概率论及数理统计

周晓中　邹德成　编

黑龙江人民出版社

概率论及数理统计

周晓钟　邹德成　编

黑龙江人民出版社

1983年·哈尔滨

责任编辑：田兆民

封面设计：何　茜　王　侨

概率论及数理统计

周晓钟　邹德成　编

黑龙江人民出版社出版

（哈尔滨市道里森林街42号）

延边新华印刷厂印刷　黑龙江省新华书店发行

开本787×1092毫米 1/32・印张 17 14/16・字数358,000

1983年3月第1版　1983年3月第1次印刷

印数1－10,100

统一书号：13093・65　定价：1.55元

前　言

概率论及数理统计是从数量侧面研究随机现象规律性的数学学科，是近代数学的重要组成部分。今天，概率论及其分支的理论和方法已广泛应用于科学的各部门、工农业生产和经济管理之中。学习概率论及数理统计的基本理论和方法已成为自然科学工作者、教师及管理人员的重要任务。

目前，我国不但高等学校理科、工科和医科的许多专业开设了概率论及数理统计课程，而且中等专业学校的许多专业和全日制普通中学也都在教学计划中列入了概率论及数理统计的基本原理和基本方法。本书编写的目的就在于为广大中学数学教师和大专院校理工科学员提供学习参考用书。

本书对概率论及数理统计中最基本的概念、定理和公式作了较为全面的介绍，并尽量给以严格的数学证明。论证当中，除假定读者具有微积分的知识和线性代数以及集合论的简单知识外，避免了使用较高深的数学知识。书中概率论部分由周晓钟编写，数理统计部分由邹德成编写。

由于水平所限，一定存在不少缺点和错误，欢迎读者批评指正。

编　者

1982年10月

目　录

第二篇　数理统计学

第一篇 概 率 论

第 一 章 事件与概率

§ 1 随机试验 随机事件

（一）概率论的研究对象 在自然界中有一类现象，称为随机现象，其特点是：在一定条件下，可能出现的结果不止一个，至于哪个结果出现，事先无法精确断定。例如，从一定的高度向桌子上掷一枚均匀的硬币，可能出现的结果有二：正面向上，反面向上。但究竟哪面向上事前是无法精确断定的。类似的例子还可以举出很多。

对随机现象的一次观察（或测量或观测等）称为一次随机试验，简称试验。在这里，我们是把试验一词作为一个含义广泛的术语来使用的，它包括各种各样的科学试验，也包括对任何随机现象的观察。例如，下列都是随机试验：

(1) 掷一枚硬币，观察哪面朝上；

(2) 记录某电话交换台一分钟内接到的呼唤次数；

(3) 从装有黑白两种球的口袋中任取两球，观察其颜色。等等。

虽然随机现象在一次试验中，其结果具有不确定性，但是，当大量重复同一试验时，随机现象却呈现出一种所谓统计规律性。例如，多次以同一方式掷一枚均匀的硬币时，正面朝上的次数大约占总次数的一半；这是大量重复“掷一枚均匀硬币”这一试验所呈现出来的统计规律性之一。为了验证这点，历史上曾有不少人做过这个试验，结果如下表所示：

实验者	掷硬币次数	掷出正面次数
蒲丰	4040	2048
K·皮尔逊	12000	6019
K·皮尔逊	24000	12012

概率论就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科。

在初等代数学中涉及整数、有理数、实数等的运算；在初等几何学中则经常处理点、线、面之间的关系；在初等概率论中我们要对基本事件、事件等进行运算。

定义 1 可重复试验的每一个可能出现的直接结果，称为这试验的**基本事件**（或称为样本点），全体基本事件的集称为基本事件空间（或称为样本空间）。

例 1 随机试验E_1是掷一枚均匀的硬币。此时可能结果

有二：正面朝上，反面朝上。它们就是E_1的两个基本事件。用$\omega_{正}$表示正面朝上，用$\omega_{反}$表示反面朝上，基本事件空间用Ω表示，则$\Omega=\{\omega_{正},\ \omega_{反}\}$。

例 2 随机试验E_2是连续掷硬币二次（注意，连掷两次现在看成是一个随机试验！）此时，若用$\omega_{正}^{(i)}$和$\omega_{反}^{(i)}$表示第i次掷硬币出正面和反面，则基本事件空间

$$\Omega=\{(\omega_{正}^{(1)},\ \omega_{正}^{(2)}),\quad (\omega_{正}^{(1)},\ \omega_{反}^{(2)}),\quad (\omega_{反}^{(1)},\ \omega_{正}^{(2)}),\quad (\omega_{反}^{(1)},\ \omega_{反}^{(2)})\}.$$

Ω由4个元素组成。

象例1和例2这样只包含有限个基本事件的基本事件空间，称为**有限基本事件空间**。

例 3 随机试验E_3是记录某电话交换台在一分钟内接到的呼唤次数，此时可能的结果可用非负整数表示，故基本事件空间

$$\Omega=\{0,1,2,3,\cdots\}.$$

这个基本事件空间包含无穷多个元素，但这些元素可以排成一列而无遗漏，在数学上，称这空间包含可列多个元素。包含可列个元素的基本事件空间称为**离散基本事件空间**。

例 4 随机试验E_4是测定某种灯泡的寿命x，则结果可以是任何非负数（以小时计算），故任何一个非负数都是基本事件，而基本事件空间可以表示为

$$\Omega=\{x:\ 0\leqslant x<+\infty\}.$$

这空间的元素的个数也是无穷多个，但不能将其元素排成一列而无遗漏，在数学上说这空间是一个不可列集。

例 5　向地面上某目标发射一发炮弹，观察炮弹落地点的坐标。此时若以目标点为坐标原点建立直角坐标系，则地面上（视为平面）任何一点(x, y)均为基本事件，而基本事件空间

$$\Omega=\{(x,y):-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty\}.$$

例 6　（会面问题）两个人 A 和 B 约定在时间 $[0,T]$内见面。如果用 x 表示 A 到达的时间，而用 y 表示 B 到达的时间，则集合

$$\Omega=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant T,\ 0\leqslant y\leqslant T\}$$

是基本事件空间。

例 7　观察作布朗运动的一粒子。此时，所有可能的粒子轨道，是基本事件空间。

由这几个例子，已可看到，由于试验的千差万别，所得的基本事件也是五花八门的，基本事件空间的类型也形形色色。

我们强调指出，基本事件是针对试验而言的。例如，有10 双鞋分属于 10 个不同的号码（设为 1 号鞋，…，10 号鞋），如果试验是“任取一支”，则因取到 20 支中的每一支都是可能的，故“取到 1 号鞋左脚”，…，“取到 10 号鞋右脚”等等二十个结果都是这个试验的基本事件。仍然是这 20 支鞋，但试验是“任取三支”，则上述“取到 1 号鞋左脚”等二十个断语都不是后试验的直接结果，故已不是后试验的基本事件了。后一试验的每一个基本事件是由三支鞋组成的，即每三支鞋放在一起是后一试验的一个基本事件。

当试验结果得到某基本事件时，我们常称该基本事件发

生（或出现）.

除了基本事件外，我们也对与试验有关的其他一些断言是否实现感到兴趣．试看下例．

例 8 试验是掷一个骰子，观察出现的点数．则可能出现的结果是 1,2,3,4,5,6．基本事件空间

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}.$$

但我们也常对另外一些断言感到兴趣．例如，

A：出现的点为偶数；

B：出现的点能被 3 整除；

C：出现的点为奇数．

等等．

例 9 袋中装有 3 件好品，2 件废品，我们依次从中摸出两件产品．好品用 a_1,a_2,a_3 表示，废品用 b_1，b_2 表示，则

$$\begin{aligned}\Omega=\{&(a_1,a_2),\ (a_1,a_3),\ (a_1,b_1),\ (a_1,b_2),\\ &(a_2,a_1),\ (a_2,a_3),\ (a_2,b_1),\ (a_2,b_2),\\ &(a_3,a_1),\ (a_3,a_2),\ (a_3,b_1),\ (a_3,b_2),\\ &(b_1,a_1),\ (b_1,a_2),\ (b_1,a_3),\ (b_1,b_2),\\ &(b_2,a_1),\ (b_2,a_2),\ (b_2,a_3),\ (b_2,b_1)\}.\end{aligned}$$

我们常常需要考虑下列断言：

D：第一次摸出好品；

E：摸出两件好品；

F：摸出两件废品；

G：摸出一件好品和一件废品，

等等．

显然这些断言与基本事件不同之处在于它们是可以分解

的，例如，为了例 8 中的 A 实现必须而且只须基本事件“2”点、“4”点、“6”点之一发生，而为了例 9 中 G 实现必须而且只须下列基本事件发生：

$$(a_1,b_1),\ (a_1,b_2),\ (a_2,b_1),\ (a_2,b_2),$$
$$(a_3,b_1),\ (a_3,b_2),\ (b_1,a_1),\ (b_1,a_2),$$
$$(b_1,a_3),\ (b_2,a_1),\ (b_2,a_2),\ (b_2,a_3).$$

由此可见，例 8、例 9 中的每一断言都对应于 Ω 的一个子集。

鉴于此，我们给出下列定义。

定义 2 设试验 E 的基本事件空间为 Ω，Ω 的子集称为 Ω 的**事件**（也称为 E 的事件），说某**事件发生**，当且仅当这事件所包含的任一个基本事件发生。

按此定义，例 8 和例 9 中的 A，B，…，G 等都是事件。

特别说来，空集 $\varnothing$ 也是事件，全集 Ω 也是事件。

空集 $\varnothing$ 不包含任何基本事件，所以它在每次试验中都不会发生，称之为**不可能事件**；全集 Ω 作为一个事件，因为在每次试验中必然出现 Ω 中的某个基本事件，故 Ω 必然发生，所以常称 Ω 为**必然事件**。

在实际问题中，也可以直接断定某事件是否为必然事件或不可能事件。例如，事件“出现的点数大于 6”是例 8 中试验的不可能事件，而事件“出现的点数大于 0”则是这试验的必然事件。

在概率论中谈到试验时，我们并不关心它的技术方面，而只是关心在这个实验中可能观察到什么样的事件以及在所进行的试验中实际上已观察到了什么事件。如此说来，每一

个试验都联系着一定的某些事件，对于这些事件，可以判断它在该试验中是发生了还是没有。如此的事件称为该试验的**可观测事件**。

如果在例 9 中，我们关心的是事件"摸出两件好品"，则它是这试验的可观测事件。假如，按例 9 的试验结果，要我们判断例 3 中电话交换台一分钟内接到的呼唤次数，则这是办不到的。这样的事件在例 9 的试验中是不可观测的。

（二）事件之间的关系与事件的运算 如上所述，每一个试验都联系到一些它的可观测事件。下面分析这些事件之间的关系。

设试验 E 的基本事件空间为 Ω，而 A，B，A_i，B_i $(i=1, 2, \cdots)$ 是 Ω 的可观测事件。

(1) 如果 A 发生必导致 B 发生，就说 A 是 B 的**特款**，或者说 A **包含于** B，记作 $A \subset B$。

若 A 包含于 B，同时 B 也包含于 A，即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与事件 B **相等**，记作 $A = B$。

根据"事件"、"发生"二术语的意义，A 是 B 的特款等价于 A 是 B 的子集。

检验事件 A 是否为 B 的特款，可以从集合的角度检查 A 是否为 B 的子集，也可以从推理上检查 A 发生是否必导致 B 发生，二者是一致的。例如，因为 A："交换台接到二次呼唤"的发生必导致 B："交换台接到偶数次呼唤"的发生，故 A 是 B 的特款。又如，灯泡的寿命不大于 780 小时则必小于 900 小时，故 A："灯泡的寿命不大于 780 小时"是 B："灯泡的寿命小于 900 小时"的特款。

(2) "A,B 中至少有一个发生"这一事件，称为 A, B 的**和**，记为 $A+B$. 显然这一事件也就是事件:"或 A 发生，或 B 发生". 从集合的角度看，二事件 A, B 的和 $A+B$ 就是它们的并 $A\cup B$. 所以二事件 A, B 的和也称为此二**事件的并**，也记作 $A\cup B$.

类似地，"$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个出现"这一事件称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和，记为

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \quad 或 \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

"$A_1, A_2, \cdots$ 中至少有一个出现"这一事件，称为 $A_1, A_2, \cdots$ 的和，记作 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

在例 8 中，令

A ——出现的点为偶数;

A_2——出现的点为 2,

A_4——出现的点为 4,

A_6——出现的点为 6,

则 $A=\{2,4,6\}$, $A_2=\{2\}$, $A_4=\{4\}$, $A_6=\{6\}$,

故

$$A=A_2+A_4+A_6.$$

在例 3 中，令

A: 呼唤次数为偶数,

A_i: 呼唤次数为 i, $i=0,1,2,\cdots$,

则

$$A=\{0,2,4,6,\cdots,2n,\cdots\},$$

$$A_i = \{ i \},$$

故

$$A = A_0 + A_2 + A_4 + \cdots + A_{2n} + \cdots.$$

在实际问题中，有时可以不必求出事件 A_i, A, B 由哪些基本事件组成而直接找出事件和来。如果 A 发生必须且只须 A_i 之一发生，则按定义，A 就是 A_i 之和。

例 10 试验是飞机向一油库连投 4 弹后，观察是否起火，又知油库被炸中一弹就要起火。

令

B ：油库起火，

$B^{(1)}$：第一弹炸中，

$B^{(2)}$：第二弹炸中，

$B^{(3)}$：第三弹炸中，

$B^{(4)}$：第四弹炸中，

则由于油库起火必须且只须 $B^{(1)}, \cdots, B^{(4)}$ 至少有一个发生，故

$$B = B^{(1)} + B^{(2)} + B^{(3)} + B^{(4)}.$$

例 11 设 E 是由五次射击靶子组成的试验。

令

A_0——一次都没有射中，

A_1——恰好射中一次，

A_2——恰好射中二次，

A_3——恰好射中三次，

A_4——恰好射中四次，

A_5——恰好射中五次，

那么，