以丰教授审校。关于拓扑学在生物学和力学方面的应用部分的译稿还请兰书成、张世泽、郭庭选等同志看过，在此，谨致谢意。

限于译者的水平，本书译文会有不当或错误之处，欢迎读者指正。

译　者

1983 年 12 月

致中国读者

这次，北师范大学郭卫中、王家彦先生将拙著《拓扑学的基础和方法》译成中文出版，我感到十分荣幸，对两位先生的努力深表谢意.

我尽量把这本书写得简明易懂，让那些即使没有专门学过数学的读者也能直观地理解二十世纪产生的新几何学——拓扑学是一种什么样的学问，在科学方面起着什么样的作用.

因而，如果这本书对数学系的学生来说能成为拓扑学的入门书，对一般读者来说能成为常识性的现代数学的启蒙书，我是非常高兴的.

借此机会，我衷心祝愿贵国繁荣昌盛，人民幸福.

野口　宏

1984年1月

前　言

最近，法国的拓扑学家 R.托姆 (Thom) 发表了题为“生物学中的拓扑模型” (Topological Models in Biology, *Topology*, Vol.8, 313—335, 1969) 的论文. 拓扑学是由历史上著名的数理科学家 H. 庞加莱 (Poincaré) 等人创始的现代几何学，它是研究我们每个人都具有的图形朴素直观性质的数学. 所谓朴素的性质也正是那些基本的性质. 但是，直到本世纪，拓扑学才成为一门科学. 拓扑学一旦作为科学出现，它的威力不仅对整个数学而且对一般科学也都产生了巨大的影响. 前面说过的托姆的论文就是其中的一例. 我认为，拓扑学现在正处于发展的极盛时期. 今后，拓扑学在科学方面的应用，对促进科学的飞跃发展和拓扑学本身的成熟都将起着巨大的作用.

本书从这样的观点出发，以拓扑学的主要对象——流形为中心，把拓扑学的研究方法和托姆的形态形成论的梗概，尽量解释得通俗易懂.

最后，向给我们绘制优美点描插图的画家野口健先生以及一直关心并惠予出版的日本评论社的东弘幸先生致以深切的谢意.

野口　宏

1970 年 8 月 31 日

目　　录

第一章　拓扑学的进展

拓扑学可以说是从瑞士的 L. 欧拉 (Euler) 在 1736 年发表的论文开始的. 欧拉的这篇论文研究众所周知的所谓哥尼斯堡七桥问题，这是一个网络图一笔画的问题. 因此，拓扑学已是二百多年以前所产生的一门学问. 然而，也象其它任何科学

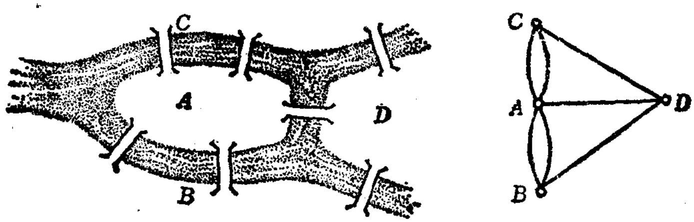

图　1-1

由某处出发，能否对七个桥的任何一个只通过一次回到原处，
这个问题和右边的网络图能否一笔画成的问题是相同的

那样，若去追溯拓扑学的发展历史，则在两千年前欧几里得 (Euclid) 完成的欧氏几何学中，就可见到拓扑学的痕迹了. 再夸张一点讲，我们的远古祖先狩猎民族已经发现了拓扑学. 古代人在捕捉动物的时候，把动物围在中间，如图 1-2 所示，这从数学观点来说，在平面上画出类似圆周的图形，就是利用了圆周把平面分成内、外两部分的这个拓扑学定理. 被围困的动物，只要它不能突围，仅仅在圆周内部活动，我们的祖先就能够捕捉到它们. 平面由圆周分成内、外两个部分的这种几何直观性质是拓扑学的典型问题. 这样，在远古时代，我们的祖先就已经具有了拓扑学的知识. 另外，当我们观察现

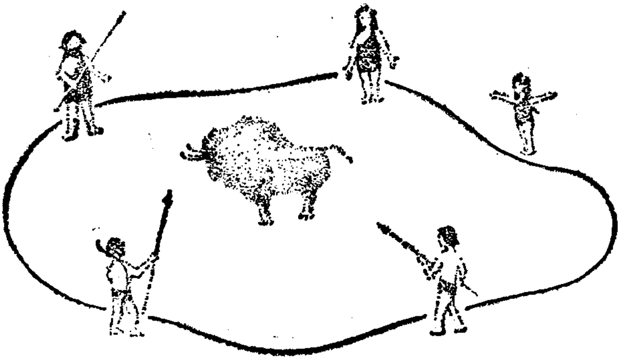

图 1-2

代的什么也不懂的幼儿的游戏时，也会看到同样的情况．这个例子使我们了解到，拓扑学是我们人类把那些非常朴素而又基本的图形的几何直观性质数学化的结果．

然而，为把这种直观性质作为数学清楚地表达出来，却经过了一个漫长的历史过程．譬如，人类发明了数、学会了计算、产生了欧氏几何学、开辟了分析学，并且把数学的进展推进到以集合论为起点的数以外的领域．刚才叙述的定理，就是所谓“约当（Jordan）曲线定理”，它在二十世纪二十年代已得到正确的证明．

继欧拉之后，作为拓扑学的业绩，在 1833 年前后有 C. F. 高斯(Gauss)的工作．直到今天仍被认为是世界最著名数学家之一的高斯，研究了空间中的各种各样的纽结问题，并应用沿纽结积分的方法，证明了下面两个纽结的成结方法是不同的．

后来在 1851 年，历史上非常著名的数学家 G.F.B. 黎曼(Riemann)，进行了黎曼面的研究．这项研究工作虽然属于所谓复变函数论这一数学分支，但是这种函数论的研究，现在看来，实际上也可以说是对曲面这个特殊空间的结构进行的拓

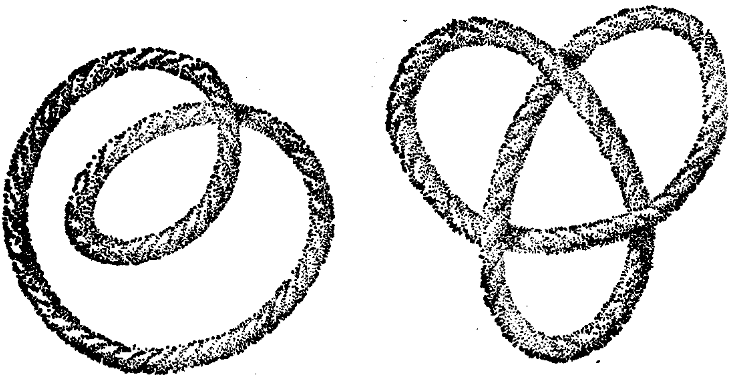

图 1-3

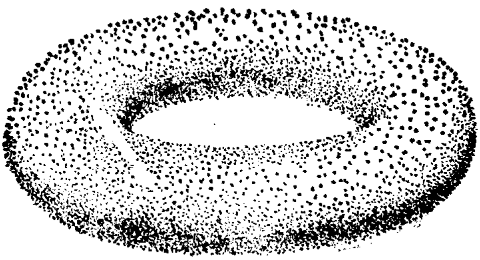

图 1-4

$w^2 = (z-1)(z-2)(z-3)$ 的黎曼面

扑研究.

到了十九世纪末，数学中进行了非常大的改革. 那就是G.康托尔（Cantor）开创的集合论. 象在高等学校[1] 学到的那样，集合是看做某种事物的汇集，集合论是研究它们的并集和交集等等的数学，其中出现了映射的概念. 集合与映射这两个概念是构成以集合论为基础的一切现代数学的最基本的概念.

1）日本的高等学校相当于我国的高中. ——译者注

到十九世纪为止的古典数学，除几何学外，大部分以数为研究对象．例如对自然数，求它们的和、差以及公因数…，这是算术．考虑实函数，对它们进行微分、积分…，这是所谓微积分或者叫做分析学的数学分支． 由康托尔创始的集合论，使数学的对象不仅限于自然数、实数或复数等等的数，而是包括数在内的具有某种性质的事物的集合，这样就具有非常广泛的一般性．几何学虽然不是以数，而是以点、直线、平面、空间、二次曲线以及二次曲面等为对象，但因它们也是集合，所以按这种广泛的观点，可以把以前分别研究的几何学、代数学、分析学统一起来看待．

在康托尔创建的集合论中，首先引进了关于集合的运算．于是，称为群、环、域的所谓代数系统就成为数学的一种研究对象．例如，我们考虑实数集，若设想两数之间的加法为一种运算，而对实数施行这种加法运算，则实数集对加法运算构成群．再考虑中心固定的圆盘的旋转运动的集合，若规定各个运动的合成作为它们乘积的运算，则旋转运动的集合也构成一个群．

这种代数系统，是着眼于运算的所谓近世代数的研究对象，然而在集合上附加别的概念，就可构造出新的几何学的对象．为此，我们先考查直线．如在中学[1]所学的那样，在直线上适当确定一点，使它对应数 0，并把它叫做原点 O．在点 O 的右侧取一点，并使之与数 1 对应．其次，在原点到与数 1 对应点的同一方向上取与 1 恰有相同距离的点，使之对应数 2，继续这样做下去．同时，在相反的方向也这样做，使得所取的点与数 -1，-2，…对应．这样一来，就能够给直线上的各个点引入坐标．而且在这样的直线上，若取任意两点 a，b，就可

1) 日本的中学相当于我国的初中．——译者注

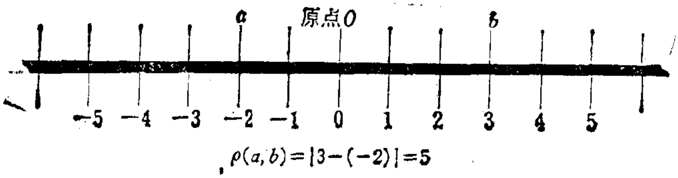

图 1-5

把这两点的坐标差的绝对值规定为它们的距离 $\rho(a, b)$. 例如，当点 a 是数−2 对应的点，点 b 是数 3 对应的点时，a，b 间的距离，如图 1-5 所示，就可算出是 5. 这样一来，直线就是直线上的点的集合，同时若取其中两点，就可确定它们之间的距离，直线可看做有了距离概念的集合.这和代数系统是具有运算概念的集合是一致的. 由此可见，在任何非数的一般集合上，适当地规定所谓距离的概念，它就成为前所未有的新的几何学的对象. 这样一来，就能得到作为现代几何的新对象的拓扑空间.

这本书虽然是从刚才叙述的拓扑空间的漫谈开始的，但是拓扑学也可以说是研究拓扑空间性质的现代几何学. 这种拓扑空间的研究方法，是本世纪初，确切地说是在 1906 年，由法国的 M. 弗雷谢 (Fréchet) 等人的提倡和研究开始的.

在此之前，于1895年，庞加莱以"关于位置解析"为题，发表了数篇论文. 这些论文对现代几何学的对象——拓扑空间开始了代数的研究. 它是人类知识发展的一个里程碑. 拓扑空间在我们的日常生活中就有，例如桌子的表面，铅笔的表面以及各种各样的构成形体图形的表面. 于是，拓扑学要研究世界中存在多少种不同的曲面. 例如，让我们先考查一下卵的表面. 卵具有椭圆面那样的形状. 在此，若把卵的表面看做是由理想的弹性体作成的，而且对它适当地进行整形，它就可以成为一个规整的球面. 另外，再取火柴盒看一看. 虽然它

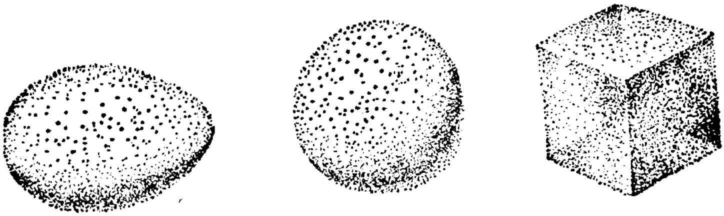

图 1-6

的表面是有棱角的长方体的表面，但若把它想象为是由理想的弹性膜作成的，中间充满空气，把它吹鼓并且适当地进行整形的话，它也能成为球面. 这样，拓扑学把所有曲面都想象为是由理想的弹性膜作成的，随意地延展和收缩，就可以极其自然地把一个曲面变成另一个曲面. 例如卵的表面和火柴盒的表面可以看做是相同的曲面，即球面. 要想大致地把曲面加以区别，那就应当研究有多少不同的曲面. 由于理想弹性膜的变形过于随意，或许能使我们认为，好象所有的曲面都是相同的了. 那么，现在让我们用轮胎来代替卵. 我们一看就知道轮胎的表面和球面是很不相同的形态. 再拿带有两个或三个洞的"圈饼"来看，它们与球面是大不相同的. 并且和轮胎表面(环面)相比也有不同的形状. 实际上这种"圈饼"曲面、环面和球面，它们都是互不相同的曲面. 总之，用弹性膜制成的轮胎表面，不论怎样扭曲，也不会变形为球面. 若不是勉强去做，使在某处把曲面切断，再把切断的地方缩成一点，那样极不自然地强制的变形，那么环面就不可能变成球面. 并且"圈饼"曲面也不可能变形为环面和球面. 在这个世界中，究竟存在多少不同的曲面，这个问题到 1925 年时，才被彻底解决.

虽然现在讲的是曲面，而我们在拓扑学中所研究的并不限于曲面. 从拓扑学的角度来看，曲面几乎和平面相同，它是

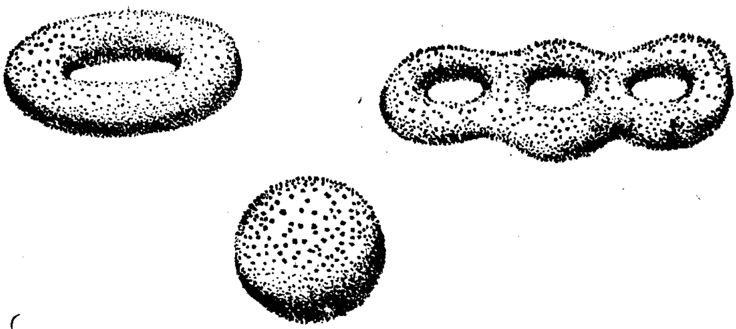

图 1-7

二维几何学的对象. 可是数学不仅研究二维的，一般也研究三维、四维、五维以及任意的 n 维的，而且最近还把无穷维的几何图形也作为研究的对象. 在研究二维曲面的时候，可以把环面和"圈饼"曲面等适当地捻弄揉合，总是可以看得见想

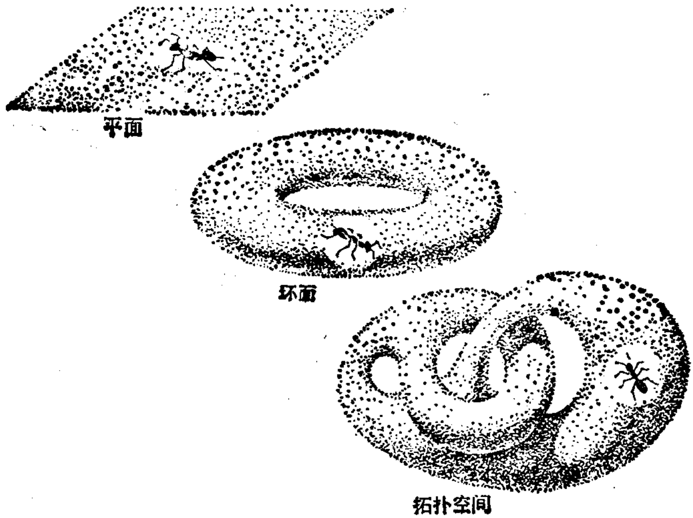

图 1-8

得出的．而考虑三维、四维、五维以至 n 维，甚至是无穷维空间时，我们是不可能用眼睛看到它们的．从而，必须为我们的直观建立坚实的理论基础．

曲面，实际上是拓扑空间的极特殊情形，它与其它一般拓扑空间相比较，有显著的特点．其特点，象下面那样考虑是容易明白的．让我们考查一下平面上的一个小虫．假如小虫是近视眼．当它向平面的四周望去，它只能见到象图中那样的一块小圆盘，它看不到远处．现在把同一个小虫放到轮胎上，而不是平面上，让它观望一下轮胎的表面．确实与以前不同，小虫在弯曲的面上了（由于不是物理学，我们不考虑重力）．可是，它所观望的范围，和它在平面上所见到的小圆盘是相同的．在前面说过，拓扑学是把所有的面看成理想的弹性膜作成的，从这个观点来看，若把少许弯曲的弹性膜拉平的话，那么小虫所见到的景象和它在平面上见到的也是相同的．这样不论曲面是什么样的，在它上面任意点的邻近，和平面上任意点的邻近应当有完全相同的构造．因为拓扑学是研究任意空间的几何学，所以拓扑学所研究的对象就不限于前边说过的二维的情况．当然还研究三维、四维以及无穷维的几何对象．在这种对象中，也和曲面的情形一样，若某一点的邻近恰好是三维的，就可看做和我们居住的空间中点的邻近一样是球体，或者看做球形作成的拓扑空间．象这样特殊的三维拓扑空间，我们把它叫做三维流形．因而，曲面可以称为二维流形．若把这种方法加以推广，我们就能够研究所谓 n 维流形这种空间．

这种 n 维流形，不仅在拓扑空间中是重要的，而且是在广泛的数学领域中到处出现的概念．因此，拓扑学以 n 维流形的研究为一大支柱而发展起来．

我们继续谈流形．溯本求源，拓扑学的进展，是根据庞加