

选矿数学模拟及模型

任天忠 编著

中南工业大学出版社

前 言

为了适应选矿技术的发展和选矿教学的需要，我于前几年编写了这本教材，目的在于介绍有关数学模拟方面的基本知识以及选矿方面的数学模型知识。本书曾多次作为我院本科生和研究生的教材，并在教学中不断得到修改和充实。现经过审定正式出版。

本书可作选矿专业教材使用，还可供选矿工程技术人员学习参考。

本书在试用期间曾得到过中南工业大学张国祥教授的热忱帮助，在此表示感谢。

由于编者水平所限，缺点错误在所难免，欢迎读者提出宝贵的意见。

编者于昆明工学院

1987年12月

目录

前言	i
绪论	1

第一篇 数学模拟方法的知识简介

第一章 模型的基本知识	3
§ 1-1 模型	3
§ 1-2 建立数学模型的几种方法	6
§ 1-3 选矿试验最佳次数确定的方法	18
§ 1-4 模型的修正	23
第二章 经验模型	26
§ 2-1 概述	26
§ 2-2 一元线性回归模型式	28
§ 2-3 二元线性模型式和多元线性模型式	48
§ 2-4 一元非线性模型式	62
§ 2-5 一元二次多项式回归模型系数的计算、 最佳条件的推断和最佳指标的预测	75
§ 2-6 多元非线性模型式	78
§ 2-7 曲线的分段拟合及拟合次数的选择	81
§ 2-8 根据统计量的数据选定数学模型式的 初型方法	88
§ 2-9 契贝雪夫法	101

第二篇 选矿过程的数学模拟及模型

第三章 粒度和粒度分离模型	108
§ 3-1 颗粒的粒度及粒度分布	108

§ 3-2 粒度特性及数学描述	116
§ 3-3 筛子模拟模型	122
§ 3-4 水力旋流器的经验模型	127
第四章 粉碎模型	137
§ 4-1 概述	137
§ 4-2 矩阵模型	140
§ 4-3 动力学模型	163
§ 4-4 总体平衡模型	171
第五章 浮选模型	185
§ 5-1 浮选过程的描述	185
§ 5-2 单相浮选动力学模型	186
§ 5-3 浮选速率常数模型	188
§ 5-4 多相浮选模型	193
§ 5-5 总体平衡浮选模型	195
第六章 重选模型	209
§ 6-1 重选物料床层概率-统计模型	209
§ 6-2 分配曲线的数学模型	213
§ 6-3 螺旋选矿机模型	221
§ 6-4 尖缩溜槽模型	224
附表一、 F 分布表	240
附表二、相关系数子检验表	246
附表三、 t 分布的双测位分位数 (t_{α}) 表	247
参考文献	248

绪 论

事物的产生、发展、变化是有规律的。这种规律可以用语言、图象和表格来总结。但总结规律的高级形式是数学表达式或数学模拟式。

牛顿用微积分这种数学表达式表述了他所提出的经典力学的三大定律，把物理现象与数学很密切地联系了起来。牛顿的这一贡献使人们开始认识到用数学方式表达研究结果是最完善、最严密、最有用的形式，也是总结事物变化规律的最理想的形式。

用数学形式来表述力学规律不仅使物理学（包括力学）找到了一种很好的表述形式，而且还使物理学与数学相互渗透，从而促进了物理学的发展。爱因斯坦在谈到这一点时评价说“这或许是有史以来的一个最大的理智步伐。”随着科学技术的迅速发展，数学方法已广泛用于多门学科。

现代设计方法就是通过建立数学模型来进行分析，从而获得最优方案的一种方法。该法在研究数据内在规律的基础上，运用数学语言，对其规律作出描述，也就是建立数学模型，然后利用现代分析技术取得接近动态状况的多变量参数，应用计算机技术进行定量化计算，最后得到最优化方案。

数学模型是其他学科与数学相结合的产物，也是量化的关键一步。一切应用科学包括工程技术科学在内，离开了数学和数学模型方法是不可能发展的。要使选矿这门学科得到进一

步的发展，就要自觉地运用数学所提供的理论、逻辑思维方法与技巧，尤其是要运用数学模型方法。所以说，数学模型是促进选矿学科发展的一个很重要的工具。

本书介绍了建立数学模型的基本方法及优化的基本概念，并联系选矿专业介绍了选矿过程的优化模拟参数的计算方法。

第一篇 数学模拟方法的知识简介

第一章 模型的基本知识

§ 1-1 模 型

一、什么叫模型

在日常生活和工作中，经常遇到模型或用到模型。譬如，儿童玩具模型、建筑模型、飞机模型、绘画模型、选矿厂规划模型等等，这些都是实物形象模型。表示实物的另一种模型是用文字、符号、图表等描述客观事物的某些特征和内在联系的模型，如数学表达式、地图、机械图等属于这一类，这一类模型称为抽象模型。但无论是形象模型还是抽象模型，它都具有如下特点：

- 1.模型是它所研究的客观事物中部分的模仿或抽象；
- 2.模型是由与分析问题有关的各种因素所构成的；
- 3.模型能体现有关因素之间的相关关系。

综上所述，模型是客观现实的一种描述，因此必须能反映实际情况，但它又只是现实世界的一种抽象，所以往往又不同于现实或高于现实。模型对于人类社会生活有着十分重要的意义，特别是对科学研究、生产实际、企业管理，有极其重要的

作用。

二、模型的分类

1. 形象模型: 把现实物体的尺寸加以缩小或放大, 看起来和实际的东西基本相似的实体叫形象模型。例如儿童玩具、教学用的各种模型等。

2. 抽象模型: 它是用符号 (数学符号)、图表等来描述客观事物中各种因素所建立起来的因果关系。它可细分为三种:

(1) 模拟模型: 是用便于控制的一组变量来代表真实事物的特征、通过模拟性的试验来研究实体的规律。例如, 地图上利用等高线或不同的颜色来代表实际的地势的高低; 用线路图来代表真实的电路; 用电路系统去模拟一个力学系统等。

(2) 数学模型: 用字母、数字及其它数字符号建立起来的等式或不等式以及用图表、图象及框图等来描述客观事物的特征及其内在联系的关系式叫数学模型。

(3) 概念模型: 这是一类最抽象的模型, 即在建立事物模型时缺乏资料, 就只能去构思一些因素之间的关系, 建立初始关系表达式, 然后通过局部模拟试验, 确定部分因素, 修正初始模型, 又再进行局部模拟试验, 确定部分因素之间的量的关系, 通过逐步扩展来建立起来的模型。

模拟模型、数学模型、概念模型这三种形式的模型在实际使用时, 经常交替使用, 以取长补短。

以上几类模型中, 我们感兴趣的是抽象模型, 特别是其中的数学模型。例如:

(1) 在力学中描述力、质量与速度之间关系的牛顿第二定律的公式: $F = ma$;

(2) 在匀速运动中的速度、路程及时间的关系 $s = vt$;

(3) 在电学中电压、电流和电阻之间的关系 (欧姆定律)

$$U=RI。$$

上述具有相同的数学形式为:

$$y=kxz \text{ (} k \text{ 为特定的系数, } y、x、z \text{ 为变量)}。$$

上式就是一个最简单的数学模型。只要给模型中的每一个字符赋予确定的物理意义,就能反映出某一客观事物以及各影响因素之间的相关关系。随着数学理论、电子计算机的蓬勃发展,数学模型在各个领域的应用日益受到人们的重视。

三、模型的优点

1.模型比实体容易操作,尤其是要改变一些参数值,在模型上操作要比在现实实践中操作容易得多。

2.对现实系统有时很难或不能作试验,但在模型中调整变量,在计算机中计算结果,就可以解决这个困难,而且模型比现实容易理解一些。

3.有些变量在现实情况中要很长时间才能看出变化规律,但在数学模型上研究时可以很快看出变化规律,从而很快地掌握住本质因素的变化。

4.利用模型研究可控变量与不可控变量之间的关系。能从可控变量中得出一定的结果。

5.通过最佳灵敏度分析,可看出各因素对目的指标影响的大小,分出主次关系。

例如:研究战略核武器杀伤的模型。

在六十年代,世界上有人提出制造亿万吨级的氢弹时,有人却提出应提高导弹的精度,从而引起了争论。对于这个争论就可以通过建立战略核武器杀伤力的数学模型而得出结论。杀伤力 K 不仅与威力 Y 有关,而且与精度 C 有关。经过大量试验表明 K 与 Y 、 C 的关系为

$$K = \frac{Y^2}{C^2}$$

从这个模型可以看出，当新武器的威力增大 8 倍时，即

$$Y^* = 8Y \quad (Y^* \text{ 为新武器的威力})$$

新武器的杀伤力比原来武器的杀伤力提高的倍数为

$$K^* = 4K \quad (K^* \text{ 为新武器的杀伤力})$$

当新的精度比原有的提高 $\frac{1}{8}$ 时，即 $C^* = \frac{1}{8}C$ (C^* 为新武器的精度)，则新精度武器的杀伤力比原武器的杀伤力提高 $K^* = 64K$ 。而且提高精度所耗费的人力、物力、财力比前次要低，所以说提高精度的研究方向是合理的。

§ 1-2 建立数学模型的几种方法

一、建立数学模型的一般要求

1. 建立模型的依据要充分

数学模型式是由样本数据归纳总结分析出来的，而后又以模型式去描述总体、推断总体，因此建立模型的依据必须充分，数据必须可靠。

2. 数学模型要简单

数学模型既要求精确，又要求简单。因为有时太复杂的模型难以求解，就只好降低精确度。此外，要构成一个复杂模型及求解复杂模型都要付出较高的代价。

3. 模型应有足够的精度

数学模型是实践体系的数学关系的反映。研究实践是为了指导和控制最佳指标和过程，所建立的数学模型要对实践有足够的精确度。精确度不仅与研究的对象有关，而且与所处时

间、状态和条件等有关。

4. 模型应尽量借鉴标准形式

在模拟某些实际情况时，如果已经有标准形式模型可借鉴，就可直接利用。因为在数学上这些模型已经有了一整套理论依据，无需另加考证，所以应尽量向标准形式靠拢，或直接引用，以简化模型设计程序。当然对于这些模型在应用时，也要不断地修改和创新。

5. 模型中所表示的系统要能操纵和控制，以便能输入电子计算机中计算各种结果，预测各种因素的变化。

二、建立数学模型的几种常用分析方法

由于客观事物的复杂性及对模型的要求有所不同，所以建立模型的方法也千变万化。建立模型的工作，是技巧与理论的综合，是一种创新的劳动。

现介绍几种方法，以供参考。

1. 直接分析法

当问题比较简单或者比较明显时，可按问题的性质和范围直接作出模型。

例如正方形模型，矩形面积为定值 (C)，周长 L 为最小值时，求边长与面积的关系。

设它的一边长为 x ，另一边长为 y ，则周长 L 为

$$L = 2(x + y)$$

求 L 为最小值时的 x 与 y 。由假定矩形面积为定值 (C)，则有

$$xy = C \quad \text{或} \quad y = \frac{C}{x}$$

则 $L = 2(x + \frac{C}{x})$ ，式中只有一个可控变量 x ， C 为不可控

变量。

利用

$$\frac{dL}{dx} = 2(1 - \frac{C}{x^2}) = 0$$

可解得

$$x = \sqrt{C}$$

代入 y 则

$$y = \frac{C}{\sqrt{C}} = \sqrt{C}$$

要使周长总和 L 为最小时，即四边相等，且边长为 $\sqrt{C}$ ，此题说明，上述数学模型式应满足：

- (1) 有变量及模数；
- (2) 建立条件是在极值条件下；
- (3) 表达式满足周长为最小值；
- (4) 约束条件是变量 $x \cdot y = \text{定值}$ 。

2. 模拟分析法

有些系统模型的结构性质虽然已经清楚，但对这个因果关系的数量描述及求解有困难。如果有另一个系统，其结构性质与研究的系统相似，构造出的模型也相似，处理时也简单得多，这时可以用一种系统的模型去模拟另一种系统的模型。

例 1 最佳厂址的选择问题。要建立一个新的选矿厂就要选择厂址，厂址的选择涉及原矿、厂内产品、最终产品的运输、尾矿的排放及生活资料的运输等。厂址选择的原则之一是使运输费用在一定时期内是最小值。若各种运输费用近似以吨公里来计算，各种运输量在一定时期内已知为 W_i ($i=1, 2, \dots, n$)，这时如何确定厂址的位置呢？

在物理上确定一个物体重心的办法如图 1—1。

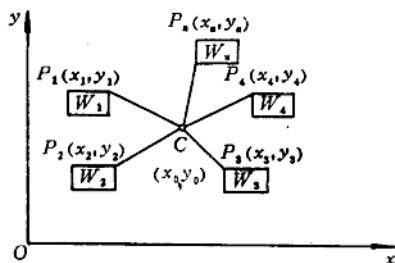


图 1—1 求重心的模拟方法

这时可以利用几何中确定平衡重心点 C 的位置的方法来求解，即

$$C(x_0, y_0) = \text{最小值}$$

$$\begin{aligned} C(x_0, y_0) &= W_1 \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \\ &\quad + W_2 \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + W_n \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \\ &= \sum W_i \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} \end{aligned}$$

求极值即得 $C(x_0, y_0)$ 点的坐标，这就是重心的位置。

$$\frac{\partial C(x_0, y_0)}{\partial x_0} = 0$$

$$\frac{\partial C(x_0, y_0)}{\partial y_0} = 0$$

若给一组 (x_0, y_0) 可以计算得一个重心的坐标, 即 $C(x_0, y_0)$ 为最小的那点。

利用上述原理, 一个选矿厂, 设运输项目有原矿、精矿、尾矿、水、原材料等, 分别为 $W_1, W_2, W_3, W_4 \cdots W_n$ 吨, 运输的距离为 $L_1, L_2, L_3, \cdots L_n$ 公里, 各种运输的吨公里分别为 $W_1L_1, W_2L_2, W_3L_3 \cdots W_nL_n$ 。

设厂址的位置在 L_0 ,

即 $W_1L_1 + W_2L_2 + \cdots + W_nL_n = \text{最小值} = (W_1 + \cdots + W_n)L_0$

则 L_0 即为按运输距离最短考虑, 最佳厂址所在的位置。

例 2 机械运动的电模拟。有很多机械系统、气体动力学系统、水力学系统、热力学系统及电路系统之间某些现象彼此相似, 特别是通过微分方程描述的变量运动的方程有的基本一致。因此往往搞清其中一个系统的运动性质, 也就模拟了另一些系统的运动性质。由于模拟计算机的发明, 利用它来模拟其它系统就更加方便了。

一个质量为 m 长度为 L 的摆(图 1-2), 其摆偏离中心线的角度为 θ , $\theta(t)$ 满足

$$mL \frac{d^2\theta}{dt^2} + mg\theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

显然方程的解是一个以 $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ 为周期的简谐振动, 式中 g 为重力加速度。

再观察由电感 L 和电容 C 组成的一个电路(图 1-3), 在电容中电量 $q(t)$ 满足

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$$

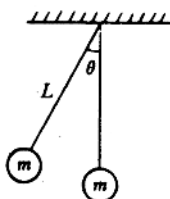


图 1-2

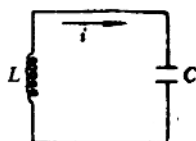


图 1-3

即

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0$$

它的解是一个以 $T = 2\pi\sqrt{LC}$ 为周期的简谐振动，在这两个系统中，对应 $L \rightarrow 1$, $\frac{1}{C} \rightarrow g$ 而 $q(t) \rightarrow \theta(t)$ 即可互相模拟。

3. 数据分析法

有些系统结构性质不很清楚，但是可以通过描述系统功能的数据分析，来建立系统的结构模型。这些数据是已知的，或者可以按需要收集。例如在生产中经常遇到某些选矿产品的质量有问题。造成产品质量差的因素较多，其中有些因素是可控的，有的不可控或是不易控制的，有的不可控或是不易控制的。究竟这些因素与质量指标之间是什么关系，它们分别所起的影响有多大？这时往往用回归分析等数学方法来帮助建立影响质量指标的各种因素的数学模型，并在此基础上进一步分析

一些因素的作用，找出其原因。

表 1-1

试点	pH	捕收剂 用量	ε 回收率
1	8	107	81.3
2	10	107	83.3
3	9	131	91.8
...	...	...	...
n	7	135	80.2

例如在浮选某铜矿时，pH 与捕收剂用量对回收率 ε 的影响如表 1-1。可以利用试验结果建立 pH、捕收剂对回收率 ε 指标影响的因果关式。当然影响回收率的其它因素还很多（如磨矿细

度、浮选浓度、其它药剂种类和用量、浮选机性能等）。建立浮选厂局部的数学模型式，可以根据需要选定主要因素建立关式，其它因素可以认为相对不变或影响较小。

4. 概率统计分析法

概率统计是研究不确定事件发生的“确定程度”的一种方法，或者说是研究随机现象的变化规律（即它的分布密度及分布函数）。通过分析随机变量的数学期望和方差就能正确地建立数学模型式。利用概率统计的知识对随机变量进行分析、整理、确定其规律性，用数学的检验方法确定其可靠性。对不同统计规律的随机变量，可按连续性函数或离散性函数选取分布函数式。

例：确定合理的机器维修人数的问题。

某机械修理车间共有 $m = 20$ 台机器，已知机器的平均损坏速度 $\lambda = 1$ 台/时，而维修人员平均修复机器的速度为 $\mu = 10$ 台/时。一台机器由于待修不能开工引起的损失费每小时为 $C_1 = 180$ 元，而给机修工每小时要付工资 $C_2 = 6$ 元，问这个车间最好保持几个机器维修人员才使总的费用最小？

这时，可以利用雇客源为有限($m = 20$)的普阿松分布来进

行计算。假定有 s 个修理机器的服务台，根据排队论公式可以算得下面二个量：

(1) 机器平均等待修理台数

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) P_n$$

(2) 机修人员空闲的平均人数

$$N = \sum_{n=0}^s (s-n) P_n$$

以上二式中 P_n 是系统中正好有 n 台坏机器的概率(参看图 1-4)，由排队论公式可知

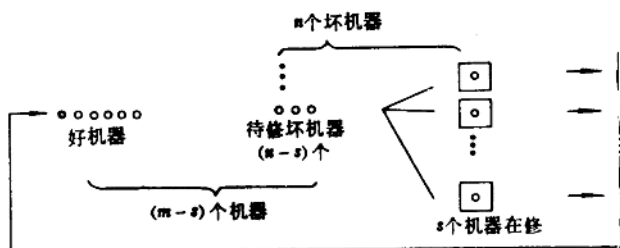


图 1-4

$$P_n = C_m^n \rho^n P_0 \quad 0 \leq n \leq s$$

$$P_n = \frac{n!}{s! s^{n-s}} C_m^n \rho^n P_n \quad s \leq n \leq m$$

$$\text{式中} \quad P_0 = 1 - \sum_{n=1}^m P_n$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$