

非线性有限元分析

张汝清 詹先义 编著

重庆大学出版社



非线性有限元分析

张汝清 詹先义 编著

重庆大学出版社

内 容 简 介

本书重点介绍了固体力学或结构力学中非线性问题的基本原理和有限元分析方面的知识。全书共八章，系统地阐述了大变形条件下基本方程的描述，应力和应变以及它们的速率的度量，本构关系，非线性问题的变分原理及有限元离散，几何和材料非线性有限元矩阵表达式，非线性动力问题以及在接触非线性问题中的应用。

本书可作为高等工科院校力学专业和其它工程科学的研究生，高年级本科生的教材，也可供广大工程技术人员参考。

非线性有限元分析

张汝清 詹先义 编著

责任编辑 朱庆祥 周 任

重庆大学出版社出版发行

新华书店经销

重庆印制第一厂印刷

开本：787×1092 1/16 印张：13.25 字数：331 千
1990年1月第1版 1990年1月第1次印刷

印数：1—2500

标准书号：ISBN 7-5624-0246-9 定价：2.66元
O·30

前 言

当前,在各种工程结构的分析计算中,只假设为线性问题是很不够的,常常需要进一步考虑为非线性问题。工程结构的力学问题,从本质上来讲是非线性的,线性假设只是实际问题的一种简化。因此,对各种工程结构的非线性分析就是必不可少而且日趋重要了。对于固体力学(或结构力学)非线性问题来说,有限元分析是最有效的数值方法。

目前从国外引进的一些大型通用程序,有的已有非线性问题的分析功能,国内已自编有一些非线性问题的分析程序,这些都可提供给工程界使用。然而,要进行非线性问题的研究工作,开发或使用通用程序解算问题,以及看懂文献资料,就要求人们对几何非线性和材料非线性问题的力学原理以及非线性有限元分析方法具备有广泛而深入的基础知识。因此,能有一本专著在这些方面系统地加以介绍,以适应读者需要,是完全有此必要了。近十年来,作者多次为研究生讲授这些内容,已编写有讲义,并从事非线性课题的研究,本书就是根据所编写的讲义和研究成果所写成。

本书在编写中,在内容上力求理论联系实际,紧密结合工程应用,反映新近成果,达到较高的学术水平,在表达上力求精炼,深入浅出,具有良好的系统性,以便于读者学习。

本书的重点在于介绍非线性问题的力学原理和有限元分析方法,而未涉及程序设计这个重要问题。有关程序设计问题读者可参阅作者编写的另一本专著——结构计算程序设计(重庆出版社,1988年版)。本书共分八章。第一章从一些实例介绍非线性问题的分类和一些基本概念,使读者对非线性问题有一个粗浅的理解。第二章着重介绍大变形条件下基本方程的描述,应力和应变以及它们的速率的度量。第三章介绍力学中本构关系,本构方程的主要类型。这两章的内容对读者来说都是不可缺少的知识。第四章介绍力学中非线性问题的变分原理及其有限元离散化。第五章和第六章分别介绍几何非线性和材料非线性问题的有限元表述及其相应的矩阵公式。第七章介绍非线性动力问题。第八章介绍接触非线性问题,此章书既是作为非线性问题在工程中的典型应用,又是新开拓领域和作者所作的一些工作。

本书可作为力学专业和其它工程科学的研究生、高年级本科生的教材或参考书,也可作为广大工程技术人员学习非线性有限元分析的参考书。本书第一至第三章,由詹先义编写。由于作者水平有限,书中难免存在缺点或错误,敬请批评指正。

张汝清

1988年7月于重庆大学

目 录

第一章 绪论

§ 1.1 引 言	(1)
§ 1.2 非线性分析的简例	(1)
§ 1.3 非线性问题的求解特点	(6)

参考文献

第二章 有限变形分析

§ 2.1 引 言	(11)
§ 2.2 变形体的运动描述	(13)
§ 2.3 有限变形分析	(18)
§ 2.4 应力分析	(30)
§ 2.5 运动方程	(36)
§ 2.6 变形率和应力率	(38)

参考文献

第三章 材料本构关系

§ 3.1 本构关系的一般原理	(43)
§ 3.2 本构方程的主要类型	(45)
§ 3.3 弹性、超弹性和次弹性	(46)
§ 3.4 弹性分析的T.L.和U.L.公式	(48)
§ 3.5 弹塑性分析	(52)
§ 3.6 等向强化弹塑性矩阵的一般形式	(54)
§ 3.7 Mises等向强化弹塑性	(56)
§ 3.8 Mises随动强化弹塑性	(65)
§ 3.9 Drucker-Prager理想塑性	(66)
§ 3.10 粘弹性本构关系	(68)
§ 3.11 粘塑性本构关系	(72)

参考文献

第四章 非线性问题的变分原理

§ 4.1 引 言	(80)
§ 4.2 有限变形弹性理论的最小势能原理及有限元离散	(81)
§ 4.3 有限变形弹性理论的广义变分原理及有限元离散	(86)
§ 4.4 塑性流动理论的变分原理	(92)
§ 4.5 有限变形弹-塑性变分原理	(99)

参考文献

第五章 几何非线性问题的有限元法

§ 5.1 引 言	(101)
-----------	---------

§ 5.2	增量形式的平衡方程	(101)
§ 5.3	T.L. 和 U.L. 公式	(103)
§ 5.4	非线性问题的有限元基本方程	(107)
§ 5.5	杆单元	(110)
§ 5.6	平面应变、平面应力和二维轴对称单元	(115)
§ 5.7	三维固体单元	(121)
§ 5.8	梁单元	(124)
§ 5.9	板和壳元	(132)
§ 5.10	非线性方程的解法	(137)

参考文献

第六章 材料非线性问题有限元法

§ 6.1	引言	(142)
§ 6.2	弹塑性分析中的基本关系式	(143)
§ 6.3	弹塑性梁的有限元分析	(145)
§ 6.4	二维弹塑性问题有限元分析	(150)
§ 6.5	二维弹塑性大变形有限元分析	(154)
§ 6.6	板的弹塑性弯曲有限元	(157)
§ 6.7	二维弹粘塑性问题有限元分析	(160)
§ 6.8	弹塑性小变形平衡方程组的解法	(166)

参考文献

第七章 非线性动力问题有限元分析

§ 7.1	引言	(171)
§ 7.2	非线性动力分析中的材料本构关系	(174)
§ 7.3	求解实例	(176)
§ 7.4	二维弹-粘塑性瞬态动力分析	(181)
§ 7.5	二维弹塑性瞬态动力分析	(185)

参考文献

第八章 接触问题非线性有限元分析

§ 8.1	引言	(188)
§ 8.2	弹性接触问题的分析	(190)
§ 8.3	间隙元的基本理论	(197)
§ 8.4	弹塑性接触问题的有限元分析	(200)

参考文献

第一章 绪 论

§ 1.1 引 言

固体力学（或结构力学）问题，从本质上讲是非线性的，线性假设只是实际问题的一种简化。在有限元分析中的线性假设包含下列含义，即结点位移为无限小量，材料为线弹性，加载时边界条件的性质保持不变。于是，静力平衡方程可表示为

$$[K]\{U\}=\{R\} \quad (1.1)$$

其中， $[K]$ 为刚度矩阵， $\{R\}$ 为载荷矢量。由于 $[K]$ 和 $\{R\}$ 的元素为常数，故位移响应 $\{U\}$ 是载荷 $\{R\}$ 的线性函数。也就是说，如果 $\{R\}$ 变为 $\alpha\{R\}$ ，则 $\{U\}$ 变为 $\alpha\{U\}$ ，其中， α 为常数。这就是所谓的线性有限元分析。如果上述假设中任一条不能满足，则属于非线性有限元分析。

通常，把非线性问题分为两大类，即分为几何非线性和材料非线性两大类。但从建立公式和程序设计的方便出发，又可把它分为三种类型。

（1）非线性效应仅由应力应变关系的非线性引起，位移分量仍假设为无限小量，故仍可采用工程应力和工程应变描述，即仅材料为非线性问题。

（2）在大位移小应变情况下，只是物体经历了大的刚体位移和转动，固连于物体坐标系中的应变分量仍假设为无限小。此时的应力应变关系则根据实际材料和实际问题可以是线性的也可以是非线性的。

（3）最一般的情况是位移、转动和应变都不再是无限小量，本构关系也是非线性的。

另外，还有一类非线性问题，即由于边界条件的性质随物体的运动发生变化所引起的非线性响应，最典型的例子就是接触问题。通常，此类问题可以在上述三种类型的每一类型中出现，从而使问题变得更为复杂。

当前，求解非线性问题最有效的数值方法还是有限元位移法。而有限元位移法的理论基础是变分原理。因此，研究有限变形问题的变分原理和弹塑性力学中的变分原理以及它们的广义变分原理以及有限元离散都是必要的。这些原理和离散化的研究可为非线性有限元增量方程的建立奠定基础。

一般来讲，几何非线性问题是属于有限变形问题，所以，我们在着手进行非线性有限元分析之前，较简要地讨论有限变形体力学问题也是十分必要的。

对于材料非线性问题，涉及到材料的非线性本构关系，因而有必要用一定篇幅来阐述当前非线性有限元分析中常用的本构关系。

再加上非线性有限元分析的基本内容，非线性问题的求解方法以及典型的工程应用，就构成了本书的主要内容。

§ 1.2 非线性分析的简例

面对一个具体工程结构问题，我们首先要考虑它属于哪一种非线性类型。这种考虑实质

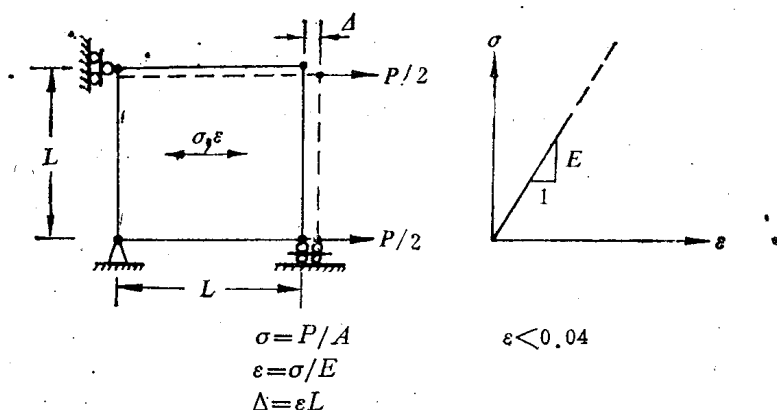
上是完成了问题计算模型化的主要工作，因而不可掉以轻心。当然，我们可以不加选择地将所有几何非线性问题均按大位移、大转动、大应变情况处理，但相应的计算量会大大增加，这是不必要的。

为了进一步说明非线性问题的特点，采用表 1.1 对非线性问题进行分类，实际例子如例 1.1 所示。

表 1.1 非线性问题分类

分析类型	特 点	描 述 方 法	应 力 和 应 变
仅材料非线性	位移和应变无限小，应力应变关系是非线性的	仅材料非线性 (M. N. O.)	工程应力 σ_{ij} 工程应变 ϵ_{ij}
大位移 大转动 小应变	线元的位移和转动充分大，但线元的伸长和线元之间的角度改变无限小，应力应变关系是线性的或者非线性的	全 Lagrangian 描述 (T. L.)	Kirchhoff 应力 S_{ij} Green 应变 E_{ij}
		修正 Lagrangian 描述 (U. L.)	Cauchy 应力 σ_{ij} Almansi 应变 e_{ij}
大位移 大转动 大应变	线元的伸长和线元之间的角度改变充分大，线元的位移和转动也可以充分大，应力应变关系是线性的或非线性的	修正 Lagrangian Jaumann 描述 (U. L. J.)	Jaumann 应力率 $\dot{\sigma}_{ij}^{\nabla}$ Almansi 应变率 $\dot{e}_{ij}$
		全 Lagrangian 描述 (T. L.)	Kirchhoff 应力 S_{ij} Green 应变 E_{ij}

例 1.1 图(1.1a)表示线性弹性，无限小位移情况。



图(1.1a) 线性弹性(无限小位移)

图(1.1b)仅是材料非线性情况，即位移和应变无限小，而应力应变系是非线性的。

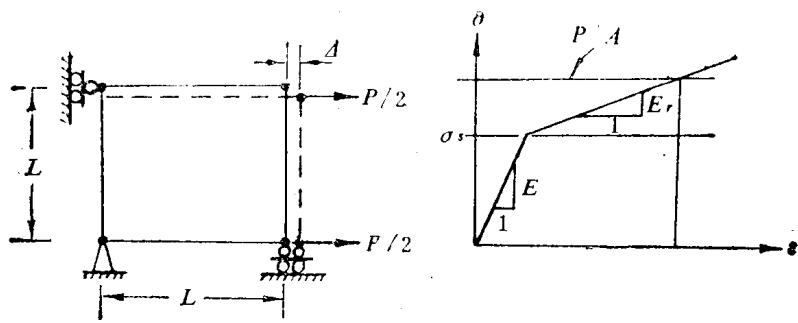
图(1.1c)为大位移和大转动，但是小应变情况。应力应变关系是线性或非线性的。

图(1.1d)为大位移、大转动和大应变情况。应力应变关系是线性或者非线性的。

图(1.1e)为位移达到 Δ 时，边界条件将发生变化的情况。

例 1.2 两端固定的等截面直杆承受轴向载荷如图(1.2a)所示，应力应变曲线和载荷曲线表示在图(1.2b,c)中，假定位移和应变都很小，载荷作用速度亦慢，试求载荷作用点的位移。

解：由于载荷作用缓慢，位移和应变都很小，因此采用 M.N.O. 分析。对于 a, b 段工

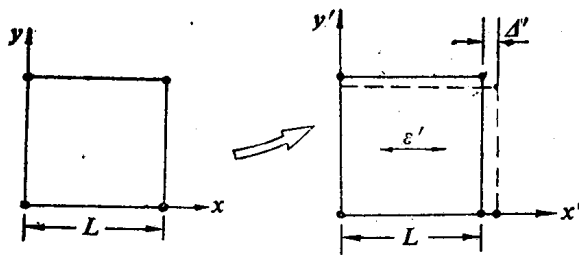


$$\sigma = P/A$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_s}{E} + \frac{\sigma - \sigma_s}{E_r}$$

$$\varepsilon < 0.04$$

图(1.1b) 仅材料非线性

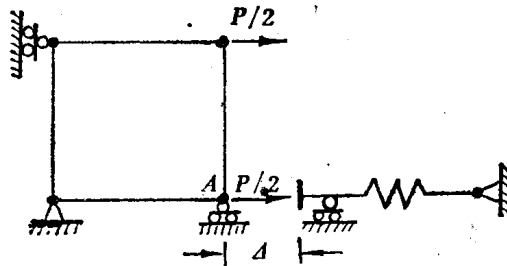


$$\varepsilon' < 0.04$$

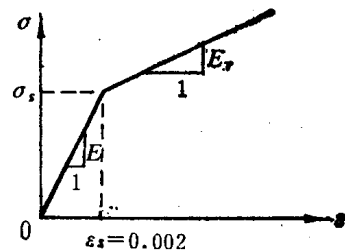
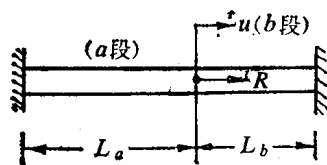
$$\Delta' = \varepsilon' L$$

图(1.1c) 大位移、大转动，小应变

图(1.1d) 大位移、大转动，大应变



图(1.1e) 边界条件随物体运动发生变化



$$\text{截面积 } A = 1 \text{ cm}^2$$

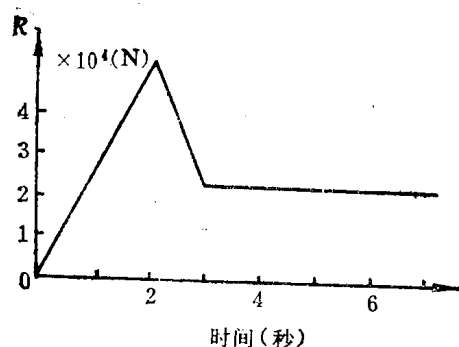
$$L_a = 10 \text{ cm} \quad L_b = 5 \text{ cm}$$

(a) 等截面直杆

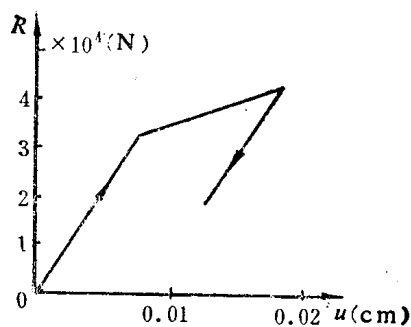
$$E = 10^7 \text{ N/cm}^2 \quad E_r = 10^5 \text{ N/cm}^2$$

$$\varepsilon_s: \text{屈服应变} \quad \sigma_s: \text{屈服应力}$$

(b) 应力应变曲线



(c) 载荷曲线



(d) 载荷位移曲线

图(1.2) 杆的弹塑性分析

程应变为

$$\epsilon_a = \frac{u}{L_a}, \quad \epsilon_b = \frac{u}{L_b} \quad (a)$$

平衡方程为

$$\sigma_a A - \sigma_b A = R \quad (b)$$

加载时的本构关系是

$$\epsilon = \sigma / E \quad (\text{弹性区}) \quad (c1)$$

$$\epsilon = \epsilon_s + (\sigma - \sigma_s) / E_T \quad (\text{塑性区}) \quad (c2)$$

卸载时

$$\Delta \epsilon = \Delta \sigma / E \quad (d1)$$

在上述关系式中, 左上标 t 表示 t 时刻的量。

1. 当载荷在初始阶段, a, b 段均为弹性情况, 使用式(a), (b)和(c1), 解得

$$R = EA u \left(\frac{1}{L_a} + \frac{1}{L_b} \right)$$

代入图(1.2)中给出的数值, 得到

$$u = \frac{R}{3 \times 10^6}$$

$$\sigma_a = \frac{R}{3A}, \quad \sigma_b = -\frac{2}{3} \frac{R}{A} \quad (d2)$$

2. a 段为弹性, b 段为塑性

当 $\sigma_b = -\sigma_s$ 时, 即 $R = \frac{3}{2} \sigma_s A$ 时, b 段发生塑性变形。此时

$$\sigma_a = E \frac{u}{L_a}$$

$$\sigma_b = E_T \left(\frac{u}{L_b} - \epsilon_s \right) + \sigma_s \quad (e)$$

因此, 对于 $R \geq R^*$, 将式(e)代入(b)后, 求出

$$^tR = \frac{EA^t u}{L_a} + \frac{E_\tau A^t u}{L_b} - E_\tau \varepsilon_s A + \sigma_s A$$

或

$$^t u = \frac{^t R / A + E_\tau \varepsilon_s - \sigma_s}{E / L_a + E_\tau / L_b} = \left(\frac{^t R}{1.02 \times 10^6} - 1.9412 \times 10^{-2} \right) \text{ cm}$$

若载荷继续增加, 当 $^t \sigma_a = \sigma_s$ 时, 或 $^t R = 4.02 \times 10^4 \text{ N}$ 时, a 段亦进入塑性。由于给定载荷并未达到这一水平, 故在整个加载历史中, a 段均保持为弹性。

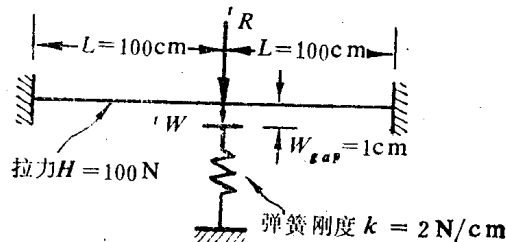
3. 卸载情况

因为卸载是弹性的, 只需将弹性解表为增量型式即可, 有

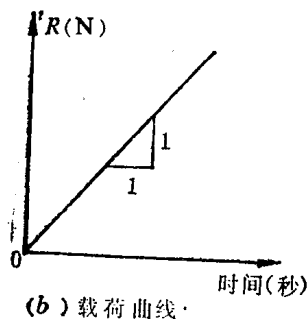
$$\Delta u = \frac{\Delta R}{EA(1/L_a + 1/L_b)}$$

所得的载荷位移响应如图(1.2d)所示。

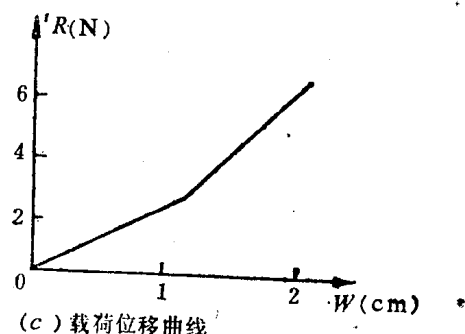
例1.3 预应力柔索承受横向载荷如图(1.3a)所示。弹簧支承的初始间隙为 W_{gap} 。假定位移很小, 因此柔索中的预应力可认为保持不变, 求缓慢加载时的位移量。



(a) 承受横向载荷的预应力柔索



(b) 载荷曲线



(c) 载荷位移曲线

图(1.3) 带弹性支承的预应力柔索问题的分析

解: 与例1.2一样, 忽略惯性力并假设为小位移情况。在位移 $W \leq W_{gap}$ 之前, 由垂直方向的平衡方程可求出

$$^t R = 2H \frac{^t W}{L} \quad (a)$$

一旦位移 $^t W > W_{gap}$, 代替式(a)的新的平衡关系是

$$^t R = 2H \frac{^t W}{L} + k(^t W - W_{gap}) \quad (b)$$

图(1.3c)表示式(a)和式(b)所确定的载荷位移曲线。

在上述计算中, 忽略了柔索的弹性, 非线性位移响应仅由 $W \geq W_{0a}$ 时的接触条件所引起。

尽管上述两个问题十分简单, 但却表明了非线性问题的一些求解特点。从例题中可知, 非线性分析的基本问题是求出当前载荷作用下的平衡状态。如果作用的载荷被描述成时间的函数, 则物体有限元离散系统的平衡方程可以表示为

$$\{R\} - \{F\} = 0 \quad (1.2)$$

其中, 矢量 $\{R\}$ 由 t 时刻外载荷的结点力分量所构成, 而矢量 $\{F\}$ 则表示 t 时刻的单元应力所引起的结点力分量。平衡方程 (1.2) 应对 t 时刻的几何位形建立, 并计入所有的非线性效应。如果是动力分析, $\{R\}$ 矢量中还应包括惯性力和阻力。

§ 1.3 非线性问题的求解特点

在求解非线性问题时, 式 (1.2) 应在全部加载历史中成立。即在式 (1.2) 中的时间变量 t 可取零到指定范围内的值。变量 t 的引入并不意味着一定是动力问题。在静力分析中, t 不具有真实的“时间”含义, 它的不同取值只是表示相应于不同位形的不同的载荷水平。但是, 在动力分析或具有时间效应的静力分析中, 变量 t 就有了它本来的“时间”含义。通常, 针对具体问题, 不难确定 t 的具体含义。因此, 在多数的情况下, 公式和图例中均引用了这一变量。

就许多工程结构而言, 我们所关心的常常是在特定载荷水平下, 或相应的时间物体中的应力和变形。尽管如此, 还是需要把问题分为两大类型。第一类问题无需计算中间变形过程, 直接求解给定载荷下的平衡位形。但是, 如果问题的几何性质或材料性质与路径相关或时间相关, 则中间变形过程的计算是不可缺少的, 这是第二类问题。从本质上来讲, 非线性问题是第二类问题。此时, 增量分析方法是行之有效的方法。由于与时间无关或与路径无关的第一类问题中的静力分析亦可看成增量分析中步数为 1 的特殊情况。所以, 从计算角度出发, 增量分析得到了广泛的应用。

增量逐步解法的基本思想是, 假定 t 时刻的解为已知, 要求 $t + \Delta t$ 时刻的解, 其中, Δt 是适当选择的时间增量。在 $t + \Delta t$ 时刻, 式 (1.2) 写成为

$$\{^{t+\Delta t}R\} - \{^{t+\Delta t}F\} = \{0\} \quad (1.3)$$

这里, 左上标表示为 $t + \Delta t$ 时刻的量。由于 t 时刻的解为已知, 因此, 可以写为

$$\{^{t+\Delta t}F\} = \{^tF\} + \{F\} \quad (1.4)$$

式中, $\{F\}$ 表示 t 到 $t + \Delta t$ 时间间隔内, 由于单元内应力增量所引起的结点力增量矢量。这一矢量可以近似地表示为

$$\{F\} = [K]\{U\} \quad (1.5)$$

式中, $[K]$ 为相应于 t 时刻材料和几何条件的切线刚度矩阵。 $\{U\}$ 为 Δt 时间间隔中的结点位移增量, 现在它还是未知的。将式 (1.4) 和 (1.5) 代入式 (1.3) 中, 得到

$$[K]\{U\} = \{^{t+\Delta t}R\} - \{^tF\} \quad (1.6)$$

上式中只有位移增量 $\{U\}$ 为未知, 一旦解出, 即可算得 $t + \Delta t$ 时刻的位移

$$\{^{t+\Delta t}U\} = \{^tU\} + \{U\} \quad (1.7)$$

根据 $\{^{t+\Delta t}U\}$, 就容易算出 $t + \Delta t$ 时刻的应力及 $\{^{t+\Delta t}F\}$ 、 $\{^{t+\Delta t}K\}$, 于是马上可着手下一步

的计算。但要指出的是, 式 (1.5) 是一个近似表达式, 因此 $t + \Delta t$ 时刻的解也是近似的, 如果急于求成的作下去, 最终结果可能出现不可忽视的重大误差以致于达到荒谬的地步。解决这一困难的办法是以花费计算时间为代价, 即在 t 到 $t + \Delta t$ 时步中进行足够次数的迭代, 以保证最终的解获得足够的精度。

最常用的迭代方法是修正 Newton 迭代法。这种方法可由非线性方程组的 Newton-Raphson 解法导出。由于该方法在许多问题的求解中十分有效, 故本书主要采用这种方法贯穿于主要公式推导。当然, 针对某些具体问题采用与之不同的方法亦未尝不可。

在 t 时刻到 $t + \Delta t$ 时刻的时步中, 修正 Newton 法的迭代公式可以表示为

$$[K] \Delta \{U\}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\{R\} - {}^{t+\Delta t}\{F\}^{(i-1)} \quad (1.8)$$

$${}^{t+\Delta t}\{U\}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\{U\}^{(i-1)} + \Delta \{U\}^{(i)} \quad (1.9)$$

其中, i 表示迭代步数, 依次取 1, 2, 3, ..., 其迭代所用的初始值正是 t 时刻的解, 即

$${}^{t+\Delta t}\{U\}^{(0)} = {}^t\{U\}, \quad {}^{t+\Delta t}\{F\}^{(0)} = {}^t\{F\} \quad (1.10)$$

式 (1.8) 的右端项

$${}^{t+\Delta t}\{R\} - {}^{t+\Delta t}\{F\}^{(i-1)}$$

称为第 i 步迭代前的不平衡载荷。在迭代过程中, ${}^{t+\Delta t}\{F\}^{(i-1)}$ 随 i 的增加而逐步接近 ${}^{t+\Delta t}\{R\}$ 。因此, 我们可事先对不平衡载荷的模给定一个精度指标, 每次迭代后检查不平衡载荷是否小于该指标。若满足精度, 则在求出 ${}^{t+\Delta t}\{U\}$ 后转入下一时步的计算, 否则继续迭代, 直至满足精度要求为止。

在结束本章之前, 再分析两个例题, 以加深对非线性问题的理解。例 1.4 说明非线性分析的平衡方程是建立在变形后的位形之上。例 1.5 是用算例说明修正 Newton 法的迭代过程。

例 1.4 考虑图 (1.4) 所示的两根杆单元所组成的拱形结构。假设 t 时刻杆中内力可表示为

$${}^tF_{\text{bar}} = k\delta$$

其中, k 为常数, δ 为杆在 t 时刻的伸长。如果载荷作用点发生了大位移, 试按式 (1.2) 建立问题的平衡方程。

解: 由于位移较大, 正确求解的关键在于平衡方程应建立在变形后的位形上。根据图 (1.4b) 和 (c) 所表示的对称性可知

$$(L - {}^t\delta) \cos {}^t\beta = L \cos 15^\circ$$

$$(L - {}^t\delta) \sin {}^t\beta = L \sin 15^\circ - {}^t\Delta$$

从以上两式可解出

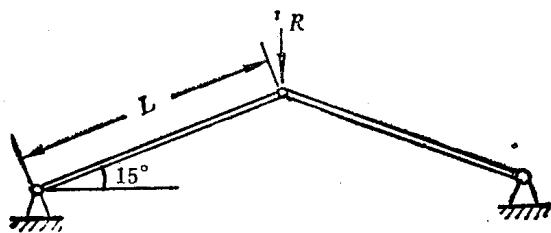
$${}^t\delta = L - \sqrt{L^2 - 2L {}^t\Delta \sin 15^\circ + {}^t\Delta^2}$$

$$\sin {}^t\beta = \frac{L \sin 15^\circ - {}^t\Delta}{L - {}^t\delta}$$

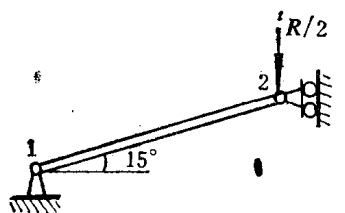
于是, t 时刻的平衡条件是

$$2 {}^tF_{\text{bar}} \sin {}^t\beta = {}^tR$$

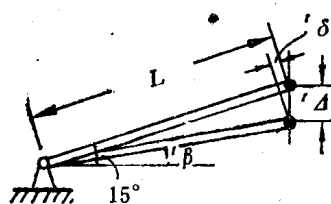
代入上述关系后, 得



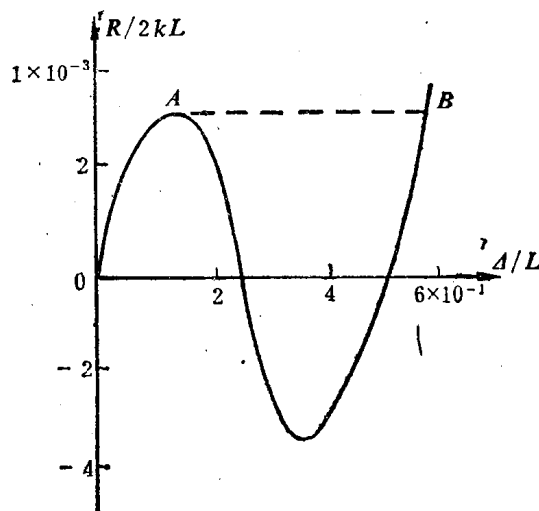
(a) 集中力作用的弹性桁架



(b) 两结点杆单元模型
(结点编号为1,2)



(c) t时刻位形的几何关系



(d) 载荷位移曲线

图(1.4) 三铰拱架的分析

$$\frac{{}^tR}{2kL} = \left\{ -1 + \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{{}^t\Delta}{L} \sin 15^\circ + \left(\frac{{}^t\Delta}{L}\right)^2}} \right\} \left(\sin 15^\circ - \frac{{}^t\Delta}{L} \right)$$

上式可用载荷位移曲线表示,如图(1.4d)所示。由图可知,对于一定的载荷水平,有A和B两个可能的位形。如果载荷 tR 逐渐增加,位移路径将会突然从A点沿曲线到达B点,这就是通常所说的“失稳”现象。

例1.5 使用修正 Newton 法的迭代公式(1.8)~(1.10)计算例1.2,设经历两个载荷步达到最大载荷。

解: 本题的迭代方程可写为

$$\begin{aligned} ({}^tK_a + {}^tK_b) \Delta u^{(t)} &= {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F_p^{(t-1)} - {}^{t+\Delta t}F_b^{(t-1)} \\ {}^{t+\Delta t}u^{(t)} &= {}^{t+\Delta t}u^{(t-1)} + \Delta u^{(t)} \end{aligned} \quad (a)$$

初值为

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}u^{(0)} &= {}^tu, \quad {}^{t+\Delta t}F_a^{(0)} = {}^tF_a \\ {}^{t+\Delta t}F_b^{(0)} &= {}^tF_b \\ {}^tK_a &= {}^tCA/L_a, \quad {}^tK_b = {}^tCA/L_b \end{aligned} \quad (b)$$

其中

$${}^tC \begin{cases} = E & (\text{弹性变形}) \\ = E_T & (\text{塑性变形}) \end{cases}$$

对于弹性阶段

$${}^{t+\Delta t}F^{(i-1)} = EA^{t+\Delta t}\epsilon^{(i-1)} \quad (c)$$

对于塑性阶段

$${}^{t+\Delta t}F^{(i-1)} = A\{E_T({}^{t+\Delta t}\epsilon^{(i-1)} - \epsilon_s) + \sigma_s\} \quad (d)$$

在 a 段和 b 段的应变分别是

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\epsilon_a^{(i-1)} &= {}^{t+\Delta t}u^{(i-1)}/L_a \\ {}^{t+\Delta t}\epsilon_b^{(i-1)} &= {}^{t+\Delta t}u^{(i-1)}/L_b \end{aligned} \quad (e)$$

在第一载荷步, 有 $t=0$ 和 $\Delta t=1$, 具体的使用式(a)~(e), 得到

$$({}^0K_a + {}^0K_b)\Delta u^{(1)} = {}^1R - {}^1F_a^{(0)} - {}^1F_b^{(0)}$$

$$\Delta u^{(1)} = \frac{2 \times 10^4}{10^7 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5} \right)} 6.6667 \times 10^{-3} \text{cm}$$

计算第一次迭代($i=1$)的结果, 有

$${}^1u^{(1)} = {}^1u^{(0)} + \Delta u^{(1)} = 6.6667 \times 10^{-3} \text{cm}$$

$${}^1\epsilon_a^{(1)} = {}^1u^{(1)}/L_a = 6.6667 \times 10^{-4} < \epsilon_s \quad (a \text{ 段为弹性})$$

$${}^1\epsilon_b^{(1)} = {}^1u^{(1)}/L_b = 1.3333 \times 10^{-3} < \epsilon_s \quad (b \text{ 段为弹性})$$

$${}^1F_a^{(1)} = 6.6667 \times 10^3 \text{N}$$

$${}^1F_b^{(1)} = 1.3333 \times 10^4 \text{N}$$

考虑第2次迭代

$$({}^0K_a + {}^0K_b)\Delta u^{(2)} = {}^1R - {}^1F_a^{(1)} - {}^1F_b^{(1)}$$

先验算不平衡载荷

$${}^1R - {}^1F_a^{(1)} - {}^1F_b^{(1)} = 0$$

表明第一次迭代已收敛, 故不做第二次迭代。

第一载荷步到此结束。

$${}^1u = 6.6667 \times 10^{-3} \text{cm}$$

第二载荷步: $t=1$, $\Delta t=1$

$${}^1K_a = E_a/L_a, \quad {}^1K_b = EA/L_b$$

$${}^2F_a^{(0)} = {}^1F_a, \quad {}^2F_b^{(0)} = {}^1F_b$$

第一次迭代

$$({}^1K_a + {}^1K_b)\Delta u^{(1)} = {}^2R - {}^2F_a^{(0)} - {}^2F_b^{(0)}$$

$$\text{解出} \quad \Delta u^{(1)} = \frac{(4 \times 10^4) - (6.6667 \times 10^3) - (1.3333 \times 10^4)}{10^7(1/10 + 1/5)} = 6.6667 \times 10^{-3} \text{cm}$$

计算第一次迭代的结果($i=1$)。

$${}^2u^{(1)} = {}^2u^{(0)} + \Delta u^{(1)} = 1.3333 \times 10^{-2} \text{cm}$$

$${}^2\epsilon_a^{(1)} = 1.3333 \times 10^{-3} < \epsilon_s \quad (a \text{ 段为弹性})$$

$${}^2\epsilon_b^{(1)} = 2.6667 \times 10^{-3} < \epsilon_s \quad (b \text{ 段为弹性})$$

$${}^2F_a^{(1)} = 1.3333 \times 10^4 \text{N}$$

$${}^2F_b^{(1)} = \{E_T({}^2\epsilon_b^{(1)} - \epsilon_s) + \sigma_s\}A = 2.067 \times 10^4 \text{N}$$

检查不平衡载荷过大, 进行第2次迭代, 有

$$({}^1K_a + {}^1K_b)\Delta u^{(2)} = {}^2R - {}^2F_a^{(1)} - {}^2F_b^{(1)}$$

解出

$$\Delta u^{(2)} = 2.2 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

计算第2次迭代($i=2$)的结果, 得

$${}^2u^{(2)} = {}^2u^{(1)} + \Delta u^{(2)} = 1.5533 \times 10^{-2} \text{ cm}$$

$${}^2e_a^{(2)} = 1.5533 \times 10^{-3} < \varepsilon_s$$

$${}^2e_b^{(2)} = 3.1066 \times 10^{-4} > \varepsilon_s$$

$${}^2F_a^{(2)} = 1.5533 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$${}^2F_b^{(2)} = 2.0111 \times 10^{-3} \text{ N}$$

检查不平衡载荷过大, 决定进行第3次迭代, 有

$$({}^1K_a + {}^1K_b)\Delta u^{(3)} = {}^2R - {}^2F_a^{(2)} - {}^2F_b^{(2)}$$

解出

$$\Delta u^{(3)} = 1.4521 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

依次类推, 各次迭代结果如下表所示。

i	$\Delta u^{(i)} \text{ cm}$	${}^2u^{(i)}$
3	1.4521×10^{-3}	1.6985×10^{-2}
4	9.5832×10^{-4}	1.7944×10^{-2}
5	6.3249×10^{-4}	1.8576×10^{-2}
6	4.1744×10^{-4}	1.8994×10^{-2}
7	2.7551×10^{-4}	1.9269×10^{-2}

在第7次迭代之后, 得到的最终位移为

$${}^2u \doteq {}^2u^{(7)} = 1.9269 \times 10^{-2}$$

与精确解 $u = 1.9804 \times 10^{-2}$ 比较接近。

参 考 文 献

- [1] K. J. Bathe, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1982.
- [2] J. T. Oden, *Finite Elements of Nonlinear Continua*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1972.

第二章 有限变形分析

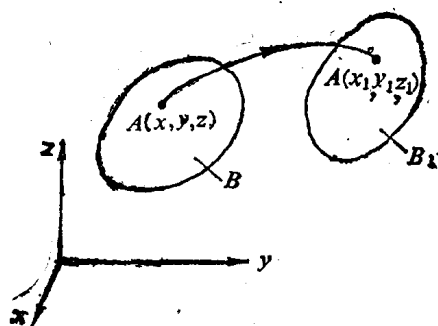
§ 2.1 引言

本章简要讨论有限变形体力学的一些基本问题。

Helmholtz (1958) 指出, 一个可变形的微元体, 在微小时间内的变化可分解为三种基本运动形式, 即

1. 随同微元体中任意基点的平移。
2. 绕过基点的某一瞬时轴转动。
3. 沿三个主方向的伸长或压缩变形。

下面用矩阵形式写出这三种基本运动形式。为此, 设可变形体点集由一个几何位形 B 变为另一几何位形 B_1 , 其中, 点 A 变到 A_1 (图 2.1), 变换函数为



图(2.1) 变形体的两个几何位形

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_1(x, y, z) \\ y_1 &= y_1(x, y, z) \\ z_1 &= z_1(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

x_1, y_1, z_1 单值连续可微。我们引入位移分量, 有

$$\left. \begin{aligned} u &= x_1 - x \\ v &= y_1 - y \\ w &= z_1 - z \end{aligned} \right\} \text{ 或 } \left. \begin{aligned} x_1 &= x + u \\ y_1 &= y + v \\ z_1 &= z + w \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

则有

$$dx_1 = dx + du = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \quad (2.3)$$

或

$$\left. \begin{aligned} dx_1 &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ dy_1 &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ dz_1 &= \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dz \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

不难得知, 点集 B 的变换特征可由下列矩阵完全确定, 即