DFT·NTT·DWT

高等学校教学参考书

离散正交变换导论

李金宗 编

DCT DFT DWT DST KLT

高等教育出版社

离散正交变换导论

李 金 宗 编

高 等 教 育 出 版 社

内 容 提 要

本书论述离散傅里叶变换、数论变换、离散沃尔什变换、离散广义变换、离散余弦变换、离散哈尔变换和离散斜变换等各类离散正交变换的理论、快速算法和应用方法。说明和比较了各类离散正交变换在某些新技术领域的应用。

本书注重于基础理论和基本方法，有较多的实例，易于理解和接受，可用作电子类、计算机类、自动控制类和自动化等各专业高年级学生和研究生的教学参考书，以及从事人工智能、专家系统、图象处理、系列图象分析、模式识别和新一代计算机等技术领域的科技人员参考。

责任编辑　王忠民

高等学校教学参考书
离散正交变换导论
李金宗　编
•
高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
河北省香河县印刷厂印装
•
开本 850×1168 1/32　印张 12.75 插页 1　字数 300 000
1989 年 6月第 1版　1989 年 6月第 1 次印刷
印数 0001—
ISBN7-04-001029-1/TM·108
定　价3.55　元

前　言

本书从理论推导到实际应用，系统而有重点地论述了各类离散正交变换。这些数字变换在数字处理技术的不同领域中有广泛而重要的应用。全书除少量内容外，均是在离散的领域中论述，即使那些必须涉及的模拟领域的内容，也是为了推演到离散的领域，以便易于理解和接受。

数字处理技术是利用数字运算对信号实现滤波、调制、解调等功能的手段以及数字变换处理方法的总称[1]*。基本上讲，数字处理技术可概括为两项：一是数字滤波，二是数字变换。同时，数字变换又是数字滤波中的基本技术。因此，数字变换处于非常重要的地位。

数字处理技术源于十七、八世纪的数学原理。但是，只有在数字计算机和集成工艺高度发展情况下，它才发展成为一门新的学科。尽管它作为一门学科的出现，仅不过十多年的历史，由于它的高精度、高速度、高稳定性、易于集成化等特点，已经发展成为现代科学技术各领域中不可少的新技术。

随着人工智能、专家系统、图象处理、系列图象分析、模式识别、以及从图象序列中提取三维目标信息等新学术领域和处理技术的迅速发展、逐渐成熟、愈益广泛的应用，对离散正交变换不断提出新的越来越高的要求。近年来由于硬件，特别是由于软件技术的发展，促进了新一代计算机的出现，为适应更高要求的离散正交变换之实施提供了新的条件和可能[11,12]。因此，对离散正交变

* 前言中参考文献，排放在第一章之后。

换的研究越来越深入，甚至迫使人们不得不创造新的变换或变种(见第一章附录1)。例如，在系列图象分析这一崭新的边缘技术科学中，如何高效率地处理一幅幅序列图象的大量原始数据，高保真度的传递有用信息，同时缓和对硬件的要求，这对于卫星和其它有特殊使命的航空器，是非常重要的。这就不得不研究更有效的处理方式和更适合的数据变换方法。因此，在离散正交变换领域中出现了一些新变换[9,13]。

从上面的论述，可以得到这样的结论，系统而深入地研究离散正交变换的基础理论和最基本的应用方法，以便在实际处理系统中灵活运用，是非常必要的。本书就是试图把离散正交变换置于坚实的理论基础上，并由此谋求快速算法，适应实时处理和变换自身不断演变的需要。

全书共分十二章，第一章，绪论，简介后续各章所需要的基础知识，阐述正交函数系和广义傅里叶级数及其完备性和封闭性等概念，导出线性移不变系统的卷积和公式和频域表达式。如何快速计算卷积和是本书的中心议题。第二章至第十一章，分别组成三大部分，重点论述离散傅里叶变换(DFT)、数论变换(NTT)和离散沃尔什变换(DWT)。三部分内容既相关又自成体系。在章节安排上，注意到由易到难。为了理论阐述上的简便、易于理解，内容上还有所穿插。例如，把二维DFT及其应用安排在第八章，与二维NTT一并研究。同时，为了避免重复，把某些与实际处理系统息息相关的问题，也安排在一个部分里论述。例如，如何用离散正交变换计算实(整)数的、复(整)数的、二维的直线卷积，以及如何用二维变换实现一维长序列的直线卷积，也都安排在第八章。用NTT中的费马数变换(FNT)进行研究，这是因为在FNT中，有更特殊的参数选择问题，因此，用FNT研究如上的一些问题，涉及到更多的技术，更易于深入。显然，所得到的结论和方法，可以

类似地应用于其它的变换。在离散沃尔什变换中，给出了沃尔什谱的概念及其快速算法。第十二章论述其它各种离散正交变换，例如，广义变换，哈尔变换，斜变换，余弦变换，最佳变换，基底受限变换等。但是，仍不能说把所有的离散正交变换都收集在内了，特别是在实际应用中不断出现的新的变种，是不可能尽收无遗的。但是，研究的目的在于建立基础理论和基本方法，以便于灵活运用。为了便于论述和比较，同时，为了缩短篇幅，把某些应用技术也放在第十二章内，主要有数据压缩(图象处理)、广义维纳滤波和模式识别等处理技术。读者不难把离散正交变换的应用推广到更多的方面。

如前文所述，本书重于基础理论和基本方法。对于那些在现有的书籍文献中少见的方面，特别地给出了较详细的推导或证明。在内容取舍上，力图系统性。例如，在 DFT 的性质中，从循环逆像序列的 DFT，复共轭序列的 DFT，循环(圆)位移序列的 DFT，直到循环卷积特性，有意构成了一个完整的理论系统。在数论基础知识的选材上，除满足数论变换的需要外，为照顾理论上的系统性，有意收进某些定理和公式，以便于接受必要的概念。从 FFT 的数学原理到蝶形运算公式及其应用，构成一个系统的研究方法。

循环卷积特性是构成各类变换结构和逆变换结构的基本出发点。本书让读者认识了 DFT 的变换结构之后和引出 NTT 的变换结构之前，导出具有循环卷积特性的变换结构和逆变换结构的一般形式，这就给从事此方面研究工作的读者提供一个基础。这里指出，在 DWT 中，相应于循环卷积特性的，是并无位移/卷积特性，后者在第十章中有论述。

随着现代处理技术的发展，对计算速度的要求越来越高。本书正是以实现快速算法的计算速度为线索。在 DFT 的快速算法

FFT中，由于权因子 W_N 是复指数函数，不可避免的要有复数乘法，限制了计算速度的提高。在 NTT 中，以整数 α 代替了 W_N，特别是当 α 为 2 的幂时，乘法变成了移位操作，计算速度可以大大提高。而在 DWT 中，由于变换矩阵均由 +1 和 −1 组成，完全消除了乘法运算(除 $1/N$ 因子外)，可以实现更高的速度。并且，节省了存贮单元。理论上，运算的精度也是按上述顺序逐步提高的。但是，应该提出，由 DFT、NTT 到 DWT，涉及的问题越来越多，难度越来越大。这正符合由易到难的原则。

基于数学理论上导出的一套基 2、基 r 和混合基 FFT 的蝶形迭代运算公式(见第四章)，可以完全概括各类快速算法，易于掌握，易于编程，扩大了选择变换参数的灵活性。并且，可以稍加修改，用于 NTT、DWT 等其它变换的快速算法中(书中相应章节给出了应用实例)。因此，这套蝶形迭代公式具有异常重要的价值。

书中某些内容，是编者在研究工作中一点点积累起来的。例如，FFT中的蝶形公式的导出，并应用于基3、基4FFT 算法，获得了与其它方法完全一致的结果，最近使用混合基 FFT 蝶形公式中的两种类型，对 $N=36$ 点，获得了基 2·3 的两张流图(图 4.19、图4.26)，探讨了涉及到的关键技术，例如，混合基 FFT 的整序方法和权函数指数的确定方法(见表4.3～4.9)。如前所述，修改FFT中的蝶形公式，可以获得 NTT、DWT 等快速算法的蝶形公式，实例证明(见第八章第四节例8.1)结果是正确的。除此之外，为数论基础知识中的某些性质、公式和定理给出了新的证明，修改FFT的流图用于 FNT，例如图 8.2，以及快速沃尔什变换的两张流图(图 11.4、图11.9)等内容。另外，为了前后呼应，对沃尔什函数，还给出某些新的符号表示其定义式。

本书是在给大学本科高年级学生两次选修课的讲稿基础上，于1984 年成稿，1987 年又进行了修改和补充。

由于编者水平所限，错误在所难免，请广大读者批评指正。

我在教学和编写过程中，得到刘永坦教授和张乃通教授的支持，谨表谢意。

编　　者

一九八七年七月

目　录

第一章 绪 论

本章的目的是为后续各章做准备。为此，简要介绍信号与序列，线性移不变系统，连续时间函数的抽样(取样定理)和恢复(插值公式)，正交函数系和广义傅里叶级数及其完备性、封闭性等重要概念。特别地导出了描述线性移不变系统的卷积、公式和频域表达式。如何快速计算卷积和是本书的中心议题之一。在本章中涉及的卷积和公式，数学上称为直线(线性)卷积。为了深入理解卷积和公式，在本章最后一节给出了直接计算卷积和的方法以及矩阵形式的计算公式(见 1.33 式和 1.34 式)，本章附录 2 中还给出了有关的 PASCAL 程序。

第一节 信号与序列

信号被定义为传送信息的函数，其自变量通常被理解为时间，虽然有时它并非是时间。例如，一幅图象的二维空间。对于一维的信号，通常用 $x(t)$ 表示，这是指模拟信号或连续时间信号。

序列被用来表示离散化的信号。信号序列可以是一维的，也可以是二维的，甚至是三维的或者更多维的。例如，一个离散化的三维图象序列，这个第三维可能是离散化的时间，也可能是离散化的第三维空间[9]。为了便于说明一些概念，以一维的信号序列为例，常用 $x(n)$ 表示。若信号仅在时间上离散化了，则称 $x(n)$ 为离散时间信号序列。若信号不仅在时间上，而且在幅度上也离散化了，则称 $x(n)$ 为数字信号序列。在某些文献[2,8]中，$x(n)$ 被用来表示数字信号序列，而用 $\tilde{x}(n)$ 或 $x^*(n)$ 等表示离散时间信号序列。在本书中，为了方便，统一用 $x(n)$ 表示离散时间信号序列和数字信

号序列*。

为了由 $x(t)$ 获取 $x(n)$，可以在 $t=nT$ 的一系列时刻上，对 $x(t)$ 均匀采样，如图 1.1 所示。其中，n 为整序数，T 为采样周期。采样过程可用下式描述

$$x(n)=x(t)\big|_{t=nT}=x(nT) \tag{1.1}$$

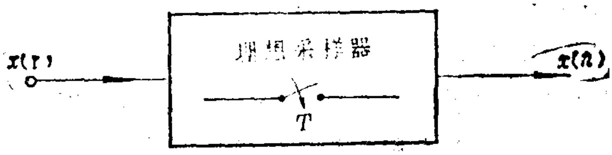


图 1.1 连续时间信号的采样

图1.2 给出了模拟(连续)信号、离散时间信号序列和数字信号序列的图示。

在下面的例子中，给出两个最基本的信号序列——单位样本序列和单位阶跃序列。这两个序列在数字信号处理的领域中有很重要的应用。

例 1.1 单位样本序列和单位阶跃序列

(一) 单位样本序列

如图 1.3 所示，单位样本序列 $\delta(n)$ 定义为

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases} \tag{1.2}$$

(二) 单位阶跃序列

如图 1.4 所示，单位阶跃序列 $u(n)$ 定义为

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geqslant 0\\ 0 & n<0\end{cases} \tag{1.3}$$

---

* 在数论变换中，$x(n)$ 表示数字信号序列；其余部分，$x(n)$ 均表示离散时间信号序列。

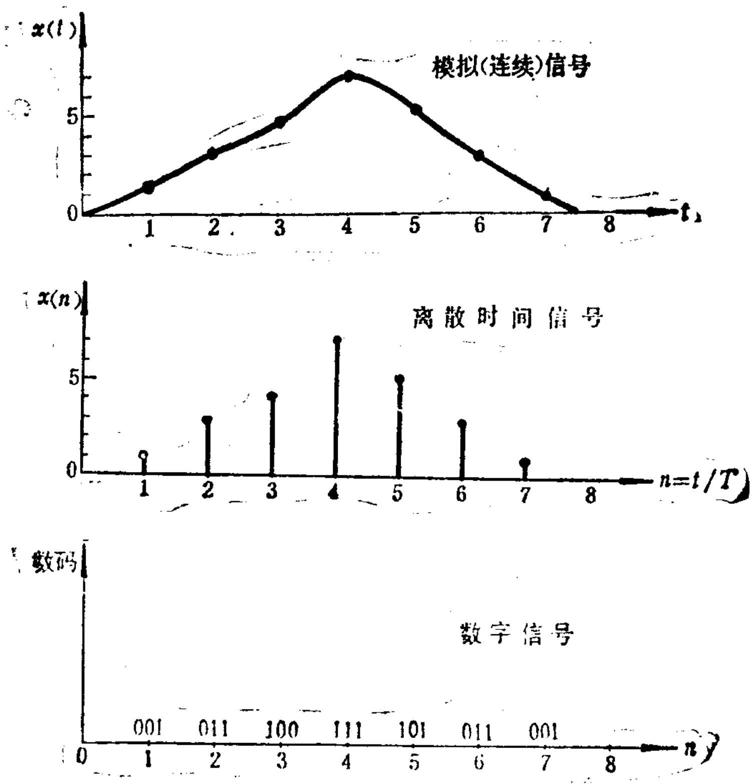


图 1.2 信号与序列

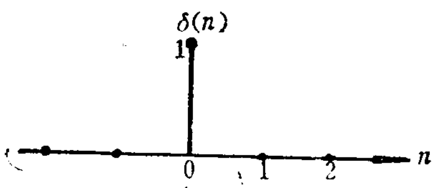


图 1.3 单位样本序列 $\delta(n)$

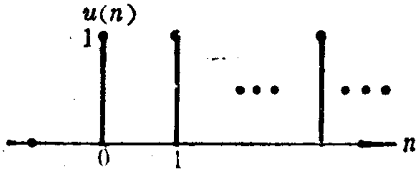


图 1.4 单位阶跃序列 $u(n)$

不难理解单位样本序列 $\delta(n)$ 和单位阶跃序列 $u(n)$ 存在下列关系

$$u(n)=\sum_{-\infty}^{n}\delta(k) \tag{1.4}$$

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1) \tag{1.5}$$

$u(n-1)$ 是延迟(向右位移)一个单位采样时间的单位阶跃序列。

若用 $\delta(n-k)$ 表示向右位移 k 个单位采样时间的单位样本序列,则对任何序列 $x(n)$ 都可表示为:

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k) \quad x(n)*\delta(n) \tag{1.6}$$

第二节 线性移不变系统

(一) 概念

在数字信号处理中,系统被定义为把输入序列 $x(n)$ 映射成输出序列的唯一变换或运算符[1]。图1.5给出了数字处理系统的示意图。

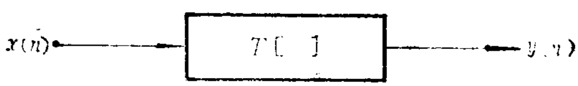


图 1.5 系统示意图

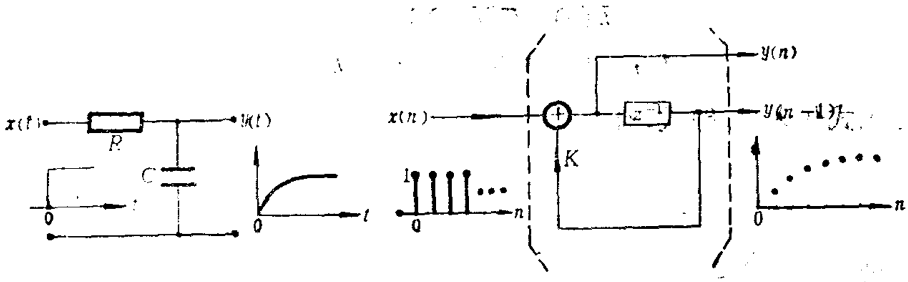
由图可见

$$y(n)=T[x(n)]$$

在下面的例 1.2 中,给出了模拟领域中的积分器和数字领域中的积分器的图示(见图 1.6)。由图1.6 可见,数字领域中的积分器系统是由加法器、延时器和乘法器等构成。

例 1.2 积分系统[2]

线性系统是能满足迭加原理的一类系统,即可用(1.7)式描述的系统。



连续系统←—积分器—→数字系统

图 1.6　一个实际的系统

$$
\begin{aligned}
T[ax_1(n)+bx_2(n)] &= aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)] \\
&= ay_1(n)+by_2(n) \qquad (1.7)
\end{aligned}
$$

令线性系统对 $n=k$ 处出现的单位样本 $\delta(n-k)$ 的响应为 $h_k(n)$，则对序列 $x(n)$ 在 $n=k$ 处的样本 $x(k)$ 的响应为 $x(k)\cdot h_k(n)$。即

$$h_k(n)=T[\delta(n-k)]$$

$$
\begin{aligned}
T[x(k)] &= T[x(k)\delta(n-k)]=x(k)T[\delta(n-k)] \\
&= x(k)h_k(n)
\end{aligned}
$$

据(1.6)，(1.7)两式，有

$$
\begin{aligned}
y(n) &= T[x(n)]=T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k)\right] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)T[\delta(n-k)]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h_k(n) \qquad (1.8)
\end{aligned}
$$

线性移不变系统：若系统对 $x(n)$ 的响应为 $y(n)$，对 $x(n-n_0)$ 的响应为 $y(n-n_0)$，则称为线性移(时)不变系统。即线性移不变系统可用下列式子描述。若

$$y(n)=T[x(n)]$$

则

$$y(n-n_0)=T[x(n-n_0)]。$$

(二) 卷积和公式

对线性移不变系统，若输入是单位样本序列，则有