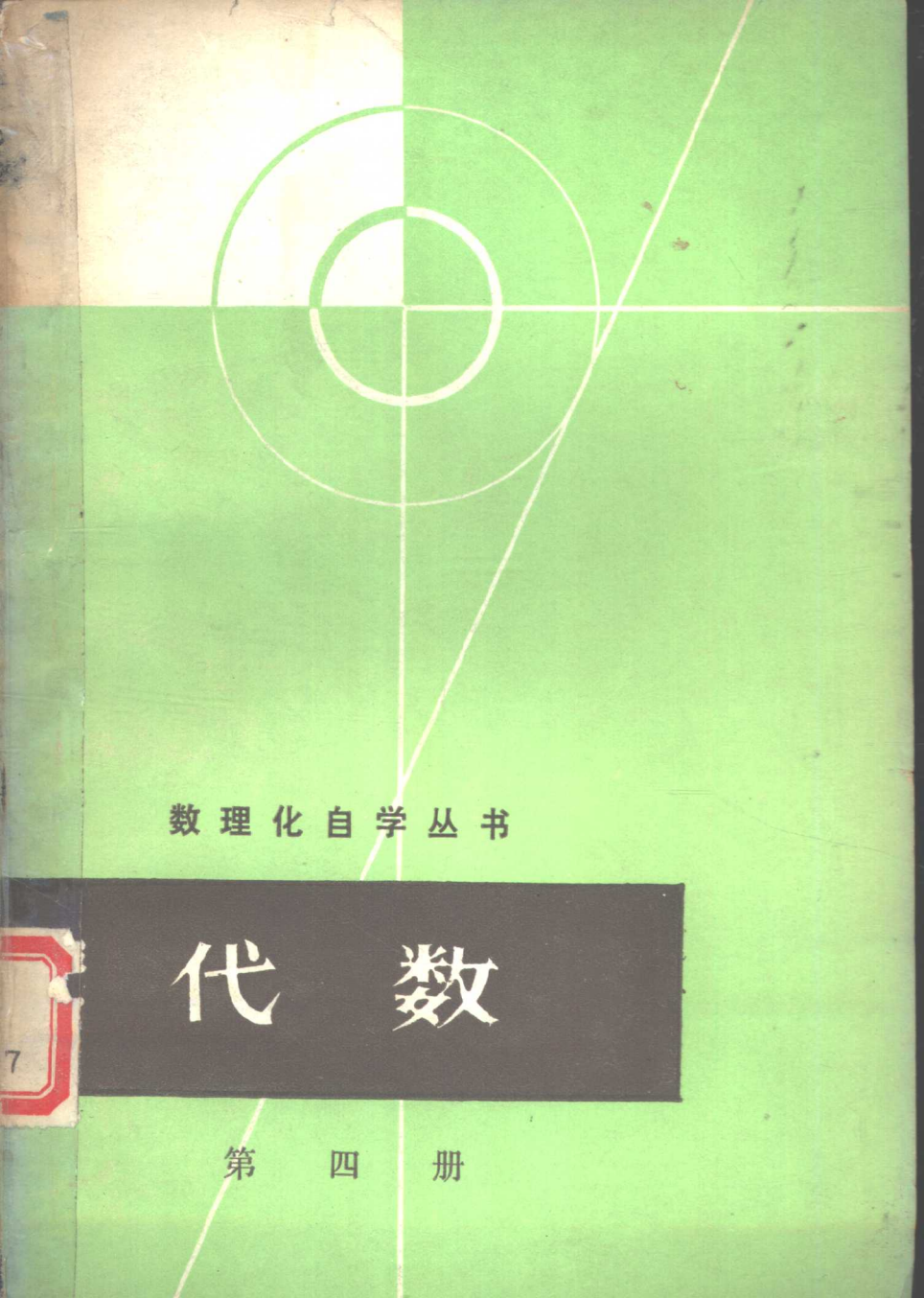




数理化自学丛书

代数

第四册

数理化自学丛书

代

数

第 四 册

数理化自学丛书编委会
数学编写小组编

一九八九年九月

上海科学技术出版社

数理化自学丛书

代 数 (第 四 册)

数理化自学丛书编委会

数 学 编 写 小 组 编

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行 上海市印刷四厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 7.75 字数 170,000

1966 年 6 月第 1 版 1978 年 2 月第 2 次印刷

书 号: 13119·716 定价: 0.49 元

内 容 提 要

本书是数理化自学丛书中的“代数”第四册。在本丛书“代数”前三册的基础上,讲述初等代数的最后一部分内容。全书共分六章,即:排列和组合、数学归纳法、二项式定理、复数、方程论初步、二阶和三阶行列式。书中对于每一章节的难点和重点,皆予强调;配有丰富的例题和习题,并附提示和答案,以助读者深入理解和加强练习。

本书可供青年工人、在职干部、知识青年自学之用,也可供中等学校青年教师参考。

目 录

重印说明

第一章 排列和组合1

§ 1.1 排列1

§ 1.2 乘法原则4

§ 1.3 相异元素不许重复的排列7

§ 1.4 全排列10

§ 1.5 加法原则11

§ 1.6 相异元素可以重复的排列17

§ 1.7 组合20

§ 1.8 组合数公式22

§ 1.9 组合数的两个性质28

§ 1.10 排列、组合综合应用题33

*§ 1.11 概率35

本章提要39

复习题一40

第二章 数学归纳法42

§ 2.1 归纳推理和演绎推理42

§ 2.2 数学归纳法45

§ 2.3 数学归纳法在证明不等式中的应用53

本章提要57

复习题二57

第三章 二项式定理59

§ 3.1 杨辉三角形59

§ 3.2 二项式定理63

§ 3.3 二项展开式的通项公式69

§ 3.4 二项展开式中系数间的关系73

§ 3.5 $(a-b)^n$ 的展开式77

§ 3.6 二项展开式里各项系数的和79

§ 3.7 二项式定理在近似计算中的应用82

本章提要85

复习题三85

第四章 复数87

§ 4.1 数的概念的扩展87

§ 4.2 复数的概念89

§ 4.3 复数与平面内点之间的对应94

§ 4.4 复数与平面内向量的对应99

§ 4.5 复数的加法和减法107

§ 4.6 复数的乘法113

§ 4.7 复数的除法119

§ 4.8 复数的乘方122

§ 4.9 复数的开方128

本章提要134

复习题四135

第五章 方程论初步139

§ 5.1 多项式 $f(x)$ 的一些重要性质139

§ 5.2 综合除法153

§ 5.3 一元 n 次方程159

§ 5.4 实系数一元 n 次方程168

§ 5.5 有理系数一元 n 次方程	172	§ 6.2 三阶行列式	203
§ 5.6 几种特殊类型的高次方程的解法	181	§ 6.3 子行列式和代数余子式	209
本章提要	191	§ 6.4 三元一次方程组	213
复习题五	193	本章提要	221
第六章 二阶和三阶行列式	196	复习题六	223
§ 6.1 二阶行列式与二元一次方程组	196	总复习题	226
		习题答案	231

第一章 排列和组合

排列和组合是初等代数中的一段独特的内容，是数学里的重要基础知识之一。它对我们解决许多实际问题，以及进一步学习某些数学知识(如概率、二项式定理、行列式等等)，都有着重要的应用。

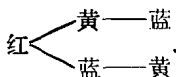
本章将在阐明排列和组合的意义的基礎上，着重学习几种基本的、常用的排列和组合问题的解法。

§1.1 排 列

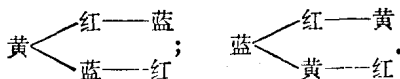
让我们来看下面这几个问题。

问题 1. 用红、黄、蓝三种颜色的小旗，按不同的顺序升上旗竿，用以作出信号。在每个信号里，如果要求这三面小旗都要用到，那末单凭这三面小旗可以作出哪几种不同的信号？

【解】 在这三面小旗中，先取定一面(例如红旗)升上旗竿，这时，第二面旗子就只能在余下的两面中任取一面(要末是黄旗，要末是蓝旗)，第三面旗子就只能用剩下的最后一面旗了。这样就可以作出 2 种不同的信号：



如果第一面旗是取定黄旗或者蓝旗，和上面的讨论一样，可以分别作出 2 种不同的信号：



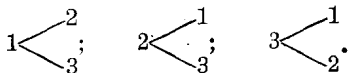
很明显,上面作出的这6种信号是各不相同的,并且,除这6种信号外,不可能再作出其他不同的信号了.由此,我们就找到了这个问题的答案:可以作出上面列举的这6种不同信号.

问题 2. 由数字 1、2、3, 可以组成:

(1) 多少个没有重复数字的二位数?

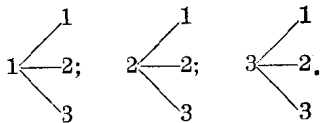
(2) 多少个二位数?

【解】 (1) 我们可以按照先选十位上数字再选个位上数字的顺序,把各个不同的二位数一起列举出来:



由此可知,总共可组成 6 个不同的二位数.

(2) 对于一般的二位数,两个数位上的数字未必不同,因此,当我们选定了一个数字做十位上的数字以后,个位上的数字仍旧可以在这三个数字中任选,所以把这三个数字所组成的二位数一起列举出来便是:



由此可知,总共可组成 9 个不同的二位数.

上面所提出的这两个问题,有着一个共同的特点,它们都可以看成是:从一些元素(旗子、数字)中,每次取出几个元素,按照一定的顺序摆成一排的问题.

从 m 个元素中,每次取出 n 个元素,按照一定的顺序摆成一排,称为从 m 个元素里每次取出 n 个元素的排列.

注意 根据上面这个排列的定义,所给的这 m 个元素和取出的 n 个元素,都不要求各不相同.本书只讨论下面这两种排列:

(1) 从 m 个各不相同的元素里, 每次取出 n 个各不相同的元素的排列[如上面的问题 1 和问题 2 中的(1)都属于这一类型], 以后把这类排列简称为相异元素不许重复的排列.

(2) 从 m 个各不相同的元素里, 每次取出 n 个元素(可以重复)的排列[如问题 2 中的(2)就属于这一类型], 以后把这类排列简称为相异元素可重复的排列.

在考虑排列问题时, 常常把所给的元素顺次编上号码, 用符号 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 来代表. 当元素不多时, 还可以简单地用字母 $a, b, c, d, \dots$; 或者用数字 $0, 1, 2, \dots, 9$ 来表示. 熟练地解这类符号、字母或者数字的排列问题, 可以帮助我们掌握解排列问题的基本方法, 提高解题能力. 在下面的例题和习题里, 列入这类问题的目的就在于此.

例 写出从四个字母 a, b, c, d 中每次取出 2 个字母的所有不同排列, 并要求:

(1) 不许重复; (2) 可以重复,
这种排列各有几个?

【解】 (1) $ab, ba, ca, da,$
 $ac, bc, cb, db,$
 $ad, bd, cd, dc.$

这样的排列有 12 种.

(2) $aa, ba, ca, da,$
 $ab, bb, cb, db,$
 $ac, bc, cc, dc,$
 $ad, bd, cd, dd.$

这样的排列共有 16 种.

从上面的例子中可以看到, 如果两个排列里所含的元素不完全一样, 例如 ab 和 ac , 就是不同的排列; 如果所含的元素完全一样, 而排列的顺序不同, 例如 ab 和 ba , 那末也是不

同的排列.

习 题 1.1

1. 由 1、2、3、4、5 这五个数字所组成的二位数一共有几个? 其中不含重复数字的有几个?

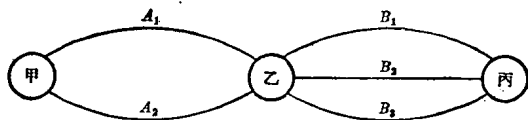
2. 用红色的、黄色的、蓝色的小旗各一面升上旗竿, 以作出信号, 总共可作出多少种不同的信号?

[提示: 作信号时, 可以只用一面小旗升上旗竿, 也可以用二面或者三面小旗按不同顺序升上旗竿.]

§1.2 乘法原则

对排列问题的研究, 主要是求出根据已知条件所作出的不同排列的种数. 对于一些简单的问题, 可以采用上节例题中的方法, 把所有不同的排列列举出来, 数出种数找到答案. 显然, 这种方法是很烦的. 为了能找寻出一个简单的、直接的求排列种数的方法, 下面先来考察一个具体问题.

问题 如果从甲地到乙地有 2 条路可走, 乙地到丙地又有 3 条路可走, 试问: 从甲地经乙地而到丙地, 可以有几种不同的走法?



【解】 如果用 A_1 、 A_2 表示从甲地到乙地的两条路, 用 B_1 、 B_2 、 B_3 表示从乙地到丙地的这三条路(上图), 从图中可以看出, 从甲地经乙地到丙地, 有并且只有下面这 6 种走法:

A_1 —— B_1 , A_1 —— B_2 , A_1 —— B_3 ,

A_2 —— B_1 , A_2 —— B_2 , A_2 —— B_3 .

可以看出,解这个问题需要考虑两个步骤:第一步,先从由甲地到乙地的这两条路中任意选择一条(有2种选法);第二步,再从乙地到丙地这三条路中任意选择一条(有3种选法);而最后计算出来的不同走法的种数6,正就是这两个步骤中每一步骤的选法种数(2与3)的乘积.

对这个具体问题的解,给了我们一个重要的启示:倘使撇开了这里所说的“从甲地到乙地”、“从乙地到丙地”这些具体内容,而把它们一般地看成是要完成一件事的两个步骤,并且把这里所说的“2条路”、“3条路”一般地叙述成“有 m_1 个方法”、“有 m_2 个方法”,这样,就可以作出如下的结论:

设完成第一件事有 m_1 个方法,在完成第一件事以后,再完成第二件事又有 m_2 个方法;那末,依次完成这两件事,就有

$$N = m_1 \cdot m_2$$

个方法.

更一般地,我们还可以作出这样的结论:

设完成第一件事有 m_1 个方法,在完成第一件事以后,再完成第二件事又有 m_2 个方法,在完成这二件事以后再完成第三件事又有 m_3 个方法……,在完成了前 $n-1$ 件事以后再完成第 n 件事又有 m_n 种方法;那末,依次完成这 n 件事,就有

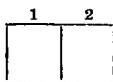
$$N = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdots m_n$$

个方法.

在上面这个式子里,等号右边是乘积的形式,为了突出这一点,我们把上面这个结论称为乘法原则.

应用这个原则,就可以不通过具体作出排列,而求出符合题设条件的所有的不同排列的种数.

例如, 对 § 1.1 例题中的(1)所作的排列, 可以看成是在排好顺序的两个位置



上, 从 a, b, c, d 这四个字母里, 选取字母去分别占据, 因此可以认为这是要依次完成下面两件事:

(1) 先在 a, b, c, d 这四个字母中选取 1 个, 去占据第 1 号位置;

(2) 再在余下的 3 个字母(因为排列里不许有重复字母, 所以已经占有第 1 号位置的那个字母不能再选)中选取 1 个去占据第 2 号位置.

因为, 完成第一件事有 4 个方法, 完成第二件事有 3 个方法, 所以完成这两件事共有

$$N = 4 \cdot 3 = 12$$

个方法.

类似地, 读者可以自己来说明上节例题里(2)所求的排列种数是

$$N = 4 \cdot 4 = 16.$$

习 题 1.2

应用乘法原则解下列各题:

1. 从 a, b, c, d, e 这 5 个字母里, 每次取出:

(1) 2 个; (2) 3 个; (3) 4 个; (4) 5 个

不同字母, 求所组成的各种不同排列的种数.

[解法举例: (1) $N_2 = 5 \cdot 4 = 20$.]

注意 本题的四个小题目都是要求排列的种数 N , 为便于区别, 我们用 N_2 表示选取 2 个字母的排列种数, N_3, N_4, N_5 便分别表示选取 3, 4, 5 个字母的排列种数.

2. 用数字 1, 2, 3, 4 可以组成多少个:

(1) 二位数?

(2) 三位数?

(3) 四位数?

其中不含有重复数字的各有几个?

3. (1) 从 9 块不同颜色的积木里, 取出三块排成一横排, 共有多少种不同排法?

(2) 在所有的三位数里, 共有几个不含有数字 0 的?

比较一下, (1) 和 (2) 有什么区别.

§1.3 相异元素不许重复的排列

在习题 1.2 第 1 题里, 读者已经计算过: 从 a, b, c, d, e 这 5 个字母里, 每次取出 2 个、3 个、4 个、5 个不同字母, 所组成的各种不同排列的种数分别是:

$$N_2 = 5 \cdot 4 = 20,$$

$$N_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60,$$

$$N_4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120,$$

$$N_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

观察上面这些式子, 可以看出: 所求的排列种数是若干个连续自然数的乘积, 乘积中最大的一个因数就是所给元素的个数, 乘积中因数的个数等于排列中含有的元素的个数.

为了统一起来, 有时也把这 5 个字母里只取出 1 个, 说成是这 5 个不同字母中取出 1 个字母的排列. 很明显, 这样作出的排列的种数是

$$N_1 = 5.$$

把上面这个问题推广到一般的情况, 就可以得出结论:

从 m 个不同元素里, 每次取出:

1 个元素的所有排列的种数是 m ;

2 个不同元素的所有排列的种数是 $m(m-1)$;

3 个不同元素的所有排列的种数是 $m(m-1)(m-2)$;

4 个不同元素的所有排列的种数是

$$m(m-1)(m-2)(m-3);$$

.....

n 个 ($1 \leq n \leq m$) 不同元素的所有排列的种数是

$$m(m-1)(m-2) \cdots [m-(n-1)],$$

就是

$$m(m-1)(m-2) \cdots (m-n+1).$$

上面这种排列是 m 个各不相同元素中每次取 n 个各不相同元素的排列, 我们用符号 A_m^n 表示这类排列里所有不同排列的种数. 于是,

$$A_m^n = m(m-1)(m-2) \cdots (m-n+1).$$

这个公式称为排列数公式. 这里 m, n 都表示自然数, 且 $n \leq m$.

把这公式写成定理形式, 即是:

定理 从 m 个不同元素里每次取出 n 个不同元素的所有排列的种数, 等于 n 个连续自然数的乘积, 其中最大的一个数是 m .

为了以后解排列问题的需要, 下面先来熟悉一些关于排列数的运算.

例 1. 计算 $\frac{A_{16}^3}{2A_8^4}$ 的值.

$$\text{【解】 } \frac{A_{16}^3}{2A_8^4} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{16 \cdot 14 \cdot 15} = 1.$$

例 2. 计算 $\frac{A_9^5 + A_9^4}{A_9^3}$ 的值.

$$\text{【解】 } \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 + 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6(5+1)}{9 \cdot 8 \cdot 7} = 36.$$

习 题 1.3(1)

1. 计算以下各式的值:

$$\begin{array}{ll} (1) A_6^3; & (2) A_{10}^4; \\ (3) \frac{A_{12}^8}{A_{12}^7}; & (4) \frac{3A_{30}^{19}}{2A_{30}^{18}}. \end{array}$$

2. 计算以下各式的值:

$$\begin{array}{ll} (1) \frac{A_8^3 - A_8^2}{A_4^3}; & (2) \frac{A_{10}^5 + A_{10}^4}{A_{12}^6 - A_{12}^5}; \\ (3) \frac{4A_6^2}{A_2^2 + A_3^2 + A_4^2}; & (4) \frac{A_7^6}{A_3^3 \cdot A_3^3}. \end{array}$$

应用上面的公式, 可以很简便地解答一些关于相异元素的不许重复的排列问题. 但在应用这公式时, 必须先考察两点:

(1) 所给的元素是不是各不相同的?

(2) 在作出的排列里, 元素是不是各不相同的?

下面举例来说明这类问题的解法.

例 3. 某铁路线上一共有 48 个大小车站, 铁路局要为这条路线上准备几种不同车票?

【解】 因为每张车票都标明起点站和终点站的站名, 所以同样的两站间就有 2 种不同的车票. 从 48 个车站的站名中取出两个车站名, 分起点站和终点站排起来, 所有这种排列的种数即是本题的解, 所以这是求在 48 个不同元素中每次取 2 个不同元素的所有排列的种数问题. 于是, 由上面的定理即得, 需要准备的车票种数是

$$A_{48}^2 = 48 \cdot 47 = 2256.$$

答: 要准备 2256 种不同的车票.

注意 在解排列的具体问题时, 解答中要作简要的说明, 不宜只列出一个算式; 在以后解组合问题时也一样.

习 题 1.3(2)

1. 用 1、2、3、4、5、6 这 6 个数字，可以组成多少个没有重复数字的
(1) 三位数； (2) 四位数。
2. 有颜色不同的小旗 5 面，现在要取出 3 面顺次升入旗竿作出信号，问可以构成多少种不同的信号？
3. 有 5 本不同的书，要分别包上包书纸。现有花色不同的包书纸 6 张，问有几种不同的包法？
4. 有甲、乙、丙、丁、戊 5 个队进行乒乓球比赛，如果每个队都要与另一队在本队的场子里以及客队的场子里各比赛一次，问这次比赛总共要进行多少场次？

§1.4 全 排 列

在公式

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+2)(m-n+1)$$

中，如果令 $n=m$ ，就得

$$A_m^m = m(m-1)(m-2)\cdots 2 \cdot 1.$$

这个公式指出：把 m 个不同的元素全部取出来作排列，所有这样的排列的种数，等于从 1 开始的 m 个连续自然数的连乘积。

这种排列称为 **m 个不同元素的全排列**，并且用专门的符号 P_m 来表示这类排列所有的排列种数，就是

$$P_m = A_m^m = 1 \cdot 2 \cdots (m-1) \cdot m.$$

为了方便起见，把从 1 开始的 m 个自然数的连乘积，用记号 $m!$ (读做 m 阶乘) 来表示。应用这一记法， m 个不同元素的全排列的种数公式就可以写成

$$P_m = m!.$$

例 1. 计算 $\frac{8!-6!}{7!-6!}$ 的值.

分析 $8!=8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=(8\cdot7)\times6!$,

$7!=7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=7\times6!$,

所以分子分母中都含有因数 $6!$, 可以先约去 $6!$ 后再计算.

$$\begin{aligned}\text{【解】} \quad \frac{8!-6!}{7!-6!} &= \frac{(8\cdot7)\times6!-6!}{7\times6!-6!} = \frac{55\times6!}{6\times6!} \\ &= \frac{55}{6} = 9\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

注 $(n+1)!=(n+1)\cdot n!$

$$=(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!$$

$$=\dots\dots\dots$$

这种变换在计算中很有用, 应该熟悉这些计算技巧.

例 2. 求证 $P_{n+1}-P_n=nP_n$.

$$\begin{aligned}\text{【证】} \quad P_{n+1}-P_n &= (n+1)!-n! = (n+1)\cdot n!-n! \\ &= (n+1-1)\cdot n! \\ &= n\cdot n! = n\cdot P_n,\end{aligned}$$

命题得证.

习 题 1.4

1. 计算:

$$(1) \frac{P_{10}-9P_9-8P_8}{P_8}; \quad (2) \frac{P_{10}}{P_6\cdot P_4}.$$

2. 求证:

$$(1) P_8-8P_7+7P_6=P_7; \quad (2) 16P_8=P_5-P_4.$$

3. 把编上号码的 5 台车床排成一列, 共有几种不同的排法?

§1.5 加法原则

在习题 1.1 里, 我们曾经解过下面这个问题: