

刘笃洪 编著

结构力学

基本理论和 分析方 法

东北工学院出版社

结构力学基本理论和分析方法

刘笃洪 编著

东北工学院出版社

内 容 简 介

本书突出结构力学基本概念和基本原理的描述,突出结构定性分析和解题技巧,并进而澄清一些初学者常含糊不清的问题。全书共分13章,每章主要包括两方面内容,一是有关理论知识的要点;二是若干典型题例的分析。同时每章后均编有习题及答案。

本书可供全日制大学、电视大学、函授大学、职工大学师生以及参加自学考试人员、报考研究生人员和工程技术人员学习参考之用。

结构力学基本理论和分析方法

刘笃洪 编著

东北工学院出版社 辽宁省新华书店发行
(沈阳 南湖) 沈阳新华印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/16 印张: 21 字数: 504千字
1988年9月第1版 1988年9月第1次印刷
印数: 1—4900册

责任编辑: 夏长庚 责任校对: 刘淑芳

ISBN 7-81006-074-0/O·7

定价: 3.86元

序

结构力学是土建类某些专业的一门主要基础技术课，它理论性强，数值运算多，但初学者往往偏重于数值计算而忽视理论分析，以至于造成“管窥蠡测”，不能“纲举目张”。刘笃洪同志根据长期教学实践，编著了《结构力学基本理论和分析方法》一书，突出了基本概念和基本原理的描述，突出了理论分析和结构的定性分析，突出了解题思路和解题技巧，很好的解决了忽视理论分析的倾向。并且通过大量题例以理论分析指导数值运算，从数值运算中领会结构力学理论含义。

目前，结构力学教材已经比较齐全，但教学参考书不多，而适合于自学特点的教学参考书更少。《结构力学基本理论和分析方法》一书，在您讲授结构力学时将会得到教益，在您学习结构力学时将会得到启迪。

沈阳建筑工程学院 周新成

前 言

本书是根据普通高等工业学校土建类结构力学教学大纲，并考虑同类业余学校特点编写的一本教学参考书，适于全日制大学、电视大学、函授大学、职工大学师生以及参加自学考试人员、报考研究生人员和工程技术人员学习参考之用。

编者在多年教学过程中，注意到有不少初学者虽然作了不少计算题，但对结构力学一些基本概念和基本原理却缺乏深入了解，以至于对结构作定性分析和寻求解题技巧的能力显得甚为薄弱。基于这种考虑，本书着重基本概念和基本原理的描述，并将理论知识归纳总结成若干要点，以便于读者领会理解，并进而运用它分析和解决问题。同时书中列举了大量典型例题，对解题思路、步骤和技巧都做了细致的说明，使初学者更易于掌握解题方法，因此更适于自学。这些也正是本书的特点。学习本书可提高对一般结构进行受力分析的能力，而且对某些结构的受力状态和变形状态可作出正确的判断，并能使读者领略到许多解题技巧的妙用。

本书承蒙东北工学院王明恕教授、山东建筑工程学院姚传玺教授、沈阳建筑工程学院马越教授审阅，提出许多宝贵意见，辛燕同志为本书描图付出了辛劳，在此表示衷心地感谢。

编者水平有限，缺点与不足之处在所难免，诚恳欢迎读者批评指正。

编 者

于1987年4月

目 录

第一章 结构力学计算方法简说	(1)
第二章 平面体系几何构造分析	(3)
一、理论知识要点	(3)
二、题例分析	(4)
三、习题及答案	(7)
第三章 静定梁 静定刚架 三铰拱	(9)
一、理论知识要点	(9)
二、题例分析	(11)
三、习题及答案	(33)
第四章 静定平面桁架	(38)
一、理论知识要点	(38)
二、题例分析	(38)
三、习题及答案	(55)
第五章 静定结构位移计算	(59)
一、理论知识要点	(59)
二、题例分析	(61)
三、习题及答案	(73)
第六章 力法计算超静定结构	(79)
一、理论知识要点	(79)
二、题例分析	(81)
三、习题及答案	(112)
第七章 位移法计算超静定结构	(119)
一、理论知识要点	(119)
二、题例分析	(121)
三、习题及答案	(156)

第八章 渐近法计算超静定结构	(161)
一、理论知识要点	(161)
二、题例分析	(163)
三、习题及答案	(202)
第九章 影响线及其应用	(206)
一、理论知识要点	(206)
二、题例分析	(207)
三、习题及答案	(220)
第十章 矩阵位移法	(223)
一、理论知识要点	(223)
二、题例分析	(225)
三、习题及答案	(263)
第十一章 结构的极限荷载	(268)
一、理论知识要点	(268)
二、题例分析	(269)
三、习题及答案	(278)
第十二章 结构弹性稳定计算	(281)
一、理论知识要点	(281)
二、题例分析	(282)
三、习题及答案	(290)
第十三章 结构的动力计算	(293)
一、理论知识要点	(293)
二、题例分析	(296)
三、习题及答案	(314)
· 附录 I	(317)
表 7-1 载常数和形常数表	(317)
· 附录 II	(322)
表 12-1 杆端发生单位位移产生的杆端力	(322)
· 附录 I	(323)
表 12-2 函数 $\xi_1(u)$ 、 $\xi_2(u)$ 、 $\xi_3(u)$ 、 $\eta_1(u)$ 、 $\eta_2(u)$ 、 $\eta_3(u)$ 的数值	(323)

第一章 结构力学计算方法简说

一般言之，在各类建筑物中，凡用建筑材料按合理方式组成，能承受预定荷载，并起骨架作用的部分都可称为建筑结构或结构。一个梁、一个柱是最简单的结构。但大多数的结构是由若干杆件组成的所谓体系，如桁架、刚架等。

完全按照结构实际情况进行分析和计算是不可能的，也是不必要的。所以，结构力学的计算对象是计算简图，即实际结构的简化图形或称力学模型。选取计算简图的原则，一是力求反映实际结构的主要力学性能，以便精确可靠；另一是忽略次要因素，使计算工作尽可能简化。概括的说，杆系结构的计算简图主要由三或四种基本杆（三种受弯杆和二力杆）、三或四种结点（铰结点、刚结点、组合结点及定向联结）、三或四种支承（可动、不动铰支、固定端及定向支承），以及三或四种荷载（集中荷载、均布或分布荷载及集中力偶）组成。杆系结构这样的计算简图可分类为：梁、刚架、桁架、拱、组合结构等五种。

结构力学除研究结构的组成规律和合理形式外，从计算角度来说，主要是计算结构的内力，以便为强度设计提供依据。当然，为作刚度校核等要求还必须计算结构的位移。必要时还要计算丧失稳定时的临界荷载，以及振动时的动力反应等等。而这些也都和内力计算密切相关。所以，研究和建立结构内力的计算方法便成了结构力学要讨论的基本内容。总的说，主要有两类基本理论和基本计算方法。一是静力法，一是能量法。这两类方法都是根据结构在外力作用下的平衡、几何和物理三个条件建立起来的，都适用于静力、动力和稳定等问题的计算。

计算一个静定结构，只需列出力对力的平衡条件即可求解，无需能量法。以图1-1 (a) 平面结构为例，由 $\sum Y = 0$ 可知竖向反力 $V_A = 6\text{kN}$ 。它与 $P = V_A = 6\text{kN}$ 组成的反时针力偶为 $6 \times 5 = 30\text{kN}\cdot\text{m}$ 。与其对应必有一个大小相等、方向相反的顺时针力偶 $30\text{kN}\cdot\text{m}$ 与之平衡，以满足 $\sum M = 0$ 。此顺时针力偶将由水平反力 $H_A = H_B = \frac{30}{6} = 5\text{kN}$ 组成，同时满足 $\sum X = 0$ 。对于空间体系，力对力平衡条件为 $\sum X = 0$ $\sum Y = 0$ $\sum Z = 0$ $\sum M_x = 0$ $\sum M_y = 0$ $\sum M_z = 0$ 。

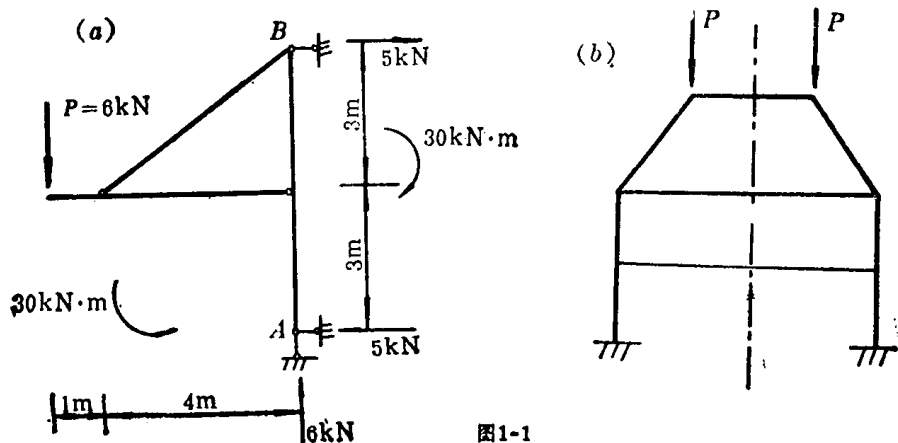


图1-1

计算一个超静定结构，用静力法时，取力作为未知数，可根据位移对位移的协调条件建立力法方程。取位移作为未知数，则可根据力对力的平衡条件建立位移法方程。而它们的方程系数却要由力与位移的物理条件求得。用能量法时，和静力法同样，也是取力和位移作为未知数。并且，静力法、能量法又都存在相应的混合法。但本书主要是采用静力法。各种不同的计算方法，在基本概念和基本原理上虽不相同，而建立方程的根据却都统一在平衡、几何和物理三个条件之中。不论那个方法，建立了方程，即可按步骤和要求运算求解。时常我们称建立方程的过程为结构定性分析。称求解方程的过程为定量分析。实际上它们是不能分隔开的一个全过程。

需要指出，掌握结构定性分析和解题技巧以简化计算是基本计算方法的一个组成部分。但只有吃透必要的有关基本概念和基本原理，解题时才有可能作出合理的定性分析，才能找到解题技巧。这主要体现在结构对称性的利用上，它对静力、动力和稳定计算等都适用。一是设法减少未知数，另一是设法减少方程的副系数。还有结构的结点位移和结点不平衡力矩、楼层不平衡剪力的对应关系；弯矩图和弯曲变形的相应关系；以及杆端力和杆端位移及跨内荷载的关系式等都可用来简化计算。对具有一定特点的结构是如此，对普通常见的结构也应是如此。

例如图 1-1 (b) 结构为对称结构，承受对称荷载作用，只能发生对称位移，不能发生反对称位移，则各结点均相当于不动点。又由于无跨内荷载、无结点外力偶，位移法方程自由项或是结点不平衡力矩均为零，则各刚结点角位移也均为零。根据转角位移方程立刻得知该结构各杆弯矩和剪力均为零，只有轴力。事实上，一个结构无跨内荷载又无结点外力偶，如能确定其结点位移为零，则该结构各杆弯矩和剪力必为零。对此，本书第八章列有四点结论。

就解答的唯一性而言，结构在荷载作用下，只须满足平衡条件便可求得的反力和内力，是静定结构唯一的确定解答。结构在荷载等外因作用下，须同时满足平衡条件和位移条件方可求得的反力和内力，才是超静定结构唯一的确定解答。无论静力计算或动力计算都是如此，即所谓解答的唯一性。

最后还要指出两点：一是计算时一般不考虑杆的轴向变形和剪切变形，考虑弯曲变形也是小变形。因此，杆或结构在变形前后尺寸不变，计算可按原尺寸进行；二是结构为线弹性结构，材料符合虎克定律，则力或位移计算方法的迭加为线性迭加。迭加法为基本方法。

不能不说，学习结构力学，应首先是从概念上和理论上对这个、那个问题和这个、那个计算方法的认识，然后才是方法的分析和计算，最后求得结果。这就是以下各章所要做的。

第二章 平面体系几何构造分析

一、理论知识要点

作几何构造分析，要在充分理解四个名称基本概念的基础上，运用三项组成规则，通过分析简化，对体系或体系中的一些联系，该除掉的除掉、该合并的合并、该代替的代替，最后找出二刚片或三刚片相联情形就可得出结论。

1. 四个名称的含义

(1) 几何不变、几何可变、几何瞬变 体系的形状和位置在外因作用下不发生改变者称为几何不变；发生改变者称为几何可变；体系由几何可变瞬时变成几何不变者称为几何瞬变。

(2) 刚片 凡是本身几何不变的平面刚体或刚体的平面称为刚片。一个梁、一个柱、一个连杆、体系中几何不变部分、与基础连成的几何不变部分和几何不变的整个结构等都是刚片。在几何构造分析中，不考虑杆或结构的弹性变形。视其为刚体或刚片。

(3) 自由度 刚片在平面内自由运动方式称为刚片的自由度。确定刚片自由运动方式所需要的独立坐标数称为刚片的自由度数。

(4) 联系(约束) 减少刚片自由度的装置称为联系。联系有三种，它们是减少一个自由度，传递一个力的连杆；减少两个自由度、传递两个力的铰；减少三个自由度、传递三个力的刚性联结。

2. 三项规则

(一) 二刚片相联 所用三个连杆既不能平行也不能交于一点，包括一个连杆一个铰不能在一直线上。

(二) 三刚片相联 所用三个铰不能在一直线上，包括六个连杆不能交于一点，两铰连线不能和另两个连杆平行，且要连杆两两相联。

(三) 二元体和一个刚片相联 不是铰结在一条直线上的两个杆称为二元体。二元体和一个刚片相联情形相当于三刚片相联，与规则(二)类同。

3. 几点简化分析方法

(1) 除掉二元体(只两杆的一端和其它刚片铰结)。

(2) 体系内由若干刚片组成的几何不变部分均视为一个刚片。与基础联成几何不变部分可全视为基础。

(3) 用连杆代替刚片，或用刚片代替连杆。

(4) 必要时，添上或去掉一个连杆或几个连杆。

(5) 一体系用三个既不平行也不交于一点的连杆和基础相联, 可只分析体系本身。

如果一个体系不能简化成二刚片或三刚片相联情形, 此处三项规则不适应时则用其他方法分析。

4. 自由度计算公式

$$W = 3m - 2h - r \quad (1)$$

$$W = 2j - b - r \quad (2)$$

该公式只是针对体系组成的必要条件而说的。即 $W > 0$ 表示未满足必要条件, 联系数不足, 有自由度; $W < 0$ 表示满足了必要条件, 但有多余联系; $W = 0$ 表示既满足了必要条件, 又无多余联系。作几何构造分析, 虽然满足必要条件, 但几何组成不一定合理, 即不一定满足充分条件, 还需按几何组成规则进行分析, 最后得出结论。

(1) 式中 m 表示体系中的刚片数, 但不包括基础; h 表示联结刚片的单铰数; r 表示体系与基础联结的支座连杆数。(2) 式主要用于铰接体系, 如桁架等。其中 j 为结点数; b 为体系内连杆数; r 与 (1) 式 r 等同。计算时应注意, 只联结两个刚片的铰称为单铰。联结两个刚片以上的铰称为复铰。把一个复铰所联结的刚片数减去一, 就等于公式 (1) 中的单铰数 h 。

5. 体系的几何组成与静力学特性的相应关系

就充分条件说, 几何构造分析结论有四种, 即几何可变体系、有或无多余联系的几何不变体系、几何瞬变体系。它们的静力学答案不同。此处从几何组成与力学性质区分开静定结构和超静定结构。

二、题例分析

例2-1 设图2-1中左、右水平杆为刚片 I、II, 基础为刚片 III。其中 ABC 部分和 CDE 部分只在两端铰结刚片, 相当于连杆, 可用连杆代替。由图可见, 此为三刚片相联情形。由于三铰 (1·2)、(1·3) 和 (2·3) 不在同一直线上, 故该体系为几何不变, 且是无多余联系的体系。

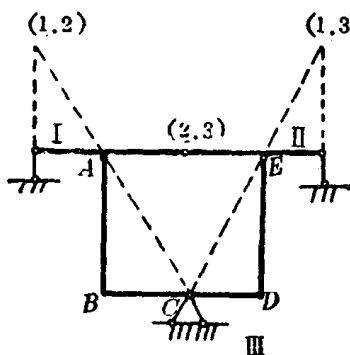


图2-1

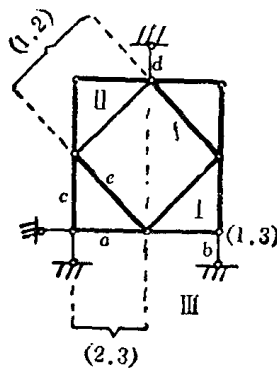


图2-2

例2-2 如图2-2所示体系，撤掉二元体（不撤掉也行），则 a 和 b 杆联结刚片 I、II， c 和 d 杆联结刚片 II、III， e 和 f 杆联结刚片 I、III。此也为三刚片相联。由图可见，该体系几何不变，且无多余联系。

例2-3 图2-3中连杆 a 和 b 两端分别铰结刚片 I、II，连杆 c 和 d 两端分别铰结刚片 II、III。此体系本身也为三刚片相联，如图中三铰在一直线上，必为几何瞬变。否则，几何不变。再由四个连杆和基础相联，必有一个多余联系。用自由度第一个公式计算，得 $W = 3 \times 7 - 2 \times 9 - 4 = -1$ 。公式中单铰 h 只是体系本身各刚片或各杆之间互相联结所用的铰，不包括与基础联结用的铰。

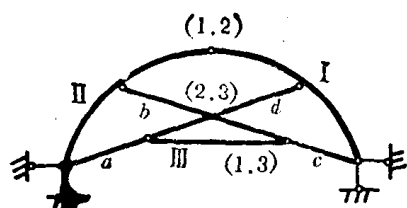


图2-3

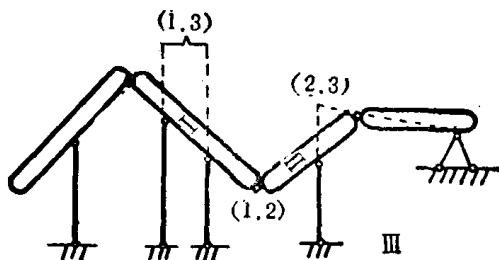


图2-4

例2-4 见图2-4把右边刚片作连杆使用，得三刚片相联情形，由图可见，右边为几何不变。左边只当作二元体。故整个体系为几何不变，且无多余联系。

例2-5 如图2-5所示体系，中间和右边刚片 I、II 与刚片 III 相联为几何不变。左边可同样看作为二元体，故整个体系为几何不变，且无多余联系。

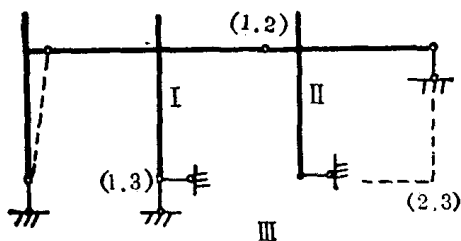


图2-5

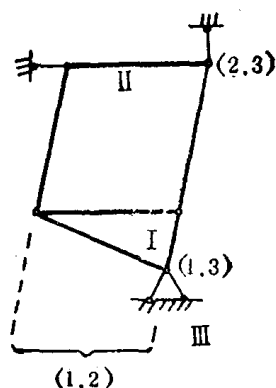


图2-6

例2-6 如图2-6所示体系，两铰联线和另两个连杆平行。相当于三铰 (1·3)、(2·3) 和 (1·2) 在同一直线上，故为几何瞬变体系。

例2-7 图2-7所示体系中， a 和 b 杆联刚片 I、II， c 和 d 杆联刚片 II、III。显然，三铰 (1·3)、(1·2) 和 (2·3) 不在一直线上，几何不变，无多余联系。

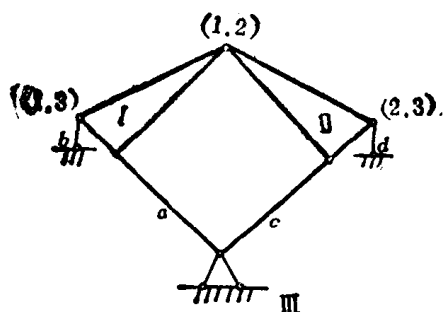


图2-7

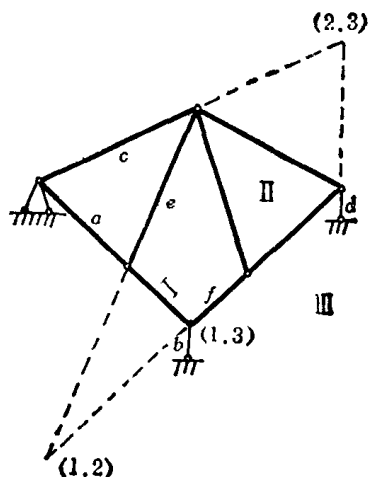


图2-8

例2-8 把上例体系中下边一个支承连杆移到左边，即为本例体系图 2-8。但几何构造分析方法大不相同。 a 和 b 杆联刚片 I、II， c 和 d 杆联刚片 I、II， e 和 f 杆联刚片 I、II。六个连杆交成的三个虚铰(1·2)、(1·3)和(2·3)不在一直线上，仍得几何不变体系，无多余联系。如用求自由度公式计算均得 $W = 0$ 。

例2-9 见图 2-9 所示体系，视左右两边几何不变部分为刚片 I、II，它们都和基础刚片 III 相联，由图分析可知，几何不变，有一个多余联系。

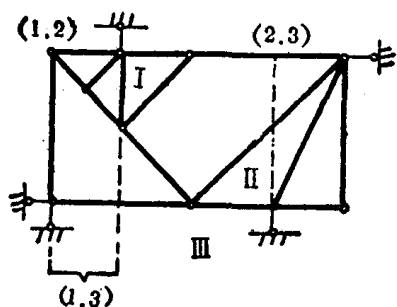


图2-9

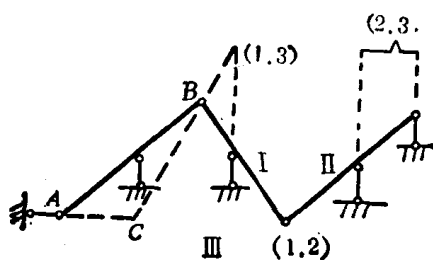


图2-10

例2-10 图 2-10中 AB 杆由水平连杆和竖向连杆交成的虚铰 C 与基础相联，则可视 CB 为代替 AB 杆的连杆。由图可见，联结刚片 I、II、III 的三个铰(1·2)、(1·3)和(2·3)不在同一直线上。故为几何不变，且无多余联系。

例 2-11 由图 2-11观察可知，中间四个竖向连杆平行且等长，必为几何可变。如平行不等长必为几何瞬变。根据图示分析可以得知，三刚片用三对平行连杆两两相联，三个虚铰均在无限远时，不是几何可变就是几何瞬变。

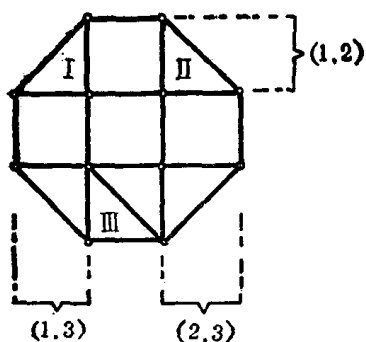


图2-11

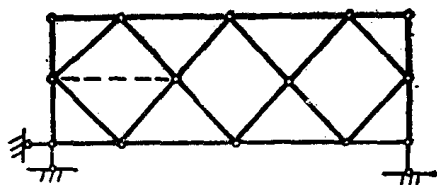


图2-12

例 2-12 图 2-12 所示体系，在添上一个连杆（虚线）后，则符合二元体组成规则。故原体系少一个连杆，为几何可变。由自由度公式（2）计算得

$$W = 2 \times 14 - 24 - 3 = 1 \quad \text{可知有一个自由度。}$$

例 2-13 图 2-13 的体系，在去掉 6 个水平连杆后，则为没有多余联系的几何不变体系。可知原体系为几何不变，具有 6 个多余联系。

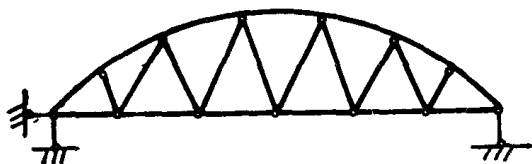


图2-13

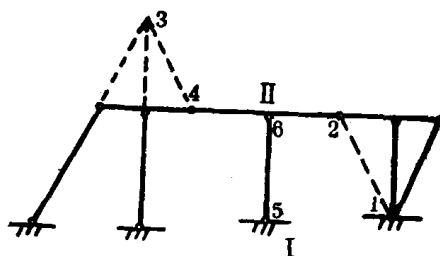


图2-14

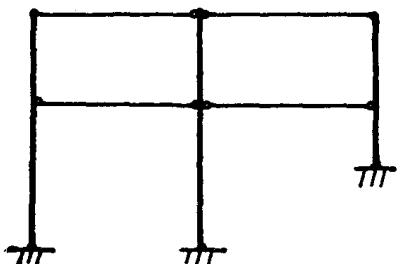
例 2-14 设图 2-14 所示体系基础为刚片 I，中间水平杆为刚片 II。右侧三角形可用连杆 1 2 代替，左侧水平杆由两个连杆交成的虚铰 3 与刚片 I 相联，同理可用连杆 3 4 代替。再加上连杆 5 6，可知二刚片 I、II 相联，所用三个连杆既不平行也不交于一点，则几何不变且无多余联系。由自由度公式（1）计算得

$$W = 3 \times 3 - 2 \times 2 - 5 = 0$$

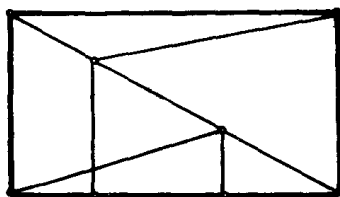
三、习题及答案

习题：

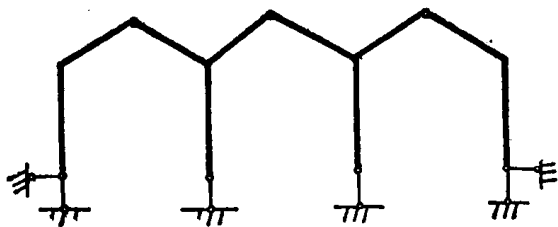
题 2-1~2-5 中试对图示体系作几何构造分析，说明分析方法，得出最后结论。



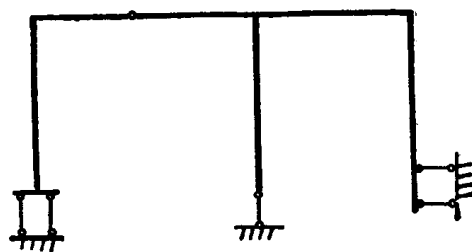
题2-1



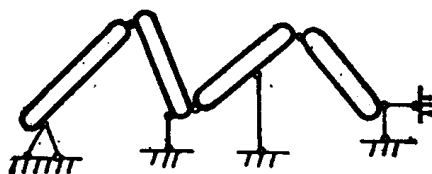
题2-2



题2-3



题2-4



题2-5

题2-1~2-5

部分答案:

题2-1 几何不变, 有一个多余联系。

题2-2 几何不变。

题2-3 几何不变。

题2-4 几何不变, 有一个多余联系。

题2-5 几何不变。

第三章 静定梁 静定刚架 三铰拱

一、理论知识要点

静定结构基本特征和特性是构造上没有多余联系，静力上其全部反力和内力只用静力平衡方程式即可确定。静定结构的一般特性是支座移动、温度改变以及荷载等引起的位移都不能使它产生内力，只有荷载的作用才产生内力。

1. 树立平衡观念

一个结构是平衡的，则其各部分都平衡，故可充分并灵活运用 $\sum X = 0$ 、 $\sum Y = 0$ 、 $\sum M = 0$ 三个方程式。整个结构、任何一个隔离体、基本部分和附属部分等等，都必须同时满足这三个平衡方程式。也就是平面内任何一个方向的合力均为零。

2. 内力在数值上的定义

(1) 弯矩 截面一边所有外力（包括反力），对该截面的力矩代数和就等于该截面的弯矩。规定弯矩图必须画在杆的受拉一边，不标正负号。

(2) 剪力 截面一边所有外力（包括反力），对平行于该截面的投影的代数和就等于该截面的剪力。剪力使所在截面隔离体顺时针转向者为正剪力，反之为负。剪力图必须注明正负号。

(3) 轴力 截面一边所有外力（包括反力），对垂直于该截面的投影的代数和就等于该截面的轴力。通常以离向截面的拉力为正，反之为负。轴力图也必须注明正负号。

凡是截面内力都成对地出现，大小相等方向相反。内力定义表明截面内力处于平衡状态，故可根据截面一边受力情况确定内力（应当说，此处所说内力系指内力图内力，并非材料抗力）。

3. 对称性利用

对称结构受对称荷载作用时，反力对称、内力对称、变形对称。对称结构受反对称荷载作用时，反力、内力和变形都反对称。对称性的利用可使计算工作得到简化，并有助于受力分析。

4. 平衡力的性质（满足平衡方程的作用力）

平衡力作用在静定的几何不变部分，反力为零，且只在该几何不变部分产生内力和变形。其余部分无内力，杆无变形。

5. 基本部分和附属部分

与基础联成几何不变部分者称为基本部分。基本部分受力直接传给基础。本身的几何不

变靠基本部分或再靠基础来保证者称为附属部分。附属部分受力要通过基本部分传到基础，故须先计算附属部分，求得联系力（或反力）后反方向作用在基本部分的原处，再计算基本部分。并且，一般说来，结构的静力分析与结构的几何组成密切相关，故分析受力比较复杂的结构要和几何组成联系起来。

6. q 、 Q 、 M 之间的微分关系

q 、 Q 、 M 三者微分关系是判断和作内力图的基础理论。因为杆的任一点内力变化率为 $\frac{dQ}{dx} = -q$ ， $\frac{dM}{dx} = Q$ ， $\frac{d^2M}{dx^2} = -q$ 。可见，沿杆长的内力变化规律为：

$q=0$ Q 图为常数， M 图为一次式。

q 为常数 Q 图为一次式， M 图为二次式。

q 为一次式 Q 图为二次式， M 图为三次式。

7. 内力图的具体作法

以迭加法作弯矩图为例。

（1）求得反力后，求控制截面的弯矩 控制截面主要是杆端，也包括集中荷载作用点、集中力偶作用截面两侧和均布荷载端点等。

（2）根据弯矩定义求控制截面的弯矩 从计算角度说，一个截面的弯矩是由该截面一边的荷载和反力产生的，与另一边的荷载和反力无关，无需考虑另一边。

（3）将求得的弯矩值用纵标标注在截面受拉一边 杆跨内（或一段内）无荷载时则联实线；有荷载时联虚线（基线），然后再把相应简支梁（同样杆长、同样荷载）的弯矩图迭加上去。同号弯矩（均使杆一侧受拉）画在基线两侧（纵标迭加），异号弯矩（使杆两侧受拉）画在基线一侧（纵标迭减），则 M 图即告完成。这实际上就是杆端弯矩和杆跨内荷载分别产生的弯矩图的迭加。必要时，可作数值上的校核和变形上的鉴别。

（4）注意铰本弯矩永远为零 被铰联结的杆端有外力偶作用时，该外力偶即为该杆端弯矩。无外力偶作用时，其杆端弯矩永为零。

（5）注意杆的弯曲变形与画在受拉一边的弯矩图相对应 弯矩图为零的直杆（包括两端为铰、跨内无荷载的二力杆）永无弯曲变形，永为直杆。

通常，静定结构的 Q 图和 N 图由已知反力作出。此时，按内力定义计算剪力和轴力时，要注意投影方法和正负号，特别是斜杆。当然，也可根据 M 图作 Q 图、根据 Q 图作 N 图。即对已作出的 M 图取杆为隔离体，按平衡条件求出杆端剪力以作 Q 图。对已作出的 Q 图取结点为隔离体，按平衡条件求出杆端轴力以作 N 图。

8. 拱和梁主要区别

两者区别是拱在竖向荷载作用下除竖向反力外，还产生水平反力，以减小弯矩。

（1）拱的反力和三个内力求法按一定公式。

（2）特定荷载作用下弯矩为零的拱轴称为合理拱轴。如均布荷载的 M 图为二次抛物线，故合理拱轴为二次抛物线。再如径向均布荷载时，半圆为合理拱轴。

（3）在各截面上三个内力的合力作用点的连线称为压力线。即压力所走的路线。常为