微分几何引论

W. 柏拉須凱

科学出版社

微分几何引论

W. 柏拉須凱 著

方 德 植 譯

科 学 出 版 社

1 9 6 3

WILHELM BLASCHKE

EINFÜHRUNG IN DIE DIFFERENTIALGEOMETRIE

Springer-Verlag

1950

內容簡介

本书主要是介紹外微分法．虽然近代几何学家在各种各样的研究工作中广泛地应用这个新方法，但是应用外微分法系統地叙述古典微分几何的，当首推本书作者．他在这本书里，創造性地借助于这个新方法叙述了曲綫論和曲面論的基础．

微分几何引論

W. 柏拉須凱 著

方 德 植 譯

*

科学出版社 出版（北京朝阳門大街 117 号）

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷　新华书店总經售

*

1963年 9月第一版　书号：2804　字数：152,000

1963年 9月第一次印刷　开本：850×1168 1/32

（京）0001—4,600　印张：6

定价：1.00 元

譯者的話

嘉当的外微分法是研究近代微分几何的一个有力工具，虽然近代几何学家在各种各样的研究工作中广泛地应用这个新方法，但是应用外微分法系統地叙述“古典”微分几何的，当首推柏拉須凱(W. Blaschke). 在他所著的“微分几何引論”(Einführung in die Differentialgeometrie, 1950) 里，借助于这个新方法叙述了曲綫論和曲面論的基础. 本书就是根据这本书譯出的.

另一方面，原著也有俄文譯本(А. П. Широков 譯, Введение в Дифференциальную Геометрию, 1957)，在俄譯本中对原著作了某些补充附注，这跟原著的附注不同，这种附注都用星号标出；此外，对原著所用的字母、記号以及某些定理的写法等也有所变更. 例如俄譯本中通常用拉丁字母来替代原著中的哥德式的字母；此外，对于外微分和向量代数的运算記号也改用常用記号. 譯者認为俄譯本中的各种各样的变更和补充附注对我国的讀者来說是有帮助的. 因此，在翻譯的过程中充分地吸取了俄譯本中的补充附注和叙述方式，同时采用了其中所有的記号.

方　德　植

1960 年 2 月于厦門大学

序

本教程是遵循两种方法写成的：高斯和嘉当的方法．象高斯那样，这里所偏重的是曲面的內在性質，这种性質只与曲面本身的度量有关，所以对于扭曲保持不变．但是，至于有关高斯的曲面論所依据的乃是二次微分形式，这里按照嘉当的方法，运用发甫所引进的綫性形式．

本书的手稿是在战爭期間 1939—1945 年在汉堡写成的，但是它的印行是由于战爭和战后的条件限制而拖延至今．我感謝給我提供意見和帮助我的許多同事，帮助尤多的是 G. Bol, W. Buran, W. Haack, J. E. Hofmann, R. Saner, K. Strubecker, W. Weber 和 E. Witt.

W. 柏 拉 須 凱

汉堡，1949 秋

目　　錄

I. 向量、行列式、矩陣

§1.1. 向　量　和

我們在着手的第一部分就把解析几何与微分学的方法作一簡短的概括叙述，这种方法在以后我們常要用到的.

布魯塞尔的法兰德斯的商人斯泰維恩(S. Stevin, 1548—1620)在力学上碰到“平行四边形定律”. 这个定律告訴我們的是，作用于同一質点 o 的許多力的“相加”. 每一个这种力都可以用从点 o 出发画一个有向綫段，或者說，通过点 o 画一个“向量”来表示它. 如果 x, y 是会于点 o 的两个向量 $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ 的終点，則象在图 1 中的向量和

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \tag{1}$$

的終点 z 是使点 o, x, z, y 为按这个順序所构成的一个平行四边形的頂点. 那末我們說，在两个向量 $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ 上构成平行四边形. 阿基米德(紀元前 287—212)对于速度已經引进类似的概念.

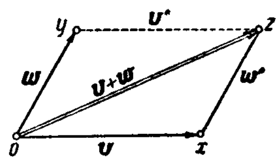

图 1

这个和的定义可以按照下述方式推广到更多个向量的情形. 首先，对于以 o 为起点和 x 为終点的一个向量 $\boldsymbol{v}$, 总是以

$$\boldsymbol{v} = \overrightarrow{ox} \tag{2}$$

来表示.

因此，向量是我們的欧几里得空間 R_3 中一个有序(实的眞)点偶. 两个向量 $\boldsymbol{v}$ 和

$$\boldsymbol{v}^* = \overrightarrow{yz}$$

叫做相等：$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^*$，如果点 o, x, y, z 組成一个平行四边形的頂点，也就是，如果 $\boldsymbol{v}^*$ 是从 $\boldsymbol{v}$ 沿着向量(图 1)：

$$\overrightarrow{oy} = \overrightarrow{xz}$$

“移动”（“平移”）可以得到的. 因之，如果

$$\boldsymbol{v}_j = \overrightarrow{p_j q_j} \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{3}$$

是 n 个向量，那末我們可以作适当的平移，預先使得每一个向量 $\boldsymbol{v}_{j-1}$ 的終点 g_{j-1} 重合于向量 $\boldsymbol{v}_j$ 的起点 p_j：

$$q_{j-1} = p_j \quad (j = 2, 3, \cdots, n). \tag{4}$$

然后以

$$\overrightarrow{p_1 q_n} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \boldsymbol{v}_n \tag{5}$$

定义为我們的向量和（在图 2 上所描繪的多角形沒有必要落在同一平面上，这里是 $n = 3$ 的情形）.

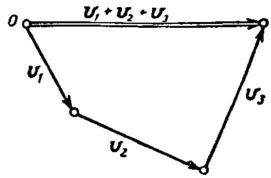

图 2

另一方面，如果向量与空間 R_3 中的平移互相比較，那末向量的加法相应于（依序实行的）对应平移的“組合”. 特别是，如果一个向量的起点与終点相重合，那末我們得到一个“零向量”. 所有这种向量互为相等并記作

$$\overrightarrow{xx} = 0. \tag{6}$$

所有零向量的平移相当于“恆等映射”或“不动映射”，这种映射使每一点变为它本身. 我們为了确定向量的加法，应用下列三个計算規律. 第一个是“結合律”：

$$(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) + \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3); \tag{7}$$

第二个是“交換律”，或者可換性：

$$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1. \tag{8}$$

从(7)和(8)的正确性，我們容易推出对于 n 个向量成立同样的关系. 第三个是“可解性”，那就是，当 $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{w}$ 給定时，从向量方程(1)关于 $\boldsymbol{v}$ 可以唯一地解出：

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{s} - \boldsymbol{w}. \tag{9}$$

至于說到平移与向量对照，則方程(7)，(8)，(9)等价于这样的說法：平移組成一个“阿貝尔羣”[1].

---

1) 这个命名引用挪威人阿貝尔(1802—1829)的名字.

除了加法以外，同时可以考虑向量与实数或“数量”的乘法：

$$\boldsymbol{w} = s\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}s. \tag{10}$$

如果其中

$$\boldsymbol{v} = \overrightarrow{ox}, \quad \boldsymbol{w} = \overrightarrow{oy},$$

那末点 o, x, y 落在同一直綫上，而綫段的长度

$$\overline{ox} = v \geqslant 0, \quad \overline{oy} = w \geqslant 0$$

满足关系式

$$w = |s| v;$$

当 $s > 0$ 时，点 x, y 位于 o 的同側，而当 $s < 0$ 时，位于 o 的异側.

上面所定义的加法与乘法满足“分配律”，这是在 1765 年由拉姆别尔特(J. H. Lambert, 1728—1777)命名的.

$$s(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = s\boldsymbol{v} + s\boldsymbol{w}, \quad (s + t)\boldsymbol{v} = s\boldsymbol{v} + t\boldsymbol{v}; \tag{11}$$

换句話說，加法与乘法是可以互相交换的.

两个向量 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 叫做“綫性无关”，如果在向量方程

$$a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w} = 0$$

中的数量 a, b 只有“无意义的解” $a = b = 0$. 綫性相关的几何意义就是，向量 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 的方向平行于同一条直綫. 对应于三个向量 $\boldsymbol{v}_j$ 的綫性相关性是，存在不同时等于零的三个数量 s_j，使得

$$s_1\boldsymbol{v}_1 + s_2\boldsymbol{v}_2 + s_3\boldsymbol{v}_3 = 0.$$

这个綫性相关性的几何条件是，这三个向量都平行于(至少)一个平面.

在欧几里得空間 R_3 中的四个向量总是綫性相关的. 因此，每一个向量可以用三个綫性无关的向量 $\boldsymbol{v}_j$ 的“綫性組合”

$$\boldsymbol{v} = s_1\boldsymbol{v}_1 + s_2\boldsymbol{v}_2 + s_3\boldsymbol{v}_3 \tag{12}$$

来表示，而且这种表示法是唯一的. 那末，数量 s_j 叫做向量 $\boldsymbol{v}$ 关于“基底” $\boldsymbol{v}_j$ 的坐标.

特別是，如果我們取三个两两正交的单位向量 $\boldsymbol{e}_j$ 做基底，那就是互相正交的单位长的向量，那末我們称它为一个“直角的”或“笛卡儿的”基底. 这个命名是与解析几何的創始人笛卡儿 (1596—1650)的名字联系着的. 在这种情形下，

$$\boldsymbol{v} = \overrightarrow{ox} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3, \tag{13}$$

而数 x_i 也叫做点 x 关于以 o 为“原点”的笛卡儿标架*)

$$\{0;\ \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\}$$

的直角或笛卡儿坐标.

如果我們对(13)作如下的补充記号:

$$x_1\boldsymbol{e}_1 = \overrightarrow{op},\quad x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 = \overrightarrow{oq}, \tag{14}$$

那末根据毕塔格拉斯(紀元前 580—501?)定理(图 3),在以 o, p, q 为頂点的直角三角形中,我們就有

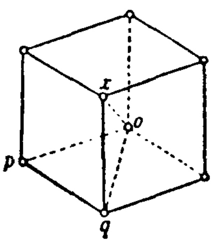

图 3

$$\overline{oq}^2 = x_1^2 + x_2^2;$$

同样,从直角三角形 o, q, x 得到

$$\overline{ox}^2 = \overline{oq}^2 + x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

因此,对于以笛卡儿坐标 x_i 的向量 $\boldsymbol{v}$ 的长度 $v(v \geqslant 0)$,关系式

$$v^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \tag{15}$$

成立. 特别是,对于向量 $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{oy} - \overrightarrow{ox} = \overrightarrow{xy}$ 的长度 v,从等式

$$\boldsymbol{v} = \overrightarrow{xy},\quad \overrightarrow{ox} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3,\quad \overrightarrow{oy} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + y_3\boldsymbol{e}_3$$

推出

$$v^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2. \tag{16}$$

照例,我們这里用通常的拉丁字母表示数量,而用粗号的拉丁字母表示向量. 从距离公式(16)可以导出欧几里得几何的所有关系. 公式(16)自然地构成“解析几何”的出发点[1].

§1.2. 数 量 积

取两个关于笛卡儿基底 $\boldsymbol{e}_i$ 的坐标为 x_i, y_i 的向量 $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$:

$$\boldsymbol{v} = \overrightarrow{ox} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3,\quad \boldsymbol{w} = \overrightarrow{oy} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + y_3\boldsymbol{e}_3. \tag{1}$$

---

*) Achsenkreuz 这个字,我們在这里譯成“标架”; 以后我們也用“坐标系”这个名詞.

1) 这里与以后, 我們参閱維·柏拉須凱所著的书:“解析几何” (Analytische Geometrie), Wölfenbüttel, 1948.

那末对于向量

$$\overrightarrow{xy} = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}$$

的长度 $\overline{xy}$，按公式(1.1, 16)[1]我們有

$$\overline{xy} = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 =$$
$$= v^2 + w^2 - 2vw\cos\theta, \tag{2}$$

其中 $v \geqslant 0$, $w \geqslant 0$ 表示向量 $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ 的长度：

$$v^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad w^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \tag{3}$$

$\theta(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$为这两个向量之間的角度. 但从公式(2)与(3)推出

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = vw\cos\theta. \tag{4}$$

这个“双綫性”表达式叫做向量 $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ 的“内积”或“数量积”,并且写为

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = \boldsymbol{vw}^{*)}. \tag{5}$$

我們容易看出下列关系式都成立:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{vw} = \boldsymbol{wv}, \\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) = \boldsymbol{vw}_1 + \boldsymbol{vw}_2, \\ (s\boldsymbol{v})\boldsymbol{w} = s(\boldsymbol{vw}).\end{gathered} \tag{6}$$

向量 $\boldsymbol{v}$ 关于笛卡儿基底 $\boldsymbol{e}_j$ 的直角坐标是下面的数量积:

$$x_j = \boldsymbol{ve}_j. \tag{7}$$

数量积等于零表示这两个因子的垂直性(正交性). 零向量垂直于任何向量. 条件 $\boldsymbol{vw} > 0$ 与 $\boldsymbol{vw} < 0$ 表示我們的向量分別組成鋭角与鈍角:

$$\theta < \frac{\pi}{2}, \quad \theta > \frac{\pi}{2}. \tag{8}$$

表达式 $\boldsymbol{vv}$ 也写为 $\boldsymbol{v}^2$.

§ 1.3. 极积、行列式

在斯特丁中学里，一位渊博的首席教师格拉斯曼 (1809—1877)在他的 1862 年(Werke, 1, 2, Leipzig, 1896)的“巨著”中引

1) 这表示 § 1.1，方程(16).

*) 在著者原书里以記号 ⟨$\boldsymbol{vw}$⟩ 表示数量积，这里把它改用常用記号 $\boldsymbol{vw}$.

进了向量的"輪换积"或"极积". 三个向量的輪换积記作$(\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3)$*), 并且滿足下列計算法则:

$$\left.\begin{aligned}(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) &= (\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3)+(\boldsymbol{v}_1'\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3),\\ (c\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) &= c(\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3).\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

但主要的是,当两个向量交换时这个积要变号:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3) &= (\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3\boldsymbol{v}_1) = (\boldsymbol{v}_3\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2) = \\ &= -(\boldsymbol{v}_3\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_1) = -(\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_3\boldsymbol{v}_2) = -(\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_3).\end{aligned} \tag{2}$$

这里不能再把这个积看作是向量.

取 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ 作为基底,并且从此作向量 $\boldsymbol{w}$ 的綫性組合:

$$\boldsymbol{w}_j = a_{j1}\boldsymbol{v}_1 + a_{j2}\boldsymbol{v}_2 + a_{j3}\boldsymbol{v}_3 \quad (j=1,2,3). \tag{3}$$

那末等式

$$(\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{w}_2\boldsymbol{w}_3) = A(\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3) \tag{4}$$

成立,其中数量因子 A 的数值是

$$\begin{aligned}A = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.\end{aligned} \tag{5}$$

这里有三項取正号, 三項取負号. 这个結果是从其中任何一項出发,把这个項的第二个指标 1, 2, 3 施行**圓交换**(循环置换)后可以得到的, A 叫做由 a_{jk} 組成的"**行列式**",并写作

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{6}$$

行列式的概念最初是由萊布尼茲(1646—1716)在 1676 年及日本人 Seki Shinsuke Kowa (1642—1708)在 1683 年引进的. 从(5)与(6)推出**行与列交换的不变性**:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

按照格拉斯曼的方法引进行列式的定义(4),就很明显地建立

---

*) 三个向量的輪换积通常叫做**混合积**,在这里我們改变这个积的記号,著者把它写成$[\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3]$的形式.

起行列式的主要性質，特别是“乘法定理”．那就是，如果我們把 $\boldsymbol{v}_j$ 变到新的基底 $\mathbf{e}_j$，使

$$\boldsymbol{v}_j = b_{j1}\mathbf{e}_1 + b_{j2}\mathbf{e}_2 + b_{j3}\mathbf{e}_3, \tag{8}$$

則把 $\boldsymbol{v}_j$ 的值从(8)代入到(3)中并且按 $\mathbf{e}_j$ 整理起来，得到

$$\boldsymbol{w}_j = c_{j1}\mathbf{e}_1 + c_{j2}\mathbf{e}_2 + c_{j3}\mathbf{e}_3, \tag{9}$$

其中

$$c_{jk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + a_{j3}b_{3k} = \sum_s a_{js}b_{sk}. \tag{10}$$

那末根据(4)，(8)和(9)我們有

$$(\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{w}_2\boldsymbol{w}_3) = A(\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3) = AB(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) = C(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3), \tag{11}$$

即

$$AB = C. \tag{12}$$

这里的行列式 A 是由公式(6)給定的，而 B 和 C 等于

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}. \tag{13}$$

公式(10)和(12)包括了拉格朗日(1773)的乘法定理．因为交换行和列，行列式 B 保持不变，那末，当我們令

$$c_{jk} = \sum_s a_{js}b_{ks} \tag{14}$$

时，这个定理可以取另外的形式．

特别是，若向量 $\boldsymbol{v}_j$ 也跟向量 $\mathbf{e}_j$ 一样地組成笛卡儿基底，則数量积 $\boldsymbol{v}_j\boldsymbol{v}_k$ 将为

$$\boldsymbol{v}_j\boldsymbol{v}_k = \sum_s b_{js}b_{ks} = \varepsilon_{jk} \begin{cases} = 1, & \text{若 } j = k, \\ = 0, & \text{若 } j = k. \end{cases} \tag{15}$$

那末由于(14)和(15)，得到

$$B^2 = 1, \quad B = \pm 1, \tag{16}$$

即根据(12)，

$$C = \pm A.$$

这表明，若我們从一个笛卡儿基底 $\mathbf{e}_j$ 連續的变到另一个笛卡儿基底 $\boldsymbol{v}_j$，則由三个向量 $\boldsymbol{w}_j$ 的坐标組成的行列式是不变的．

这样的一个变换总是可能的，若两个笛卡儿基底都是“右旋

的"（見图 4，这里是在三个基底向量上所画成的立方体）。那就是，若 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 是一个跟着一个按右手的母指，食指，中指的自然位置排列，若 $\boldsymbol{v}_i$ 象 $\boldsymbol{e}_i$ 那样組成右旋笛卡儿基底，那末这时 $B=1$，而且我們可以認为

$$(\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3) = (\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3) = 1. \tag{17}$$

于是从(9)，(11)和(17)我們看出，对于由三个任意向量 $\boldsymbol{w}_i$ 組成的行列式 C 等于

$$C = (\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{w}_2\boldsymbol{w}_3). \tag{18}$$

由三个向量的坐标組成的行列式，或者，这时就是这三个向量的輪换积，有一个簡单的几何意义。因为右旋笛卡儿基底 $\boldsymbol{e}_i$ 的选取沒有受到任何限制，所以我們可以特别的(一般是唯一的)这样来安排，使得滿足下列条件：

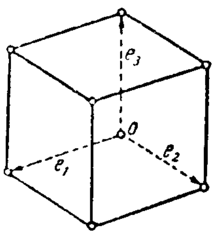

图 4

$$c_{11} > 0, \quad c_{12} = 0, \quad c_{13} = 0,$$
$$c_{22} \geqslant 0, \quad c_{23} = 0. \tag{19}$$

但是这时我們有

$$C = c_{11}c_{22}c_{33}, \tag{20}$$

这里的 $c_{11}c_{22} \geqslant 0$ 表示在向量 $\boldsymbol{w}_1$，$\boldsymbol{w}_2$ 上所构成的平行四边形的面积，而且如果我們考虑这个平行四边形作为在向量 $\boldsymbol{w}_1$，$\boldsymbol{w}_2$，$\boldsymbol{w}_3$ 上所构成的"平行六面体"的"底面"，則 $c_{33} = \boldsymbol{w}_3\boldsymbol{e}_3$ 是对应的"高"。于是証明了下述命題：

行列式 $(\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{w}_2\boldsymbol{w}_3)$ 表示在三个向量 $\boldsymbol{w}_1$，$\boldsymbol{w}_2$，$\boldsymbol{w}_3$ 上所构成的平行六面体的体积，它是正的或負的只依賴于这三个向量按这个順序所构成的三脚形是右旋的或左旋的。

条件

$$(\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{w}_2\boldsymbol{w}_3) = 0$$

是三个向量的綫性相关性的条件。

反之，从这个几何的解释出发，我們可以导出这个行列式的性質（維尔斯脫拉斯，1864 年）。由(14)所表示的乘法定理，現在可以改写为下列形式：

$$(\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3)(\boldsymbol{w}_1\boldsymbol{w}_2\boldsymbol{w}_3)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{v}_1\boldsymbol{w}_2 & \boldsymbol{v}_1\boldsymbol{w}_3\\ \boldsymbol{v}_2\boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{v}_2\boldsymbol{w}_2 & \boldsymbol{v}_2\boldsymbol{w}_3\\ \boldsymbol{v}_3\boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{v}_3\boldsymbol{w}_2 & \boldsymbol{v}_3\boldsymbol{w}_3\end{vmatrix}. \tag{21}$$

这里作为在右边行列中的元素是数量积 $\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{w}_k$.

§1.4. 向　量　积

設 $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 是两个向量,若对于一切向量 $\boldsymbol{x}$, 关系式

$$(\boldsymbol{vwx})=\boldsymbol{px} \tag{1}$$

都成立,那末向量 $\boldsymbol{p}$ 叫做向量 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 的"外积"或"向量积". 等式(1)的右边是数量积. 按我們的要求(1),給出笛卡儿坐标:

$$v_2w_3-v_3w_2=p_1,\quad v_3w_1-v_1w_3=p_2,$$
$$v_1w_2-v_2w_1=p_3. \tag{2}$$

向量积我們通常写为

$$\boldsymbol{p}=[\boldsymbol{vw}]^{*)}. \tag{3}$$

因此,等式(1)等价于下面的写法:

$$(\boldsymbol{vwx})=[\boldsymbol{vw}]\boldsymbol{x}. \tag{4}$$

由这个定义推出:

$$[\boldsymbol{vw}]+[\boldsymbol{wv}]=0,\quad [(s\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}]=s[\boldsymbol{vw}],$$
$$[(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{w}]=[\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{w}]+[\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{w}]. \tag{5}$$

其次,从(1)得到下述的向量积 $\boldsymbol{p}$ 的解释. 若在公式(1)中, $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 綫性相关，則左边等于零. 于是就有 $\boldsymbol{px}=0$, 这表示向量 $\boldsymbol{p}$ 垂直于因子 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$. 从而在 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 綫性无关的情形下可以求得 $\boldsymbol{p}$ 的方向. 另一方面,在这个情形下，我們取 $\boldsymbol{x}$ 作为在这个方向上的单位向量,并且使得

$$D=(\boldsymbol{vwx})>0,$$

則从(1)推出 $\boldsymbol{p}=D\boldsymbol{x}$.

因此, $\boldsymbol{p}$ 的长度等于在向量 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 上所构成的平行四边形的面积 D, $\boldsymbol{p}$ 的方向应当这样地选取,使按 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{p}$ 这个順序組成一个

*) 著者以記号 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}$ 表示向量积.