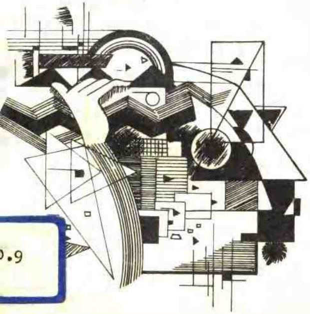
七巧板的科学

证券最优组合

戴玉林 孙烈

ZHENGQUAN TOUZI CONGSHU

证券投资丛书 5



·证券投资丛书·（之五）

七巧板的科学——证券最优组合

戴玉林　孙烈

东北工学院出版社

(辽)新登字第8号

·证券投资丛书·(之五)

七巧板的科学——证券最优组合

戴玉林　孙　烈

东北工学院出版社出版 (邮政编码:110006)	沈阳市第六印刷厂印刷 辽宁省新华书店发行
开本:787×1092　1/32 1993年2月第1版第1次印刷	印张:5.5　字数:124千字 印数　1~10000册
责任编辑:李毓兴 封面设计:唐敏智	责任校对:任　真

ISBN　7-81006-523-8/F·41　　定价:3.48元

《证券投资丛书目》编委会名单

编 者 的 话

中国证券投资及其市场正处于方兴未艾的初期发展阶段。目前国内尚无一套从中国国情出发，具有中国特色的介绍证券投资方面的丛书。为了满足广大投资者和管理者的迫切需要，我们决定编写一套从中国实际需要出发、以务实为主的证券投资丛书。

该套丛书将以认真严肃的科学精神为指导，以生动而流畅的文字介绍中国证券投资的理论与实务，力求使本套丛书达到"全、新、实、细、巧"的目标：全——从制度、实务到理论与方法，均作了系统的介绍；新——从中国证券市场、金融工具、制度创新到深圳、上海证券交易所以及其它地区交易中心的最新操作方法、规定都给予了分析和介绍；实——本套丛书立足于实务的介绍，尤其重视对证券交易方式、操作过程、买卖证券的技巧的介绍；细——从交易成本、投资收益的核算到证券风险的预测、转移途径、各种企业转换为股份制企业的步骤、程序等都予以实例分析；巧——本套丛书以引人入胜而又紧扣主题的文字为标题、以生动而又妙趣横生的事例为引子，深入浅出地介绍、分析和评价股份制企业的转换和证券投资的实务、制度、理论与方法，使读者在了解、掌握证券投资的同时，又获得美的享受。

本丛书编委会

1992 年 10 月

目　　录

只有共同的语言，才能有科学的对话；

只有理解了科学的基本概念，才有可能步入科学的殿堂。

第1章　证券组合分析的基础

1.1　证券组合分析的数学基础

任何一门科学要达到成熟和完备的水平，都需要运用数学。对于现代证券组合分析理论和方法来说，也不例外。现代证券组合分析理论和方法之所以能够深刻地影响人们的投资行为，关键原因之一是它以数学为主要的分析工具，并以其不置可否的真理力量展示出它的科学性。因此，在正式介绍现代证券分析理论与方法以前，我们尽可能地用最容易理解的语言说明这一理论需要用到的数学方面的知识。

1.1.1　数学期望

如果我们以抛一枚硬币来决定得失，以正面为所得，以背面为所失，当这一过程(抛硬币的次数无限多时)连续不断时，其结果的期望值即为

$$期望值 = P \cdot 约定货币 + B \cdot 约定货币$$

这里 P 为正面出现的次数，B 为背面出现的次数，+1 代表所得约定货币，-1 代表所失的约定货币的数量。

用一般的数学形式表达就是：

$$E(X) = (P_1)(X_1) + (P_2)(X_2) + (P_3)(X_3)$$

$$+ \cdots\cdots + \sum_{i=1}^{T} P_i X_i = 1 \quad (1.1)$$

该公式之和为1。用文字表达，公式(1.1)的意思是随机变量X_1的期望值等于所有T种不同的事物出现或发生的次数与每次结果相乘之和。

按照数学期望的性质，我们可以推导出如下几个以后要用得着的公式：

1. 一个常数的期望值等于那个常数。用符号表述，如果C是任何常数(例如，$C=2$或$=99$)，即有

$$\mathrm{E}(C) = P_1C + P_2C\cdots + P_iC = C$$

2. 一个常数乘以一个随机变量的期望值等于该常数乘以该随机量的期望值，因此，如X为一随机变量，C为一常数，即有

$$\mathrm{E}(CX) = C\mathrm{E}(X)$$

3. n个独立随机变量之和的期望值是其期望值之和。例如，如n等于2个随机变量X和Y，即有

$$\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$$

4. 一个常数乘以一个随机变量加一个常数的期望值等于该常数乘以所有该随机变量加该常数的期望值。用符号表示

$$\mathrm{E}(BX + C) = B\mathrm{E}(X) + C$$

1.1.2 风险的测度

在证券组合分析中，围绕在期望值附近的结果的离中趋势(Dispers ion)可以代表“风险”。较高的风险(Riskier)意味着，围绕在期望值附近期望结果的离中趋势更为严重。数学中的方差(Variance)和标准离差(Standard Deviation)可以测度

期望值的结果的离中趋势，用符号表述，随机变量 X 的方差是，

$$
\begin{aligned}
\sigma_x^2 = \sigma_x\sigma_x = & \sum_{t=1}^{T} P_t[X_t - \mathrm{E}(X)]^2 \\
& = \mathrm{E}[X - \mathrm{E}(X)] \\
& = P_1[X_1 - \mathrm{E}(X)]^2 + P_2[X_2 - \mathrm{E}(X)]^2 + \cdots \\
& \quad + P_t[X_t - \mathrm{E}(X)]^2
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

用文字表达，方差 σ_x^2 是平方的离差乘以其概率的结果之和。如果所有的 T 结果都是相等的，即 $Pi=1/T$。假如抛硬币的赌博是公正的(即 $\mathrm{E}(X)=0$)，赌注为 5 元，其方差可计算如下：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var} & = (1/2)(5-0)^2 + (1/2)(-5-0)^2 \\
& = 12.5 + 12.5 = 25
\end{aligned}
$$

5 元赌注的方差是 5 元的平方。为了把对风险的测度转换为更为直观的形式，即方差的平方根

$$
\sigma = \sqrt{\mathrm{E}[X - \mathrm{E}(X)]^2} = \sqrt{\sigma^2} \tag{1.3}
$$

因此，5 元赌注的标准离差即为 5 元。

公式(1.2)和公式(1.3)中的方差和标准离差可用两种方法来定义。一种方法可使用符号(Σ)与概率之和；另一种方法可使用期望值算子(a)即公式(1.1)说明的相同的东西等于和符号与概率的方法，这两种方法可以交替使用，现在我们以另一个比较为人们理解的例子来说明证券组合的方法。

假设 10 年期的两种证券的年收益率，其历史数据见表 1.1。

表 1.1　10年期两种证券的年收益率概率表

年	甲公司,%	乙公司,%	结合概率
1	7	5	0.1
2	4	0	0.1
3	0	−5	0.1
4	7	5	0.1
5	10	10	0.1
6	14	16	0.1
7	7	16	0.1
8	4	10	0.1
9	10	10	0.1
10	7	10	0.1

从上述数据中,我们可以计算出下列相对频率即概率分布,见表 1.2。

表 1.2　两种证券预测收益率与边际概率表

甲公司预测收益率,%	甲公司边际概率	乙公司预测收益率,%	乙公司边际概率
0	0.1	−0.5	0.1
4	0.2	0	0.1
7	0.4	5	0.2
10	0.2	10	0.4
14	0.1	16	0.2

为了推导出上述概率分布,我们已经忽略了历史数据,或者说,很少注意它们。我们只是以经验及直觉为基础确定一项主观性的概率分布。不过,在以后的章节中,我们将一方面介绍关于这方面的分析工具,另一方面,我们还要利用上表中的数据,并从中推算出期望的概率分布。

1.1.3 期望收益率

甲公司的期望收益率可用公式(1.1)来计算，并且，我们以 r 替代公式中随机变量 X，公式如下：

$$E(X)=\sum_{t=1}^{T}P_tX_t$$

$$E(r_{甲})=\sum_{t=1}^{10}P_tr_t \tag{1.1A}$$

或者可以用边际概率替代结合概率，公式(1.1A)可计算如下：

$$\begin{aligned}E(r_{甲})&=\sum_{1}^{5}Pr\\&=(0.1)(0)+(0.2)(0.04)+(0.4)(0.07)\\&\quad+(0.2)(0.1)+(0.1)(0.14)\\&=0+0.008+0.028+0.02+0.014=0.07=7\%\end{aligned}$$

读者可用该公式计算出乙公司的收益率，该期望收益率等于 0.077 或 7.7%。

1.1.4 证券中的风险

前已述及，风险一般被定义为某种事件结果的期望离中趋势。在证券分析中，收益率是证券实绩最为重要的问题，从而证券风险分析应当把重点放在围绕在期望收益率附近的证券收益率(实际的)离中趋势上。由于人们把证券的风险等同于收益率的可变性，这样，收益率的标准离差(或收益率的方差)也就可以作为风险的测定根据了。用符号表述，即

$$\sigma_i^2=\sigma_{ii}=\sum_{t=1}^{T}P_{it}[r_{it}-E(r_i)]^2$$

$$=E[r_i - E(r_i)]^2 \qquad (1.2A)$$

公式(1.2A)定义了证券 i 收益率的方差。收益率的标准离差为该方差的平方根。因此,用表 1.1 和表 1.2 的数据,即可算出收益率的方差和标准离差:

$$\begin{aligned}\sigma_{甲}^2 &= (0.1)(0-0.07)^2 + (0.2)(0.04-0.07)^2 \\ &\quad + (0.4)(0.07-0.07)^2 + (0.2)(0.1-0.07)^2 \\ &\quad + (0.1)(0.14-0.07)^2 \\ &= 0.00134\end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{0.00134} = 0.0368 = 3.68\%$$

乙公司的标准离差为 6.28%,计算过程如上。

1.1.5 收益率的协方差

证券投资风险的分散只考虑到证券的数量和种类是很不够的,还必须考虑各种证券之间的相互关系,甲证券与乙证券之间的协方差就是反映这种关系的一种标志。

证券 i 和证券 j 收益率的协方差可用 σ_{ij}或 $\mathrm{Cov}(r_i, r_j)$来表示。

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= E\{[r_i - E(r_i)][r_j - E(r_j)]\} \\ &= \sum_{t=1}^{T} P_t\{[r_{it} - E(r_i)][r_{jt} - E(r_j)]\} \qquad (1.3)\end{aligned}$$

这里 r_{it}是第 i 公司第 t 的收益率。

现在假定,两种证券所有 10 对收益率出现的概率是相等的,$P_t = 1/T = 1/10$ 即可代入协方差公式,从而公式(1.3)可以写成

$$\sigma_{ij} = \sum_{t=1}^{10} 1/10[r_{甲t} - E(r_{甲})][r_{乙} - E(r_{乙})]$$

在图 1.1 中,图中第 1 象限和第 3 象限为正的成对协方

差，而第 2 和第 4 象限只有负的成对协方差。可是，计算协方差的过程中，原点(即 $r_甲$ 和 $r_乙$ 均为零的点)，并不是用来确定这 10 对数值是不是就是正的或负的离差。协方差运用从预期值中得出的随机变量的离差，实际上，就是从原点到中心点，这个点就是这 10 对协方差的引力中心。

进一步观察，我们发现在第 1 象限中的 5 对结果是正的，而只有一对落在第 4 或第 3 象限的结果(即表中的 8 对)是负的。因此，正的数量超过了负的数量，从而协方差之和就是正的。

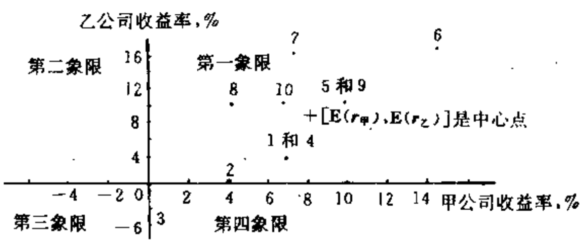


图 1.1　两种证券 10 对协方差的散落位置

这种结果的净额标志就是确定协方差的标志。

表 1.3　两种证券的有关数据

观察时间	甲公司 r_{it}	甲公司 $r_{it}-E(R_i)$	乙公司 r_{jt}	乙公司 $r_{jt}-E(r_j)$	概率 $P_t=1/r$	结果 $(P_t)[r_{it}-E(r_i)][r_{jt}-E(r_j)]$
1	0.07	0	0.05	−0.027	0.1	0
2	0.04	−0.03	0	−0.077	0.1	+0.000231
3	0	−0.07	−0.05	−0.127	0.1	+0.000889
4	0.07	0	0.05	−0.027	0.1	0
5	0.1	0.03	0.1	0.023	0.1	+0.000069
6	0.14	0.07	0.16	0.083	0.1	0
7	0.07	0	0.16	0.083	0.1	0
8	0.04	−0.03	0.1	0.023	0.1	−0.000069
9	0.1	0.03	0.1	0.023	0.1	+0.000069
10	0.07	0	0.1	0.023	0.1	0
合计					1.0	0.001770

$E(r_{甲})=0.07$　$E(r_{乙})=0.077$

如果 10 对协方差处于原点的东北方和西南方，那么该协方差就将是一个更大的正数。如果大量的协方差处于原点的东南方和西北方，它们的协方差就会是负的。因为，这两个变量运动方向是相反的(即负相关)。

比较公式(1.2)和(1.3)，我们发现，某些变量自身的协方差等于那些变量的方差。证券 i 和证券 j 收益率的协方差是，

$$\sigma_{ij} = E\{[r_i - E(r_i)][r_j - E(r_j)]\} \qquad (1.3)$$

注意：当 $i=j$ 时，公式(1.3)就变成了公式(1.2A)，

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ii} = \sigma_{jj} = E[r_i - E(r_i)]^2 = E[r_j - E(r_j)]^2$$

这就表明，证券 i 和证券 j 之间相一致的协方差就等于方差。此外，变量的先后没有差异，即 σ_{ij} 也可写成 σ_{ji}。

1.1.6　收益率的相关性

证券组合的目的是通过选择正相关较差的证券以分散风

险。为此，研究组合中各种证券收益率的相关性是证券组合分析中最为重要的工作。这样，我们就必须知道组合中所有证券之间的相关系数。现在我们以 P_{ij}代表证券 i 和 j 之间的相关系数。相关系数的变化范围是：$-1\leqslant p\leqslant +1$。如果 $P_{ij}=+1$，证券 i 和证券 j 的收益率就是完全正相关的，它们是在相同时间内按相同方向运动的；如果 $P_{ij}=0$，证券 i 和证券 j 的收益率就是不相关的，这就表明它们运动的方向是互不关联的；如果 $P_{ij}=-1$，证券 i 和证券 j 收益率的变化是相反的，那么，它们就是完全负相关的状态。P_{ij}的公式是：

$$\begin{aligned}P_{ij}&=\frac{\mathrm{Cov}(r_i,r_j)}{\sigma_i\sigma_j}\\&=\frac{\mathrm{E}\{[r_i-\mathrm{E}(r_i)][r_i-\mathrm{E}(r_j)]\}}{\sigma_i\sigma_j}\\&=\frac{\Sigma P_t\{[r_{it}-\mathrm{E}(r_i)][r_{jt}-\mathrm{E}r_j)]\}}{\sigma_i\sigma_j}\end{aligned}\qquad(1.4)$$

运用这一公式就可以测度出随机变量是如何一起变化的。以前表中的数据就可以测度出甲公司与乙公司的相关性：

$$\begin{aligned}P_{IJ}&=\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i\sigma_j}=\frac{0.00177}{(0.0368)(0.0628)}\\&=\frac{0.00177}{0.00231}=0.77\end{aligned}$$

上述计算结果表明，甲、乙公司证券的正相关性较高。

将公式(1.4)变换，可得出公式(1.5)：

$$\sigma_{ij}=(P_{ij})(\sigma_i)(\sigma_j)\qquad(1.5)$$

公式(1.5)表明证券的协方差等于相关系数与证券 i 和证券 j 的标准离差之积。

1.1.7 证券组合内的权数

证券组合是投资者将自己的资金投资于各种证券并按照一定的比例而形成的一项集合。这里的"一定的比例"即是权数。上面，我们都是按照衡比例或等比例来说明证券组合的，但是，投资者按均衡比例进行证券投资并由此构成的组合却不一定能到达在一定风险水平下投资收益最大化的目标，或者说，在一定的收益水平下极小化风险的目标，因为，各种证券收益之间的相关系数是不相同的，各种证券之间的收益率和风险程度也是各不相同的，投资者们的投资目标也是有着一定的差异的，那种按照等比例的权数构成一项证券组合则不一定能够达到预期的目标，为此，投资者们在构建证券组合的时候，就必须考虑将多大的投资放在甲类证券上，又将多少投资投放在乙类或丙类证券上，以便于能够达到预期的投资目标。这样，投资者们就必须研究自己投资的权数。

一般说来，权数之和都等于1。如果以 X_i 代表权数的话，那么，

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \tag{1.6}$$

用文字表达，投资于 n 种不同资产的 n 个部分之和为1。在以后我们将说明，在权数上，人们可以任意变化，数值也可任意变化，即可正可负，也可大于1，还可为零。但是，无论如何，最终的权数之和都必须等于1。

1.1.8 证券组合的期望收益率

设 r_p 为证券组合的一定实际收益率，$E(R_p)$ 为期望收益率，即有