2001年最新版

最新
全国硕士研究生
入学统一考试

全真模拟试卷

[理工数学（二）]

主编：北京大学 林朝祥 张静
审定：考研命题研究组

中国人民公安大学出版社

最新全国硕士研究生入学统一考试
全真模拟试卷
（理工数学二）

北京大学　林朝祥　张静　主编
考研命题研究组　审定

中国人民公安大学出版社
北京

责任编辑:过百芳

封面设计:虎　子

图书在版编目(CIP)数据

最新全国硕士研究生入学统一考试全真模拟试卷.理工数学.2/张静等主编.－北京:中国人民公安大学出版社,2000.7

ISBN　7－81059－482－6

Ⅰ.最…　Ⅱ.张…　Ⅲ.数学－研究生－入学考试－试题　Ⅳ.G643－44

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第33702号

最新全国硕士研究生入学统一考试全真模拟试卷

(ZUIXIN QUANGUO SHUOSHIYANJIUSHENG RUXUE TONGYI KAOSHI QUANZHEN MONI SHIJUAN)

林朝祥　张静　主编

出版发行:中国人民公安大学出版社

地　　址:北京市西城区木樨地南里

邮政编码:100038

经　　销:新华书店

印　　刷:河北省抚宁印刷厂

版　　次:2000年7月第1版

印　　次:2000年7月第1次

印　　张:6

开　　本:850毫米×1168毫米　1/32

字　　数:101千字

印　　数:0～2000套

ISBN 7－81059－482－6/G·050

定　　价:全套11册,共275.00元,每册25.00元

本社图书出现印装质量问题,由发行部负责调换

联系电话:(010)83905728

E－mail:cpep@public.bta.net.cn

前　言

“忽如一夜春风来，千树万树梨花开。”每年九月间，数十万名手持“硕士研究生入学考试录取通知书”的新生，在经历了人生中最难忘的一段拼搏后，来到各名牌大学，开始了新的人生旅程！

在这些天之骄子中，有为数众多的考生，选择过这套《最新全国硕士研究生入学统一考试全真模拟试卷》作为他们主要的考研复习资料并因此而获成功。该套试卷由全国考研命题研究组组织编写，编写者为北京大学、中国人民大学、清华大学等著名高校的教授及学者们。其中部分教授是国家考研命题组成员和阅卷组成员。他们同时具有丰富的考研辅导经验，对命题有惊人的把握，所编资料以高命中率而闻名！

今年本套试卷严格遵循教育部最新修订的 2001 年全国硕士研究生入学考试大纲的精神，同时结合多年的教学经验和考研经验来进行编写。每套试卷的题型题量、难易程度、分值比例、评分标准完全按照新大纲的要求精心设计和编写。使考生通过模拟训练，及时查漏补缺，提高应试能力。

本丛书特点在于：它绝非一般的模拟试卷，而是由著名考研专家根据考研最新动态和精神，开会共同研讨对策，对 2001 年考研作出精确预测，并呕心沥血，最终形成此套“高含金量”的试卷！权威而又准确的预测是本丛书的最大特色！去年读过此丛书的考生都纷纷给本中心来电话，称他们在进入考场后有太多的“似曾相识”、“早已做过此题”的感觉！

该套试卷涵盖文科政治、理科政治、英语、理工数学(一)、理工数学(二)、经济数学(三)、经济数学(四)、西医综合、中医综合、MBA及法硕等考研科目。

“不经历风雨,哪能有彩虹,人生不会随随便便成功……”歌词铿锵,掷地有声!立志于考研的同学们,我们深信,只要你们认真通读本书,掌握答题思路与分析方法的要领,严格完成全部习题,并融会贯通,举一反三,一定会取得考研的成功,进而改变你人生的轨迹,从胜利走向胜利!

考研命题研究组

公元2000年7月

目　　录

全真模拟试题(一)

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分)

1. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}} & ,x<0\\ b & ,x=0\\ \dfrac{1}{x}[\ln x-\ln(x^2+x)] & ,x>0\end{cases}$

在 $x=0$ 处连续,则 $a=$ ________, $b=$ ________:

2. 设 $a>0, f(x)=a\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{ax-x^2}$ 则 $f'(x)=$

________.

3. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2+\tan^2 x}}=$ ________.

4. 设函数 $y=y(x)$ 满足条件 $\begin{cases}y''+4y'+4y=0\\ y_{(0)}=0, y'_{(0)}=1\end{cases}$

则 $\displaystyle\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=$ ________.

5. 已知3阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式为 -1,并且

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&a&3\\1&0&1\end{pmatrix}$$

则 $a=$ ________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分,每小题给出的四个选项中,只有一项满足题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

1. 下列命题错误的是(　　).

   A. 若 $0 < x_n < 1 \quad (n = 1,2,\cdots)$,则 $\lim\limits_{x \to +\infty} x_n^n = 0$

   B. 函数 $y = x + \dfrac{1}{x}$,在区间$[0.01,100]$上的最小值是 2

   C. 可积的周期函数的积分$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 未必是周期函数

   D. 积分$\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 对任何 p 值都是发散的

2. 设 $f(x) = (1 - x^3)g(x)$,其中 $g(x)$ 在点 $x = 1$ 处连续,则$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} =$ (　　).

   A. $f'(1)$　　　　B. $1 - g(1)$

   C. $-3g(1)$　　　　D. $-2g(1)$

3. 设 $y = f(x)$ 满足微分方程 $y'' + y' - \mathrm{e}^{\sin x} = 0$ 的解,且 $f'(x_0) = 0$,则 $f(x)$ 在点(　　).

   A. x_0 的某个邻域内单调递增

   B. x_0 的某个邻域内单调递减

   C. $f(x_0) = 0$

   D. x_0 处取极大值

4. "对 $\forall \varepsilon \in (0,1)$,总 $\exists N$,当 $n \geqslant N$ 时,恒有 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$"是数列$\{x_n\}$收敛于 a 的(　　).

   A. 充分条件　　　　B. 必要条件

   C. 充要条件　　　　D. 非充分非必要条件

5. 微分方程 $y\mathrm{d}x + (x^2 - 4x)\mathrm{d}y = 0$ 的通解为(　　).

   A. $(x - 4)y = c$　　　　B. $(x - 4)y^4 = cx$

   C. $(x - 4)y^3 = cx$　　　　D. $(x - 4)y^2 = cx$

三、(本题满分 5 分)

求极限$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

四、(本题满分 5 分)

设函数 $f(x)>0$, 且在$[0,1]$上连续, 证明: $\ln\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x$.

五、(本题满分 7 分)

从船上向海中沉放某种探测仪器, 按探测要求, 需确定仪器的下沉深度 y(从海平面算起) 与下沉速度 v 之间的函数关系. 设仪器在重力作用下, 从海平面由静止开始铅直下沉, 在下沉过程中还受到阻力和浮力的作用. 设仪器的质量为 m, 体积为 B, 海水比重为 ρ, 仪器所受的阻力与下沉速度成正比, 比例系数为 $k(k>0)$. 试建立 y 与 v 所满足的微分方程, 并求出函数关系式 $y=y(v)$.

六、(本题满分 8 分)

求曲线 $y=\sqrt{x}$ 的一条切线 l, 使该曲线与切线 l 及直线 $x=0, x=2$ 所围成的平面图形面积最小.

七、(本题满分 8 分)

设曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}(x\geqslant0)$

(1) 将曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}$, x 轴, y 轴和直线 $x=x_0(x_0>0)$ 所围平面图形绕 x 轴旋转一周, 得一旋转体, 求此旋转体体积 $V(x_0)$ 并求满足 $V(a)=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x_0\to+\infty}V(x_0)$ 的 a.

(2) 在曲线上找一点, 使过该点的切线与两坐标轴所夹平面图形的面积最大, 并求出该面积.

八、(本题满分 8 分)

一曲线经过点(1,2), 它在两坐标轴间的任意切线段均被切点所平分, 求这曲线的方程.

九、(本题满分 7 分)

利用恒等式：$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$ 推出：$\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\tan\frac{x}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$ 的和式表达式.

十、(本题满分 7 分)

半径为 R 米的半球形水池，其中充满了水，要把池内的水完全吸尽，需做多少功？

十一、(本题满分 8 分)

已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0,3)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1,2)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,a-3,1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,-2,a)^T$ 及 $\boldsymbol{\beta}=(0,1,b,-1)^T$.

(1) a,b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合.

(2) a,b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 惟一线性表出？写出表达式.

十二、(本题满分 7 分)

设 $\boldsymbol{A}^*$ 为 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，证明：

(1) 若 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $|\boldsymbol{A}^*|=0$

(2) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$

全真模拟试题(一)答案

一、填空题

1. $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$　　$b = -1$

2. $\frac{\sqrt{ax - x^2}}{x}$

3. $\arcsin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{2}}\right) + C$

4. $\frac{1}{4}$　　5. 4

二、选择题

1. A　　2. C　　3. B　　4. C　　5. B

三、[解]

用洛必达法则

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to1}\frac{-x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to1}\frac{-1}{2x} = -\frac{1}{2}$$

四、[证明]

把[0,1]分成 n 等分,$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{i-1}{n} < \frac{i}{n} < \cdots < \frac{n}{n} = 1$.

$\because f(x) > 0$,　$\therefore \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \geqslant \left[\prod_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$.于是,有

$$\ln\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\right] \geqslant \ln\left[\prod_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left[f\left(\frac{i}{n}\right)\right]$$

即 $\ln\left[\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})\frac{1}{n}\right] \geqslant \sum_{i=1}^{n}\ln f(\frac{i}{n})\frac{1}{n}$，两边取 $n\to\infty$ 的极限，并注意到 $f(x)$ 及 $\ln f(x)$ 的连续性，有

$$\lim_{n\to\infty}\left[\ln\left(\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})\cdot\frac{1}{n}\right)\right] \geqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln f(\frac{i}{n})\cdot\frac{1}{n}$$

$$\therefore \ln\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right) \geqslant \int_0^1 \ln[f(x)]\mathrm{d}x$$

五、[解]　取沉放点为原点 O，Oy 轴正向铅直向下，则由牛顿第二定律得

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = mg - B\rho - kv,$$

将 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$ 代入以消去 t，得 v 与 y 之间的微分方程：

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = mg - B\rho - kv.$$

分离变量得　$$\mathrm{d}y = \frac{mv}{mg - B\rho - kv}\mathrm{d}v.$$

积分后得　$y = -\frac{m}{k}v - \frac{m(mg - B\rho)}{k^2}\ln(mg - B\rho - kv) + C.$

由初始条件　$v\big|_{y=0} = 0$ 定出 $C = \frac{m(mg - B\rho)}{k^2}\ln(mg - B\rho)$，故所求函数关系为

$$y = -\frac{m}{k}v - \frac{m(mg - B\rho)}{k^2}\ln\frac{mg - B\rho - kv}{mg - B\rho}$$

六、[解]　$\because y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$　　$\therefore$ 曲线 $y = \sqrt{x}$ 在点 $(t, \sqrt{t})$ 处的切线 l 的方程为

$$y - \sqrt{t} = \frac{1}{2\sqrt{t}}(x - t)\quad 即\ y = \frac{1}{2\sqrt{t}}x + \frac{\sqrt{t}}{2}$$

切线 l 及直线 $x = 0$，$x = 2$ 所围成的平面图形面积为

$$S_{(t)}=\int_0^2\left[\frac{1}{2\sqrt{t}}x+\frac{\sqrt{t}}{2}-\sqrt{x}\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t}-\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$S'(t)=-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\begin{cases}<0 & 0<t<1\\ =0 & t=1\\ >0 & t>1\end{cases}$$

$\therefore$ 当 $t=1$ 时 S 取最小值，这时切线 l 的方程为 $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}$

七、[解] (1) $V(x_0)=\pi\int_0^{x_0}y^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^{x_0}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-2x_0})$

$\therefore V(a)=\dfrac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-2x})$

$\because V(a)=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x_0\to\infty}V(x_0)=\dfrac{\pi}{4}\lim\limits_{x_0\to\infty}(1-\mathrm{e}^{-2x_0})=\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore \dfrac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-2a})=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow \mathrm{e}^{-2a}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}\ln 2$

(2) 设切点为 (x_0,e^{-x_0})，则切线方程为 $y-\mathrm{e}^{-x_0}=-\mathrm{e}^{-x_0}(x-x_0)$

其截距式为 $\quad \dfrac{x}{1+x_0}+\dfrac{y}{(1+x_0)\mathrm{e}^{-x_0}}=1$

$\therefore$ 切线与两坐标轴所夹面积为 $S=\dfrac{1}{2}(1+x_0)^2\mathrm{e}^{-x_0}\quad (x_0>0)$

令 $S'=(1+x_0)\left[1-\dfrac{1}{2}(x_0+1)\right]\mathrm{e}^{-x_0}=0\Rightarrow x_0=1, x_0=-1$(舍去)

$\therefore S$ 在 $x_0>0$ 内只有一个驻点 $x_0=1$，$\therefore x_0$ 也为 S 的最大值点，故切点为 $(1,\mathrm{e}^{-1})$，最大面积为 $S=2\mathrm{e}^{-1}$.

八、[解] 设切点坐标为 (x,y)，则依题意切线在 x 轴，y 轴上的截距分别为 $2x,2y$，因此切线的斜率为 $\dfrac{2y-0}{0-2x}=-\dfrac{y}{x}$，由此求得该曲线应满足的微分方程为：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{y}{x}\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=-\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

$$\therefore \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} = \ln x + \ln y = c \Rightarrow xy = c.$$

又 ∵ 曲线经过点(1,2),即当 $x = 1$ 时,$y = 2$,由此确定 $c = 2$,∴ 所求的曲线方程为 $xy = 2$

九、[解] 原式两边取对数,得 $\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \ln\left|\cos\frac{x}{4}\right| + \cdots + \ln\left|\cos\frac{x}{2^n}\right| = \ln|\sin x| - n\ln 2 - \ln\left|\sin\frac{x}{2^n}\right|$

等式两边对 x 求导,得

$$-\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\tan\frac{x}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}\right) = \cot x - \frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\tan\frac{x}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n} - \cot x.$$

十、[解] 取坐标系如图 1 所示,球心在原点.易知,图中圆周方程 $x^2 + y^2 = R^2$.为了求功,我们采用微元法.

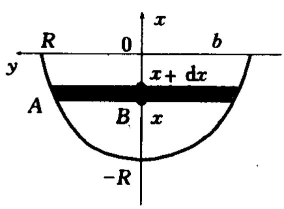

图 1

分割区间[$-R$,0],考虑任一份[$x, x + dx$].相应的水层重量近似等于以$\overline{AB}$ 为半径、以 dx 为高的薄圆柱形水层的重量,即

$$\gamma(\pi\overline{AB}^2)dx = \gamma\pi y^2 dx = \gamma\pi(R^2 - x^2)dx,$$

把这一层水柱吸出池面,经过的距离为($-x$),因此需做功

$$dW = [\gamma\pi(R^2 - x^2)dx](-x) = \gamma\pi(x^3 - R^2x)dx.$$

将上式从 $-R$ 到 0 求定积分,得到

$$W = \int_{-R}^{0}\gamma\pi(x^3 - R^2x)dx = \frac{\gamma}{4}\pi R^4(kg \cdot m)$$

(其中 $\gamma = 1000kg/m^3$)

$$= 9.8 \times \frac{\gamma}{4}\pi R^4 = 2450\pi R^4(J).$$

这就是把池内的水完全吸尽所需做的功.

十一、[解]

$\boldsymbol{\beta} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 + x_4\boldsymbol{\alpha}_4$ 则

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

其增广矩阵为 $\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 0 & -1 & -2 & a-3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right)$$

可见,当 $a = 1, b \neq -1$ 时,系数矩阵与增广矩阵秩不等,故方程组无解,即 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出.

当 $a \neq 1$ 时, 方程组有惟一解, $x_1 = \dfrac{b-a+2}{a-1}, x_2 = \dfrac{a-2b-3}{a-1}, x_3 = \dfrac{b+1}{a-1}, x_4 = 0$

故 $\boldsymbol{\beta}$ 有惟一表达式 $\boldsymbol{\beta} = \dfrac{b-a+2}{a-1}\boldsymbol{\alpha}_1 + \dfrac{a-2b-3}{a-1}\boldsymbol{\alpha}_2 +$

$\dfrac{b+1}{a-1}\alpha_3+0\cdot\alpha_4$

十二、[证明] (1)(ⅰ)若 A 的全部元素均为0,则 $|A^*|=0$.

(ⅱ)若 $|A|=0$,但 A 中至少有一列元素不全为0,不妨设

$$\alpha_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\cdots\\a_{nj}\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0\\0\\\cdots\\0\end{bmatrix}$$

于是 $\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\cdots&&&\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\cdots\\a_{nj}\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}A_{11}a_{1j}+A_{21}a_{2j}+\cdots+A_{n1}a_{nj}\\\cdots\\A_{1j}a_{1j}+A_{2j}a_{2j}+\cdots+A_{nj}a_{nj}\\\cdots\\A_{1n}a_{1j}+A_{2n}a_{2j}+\cdots+A_{nn}a_{nj}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0\\\cdots\\|A|\\\cdots\\0\end{bmatrix}\xrightarrow{\because |A|=0}\begin{bmatrix}0\\\cdots\\0\\\cdots\\0\end{bmatrix}$$ 故 $|A^*|=0$.

(2)由(1)可知, $|A|=0\Rightarrow|A^*|=|A|^{n-1}=0$

当 $|A|\neq0$ 时, $A^*A=AA^*=|A|E,\Rightarrow|A^*||A|=||A|E|$

$\Rightarrow|A^*||A|=|A|^n\Rightarrow|A^*|=|A|^{n-1}$