数理哲学导论

〔英〕 罗 素著

商 务 印 书 馆

数理哲学导论

〔英〕罗素著

晏成书译

商务印书馆

1982年·北京

INTRODUCTION TO MATHEMATICAL PHILOSOPHY

By

Bertrand Russell

1930 Printed in Great Britain by Neill & Co., LTD., Edinburgh.

本书据1930年爱丁堡英文本译出

数理哲学导论

〔英〕罗 素 著

晏成书 译

商 务 印 书 馆 出 版

(北京王府井大街36号)

新华书店北京发行所发行

民族印刷厂印刷

统一书号：2017·283

1982年6月第1版　　开本 850×1168 1/32

1982年6月北京第1次印刷　　字数 149千

印数 17,300册　　印张 6 3/8

定价：0.83 元

译 者 序

这本书是罗素的数理哲学的一本通俗著作。它是罗素继1903年问世的《数学原则》和1910—1913年出版的三大卷皇皇巨著《数学原理》之后所写的一本书。由于前二者分量太大，内容艰深，一般人，甚至专门从事数学原理探讨的人，难以通读，于是罗素写了这本书。在这本书中罗素以他的明白晓畅的笔法陈述了数学原理研究中确定的科学结果。所谓的数学原理研究中确定的科学结果特别包括数理逻辑方面的结果。罗素认为，数理逻辑作为一种方法，有助于传统的哲学问题，特别是数理哲学问题的解决，在这本书中他将数理逻辑的主要结果以一种既不需要数学知识，也不需要运用数学符号能力的形式陈述出来。在这本书中罗素还清楚明确地陈述了他的数理哲学观点。这就是人们通常称做的逻辑主义。谈到罗素的数理哲学或者逻辑主义，经常为人们所征引的就是这本书的一些章节。

在本书中罗素以数学的算术化作为起点。所谓的数学的算术化，就是用自然数定义数学中的其它概念，由自然数的性质导出数学中的所有命题。在肯定数学能归约到自然数的理论后，下一步应该是将自然数的理论再行归约，归约到最小一组概念和前提。这个工作由皮亚诺(Peano)所完成。皮亚诺将全部自然数的理论归约到三个概念：0、数与后继——即在自然数次序中一数的次一数，以及五个基本命题或称公理。然而，一方面皮亚诺的公理不能保证确有适合这些公理的数存在，另一方面皮亚诺的三个基本概念又容许无数不同的解释。究竟什么是数，它是否也能定义？弗芮格

(Frege)致力于解答这个问题。他成功地用逻辑上更基本、更简单的概念，甚至可以说纯逻辑的概念定义数。所谓数就是某一个类的数(项数或基数)，而一个类的数就是所有和这个类有一一对应关系的类的类。然后用一个类的数来定义 0 与后继，进而定义自然数。不仅皮亚诺的三个基本概念都可以定义，皮亚诺的五个基本命题，其中包括数学归纳法，也都可以由以上的定义推导出来。在自然数中，1 是 0 的后继，2 是 1 的后继，如此等等。自然数形成一个有一定次序的序列。在自然数序列的基础上，罗素逐步地引出有理数、实数和复数。在弗芮格之外，康托(Cantor)从不同的出发点独自一人建立了完整的无穷基数与无穷序数的理论。罗素在本书中把弗芮格的数的概念和康托的理论结合起来介绍。他还介绍了康托的一般的序列的极限和序列的连续性的定义。由于高等数学中几乎每一件东西都依赖于极限概念，极限概念可以说是整个高等数学的基础。为了给数学提供足够的基础，我们还需要一些公理，如选择公理，罗素称之为乘法公理。数学家一直使用乘法公理，然而只是崔梅罗(Zermelo)才第一次使公理有一个清晰明白的形式。没有这个公理，数学中的许多命题就不能证明。罗素在本书中讨论了公理的几个等价形式和公理在无穷基数即自反数（和自己的真子类有一一对应关系的数）证明中的作用。近年来关于选择公理的研究有了很大的进展，但是罗素的讨论仍然有效。为了建立超穷数的理论和实数理论，我们需要整数和分数的无穷类或无穷集合、无穷序列。我们需要假定有无穷多个个体存在的无穷公理。在讨论到个体，个体的类，类的类等等时，我们会很自然地想到把这一切包含在一起的一个最大的类。但是如果假定有一个包含一切的最大类，我们会遇到矛盾，这就是罗素发现的有名的悖论。究竟类是什么，在构造类的过程中应该有些什么限制？这是数理哲学或者说数学基础的根本问题，本书就以此为终结。

以上列举的属于数学原理研究中确定的科学结果。当然，其中有的定义，如有理数、实数的定义，由于受罗素的类型论的影响，显得不必要的复杂，如根据他的定义，分数 $n/1$ 不等于整数 n，今天已不再采用这些定义，另有新的定义。同时也应该指出，我们在上面没有列举的，但是为了得出以上结果所必需的数理逻辑方面的理论，如关系的逻辑理论，其内容也是科学的。书中的演绎理论部分虽然从今天看有不够严格之处，譬如说，未能明确地区分公理、前提与推演规则，但基本上也是正确的。另外，罗素在本书中有许多言论，如最易把握的概念是既不过于复杂也不十分简单的概念，在数学中重要的不是我们所研究的东西的内在性质，而是它们相互之间的关系的逻辑性质等，很富启发性。

所有这些都是我们能从本书获益的。

本书也有错误，其为错误已是公论，这就是罗素的逻辑主义：把数学等同于逻辑，或者说数学是逻辑的延伸。其所以是错误，从乘法公理和无穷公理的性质就可以看出。我们已经指出，许多数学命题的证明和一些数学概念的定义需要这两个公理。尽管这两个公理可以只用逻辑概念来陈述，可是我们决不能说乘法公理和其它的逻辑命题，如 p 与非 p 不能同真等一样，可以只从逻辑判定其真假。至于断定有无穷多个个体存在的无穷公理，更明显地不具有逻辑的性质，其根据只能是物理学。仅仅从以上所说就知道，数学不是逻辑的延伸，不能归约为逻辑。

除了逻辑主义以外，罗素把类看成是逻辑的虚构，因此数也是逻辑的虚构，这样的观点显然也是错误的。如果说抽象的、一般的东西不同于具体的、个别的东西，是我们的感觉知觉所不能得到的，无疑是对的。但是说，抽象的一般的东西，如类或集合是人们思维的虚构，或者说符号的虚构，应该用奥卡姆(Occam)的剃刀剃掉，这种唯名论的思想是不了解个别和一般的辩证关系，不了解

“任何个别（不论怎样）都是一般。任何一般都是个别的（一部分，或一方面，或本质）。”（列宁：《谈谈辩证法问题》）并且，在罗素主张用命题函项来消去类时，他没有想到命题函项所表示的性质、关系和类一样，也是抽象的、一般的。

为了避免悖论，罗素提出了类型论以及还原公理，但是他自己承认，这个理论还不确定，还是混乱的和模糊的。从今天从事数学基础研究的学者来看，也是如此。因之在这里我们也就不必多说。

以上各点这里不及深入分析，略述所见，希望引起读者进一步思考。

目　录

序言 …… 3
编者注 …… 5
第 一 章　自然数串 …… 7
第 二 章　数的定义 …… 16
第 三 章　有穷与数学归纳法 …… 24
第 四 章　序的定义 …… 32
第 五 章　关系的种类 …… 43
第 六 章　关系的相似 …… 52
第 七 章　有理数、实数和复数 …… 62
第 八 章　无穷基数 …… 75
第 九 章　无穷序列与序数 …… 86
第 十 章　极限与连续性 …… 93
第十一章　函数的极限与连续性 …… 102
第十二章　选择与乘法公理 …… 111
第十三章　无穷公理与逻辑类型 …… 124
第十四章　不相容性与演绎法理论 …… 136
第十五章　命题函项 …… 146
第十六章　摹状词 …… 157
第十七章　类 …… 170
第十八章　数学与逻辑 …… 182
索引 …… 193

目　　录

序言 …………………………………………………… 3
编者注 ………………………………………………… 5
第 一 章　自然数串 ………………………………… 7
第 二 章　数的定义 ………………………………… 16
第 三 章　有穷与数学归纳法 ……………………… 24
第 四 章　序的定义 ………………………………… 32
第 五 章　关系的种类 ……………………………… 43
第 六 章　关系的相似 ……………………………… 52
第 七 章　有理数、实数和复数 …………………… 62
第 八 章　无穷基数 ………………………………… 75
第 九 章　无穷序列与序数 ………………………… 86
第 十 章　极限与连续性 …………………………… 93
第十一章　函数的极限与连续性 …………………102
第十二章　选择与乘法公理 ………………………111
第十三章　无穷公理与逻辑类型 …………………124
第十四章　不相容性与演绎法理论 ………………136
第十五章　命题函项 ………………………………146
第十六章　摹状词 …………………………………157
第十七章　类 ………………………………………170
第十八章　数学与逻辑 ……………………………182
索引 …………………………………………………193

序　　言

这本书原本是想作为一个“导论”，而不是想对它所处理的问题作一个详尽的讨论。有些结果直到现在为止只是对于精通逻辑符号的人才可以应用，但是将它们用一种给初学者最少困难的方式陈述出来，这一点似乎还是可望作到的。关于那些仍然受到严重怀疑的问题，我们已经作了最大的努力以避免武断，在某种程度上这种努力支配了我们所要讨论的题目的选择。数理逻辑的初始部分比起它稍后的部分来没有那样明确地为人知道，但是这些部分至少和后面的部分具有同样的哲学兴趣。在以下诸章中所陈述的许多东西称之为“哲学”是不适当的，尽管它们所涉及的问题包含在哲学中如此之久，以致关于它们还不曾有令人满意的科学存在。例如，无穷与连续的性质就是这样，在早日它们属于哲学，现在却归在数学中。在这个领域中所获得的许多确定的科学结果在严格的意义上或许不能认为是包含在数理哲学中。在知识的边境上有一些问题，关于这些问题至今还不曾得到比较确定的结论，人们很自然地期望数理哲学来处理这些问题。可是，除非我们认识了数学原理中比较科学的部分，对于这些问题的探讨很可能难获结果。所以一本讨论这些部分的书可以自称是一本数理哲学**导论**，虽则，除非它越出了它的范围，它很难声称它所处理的是哲学的一部分。就某些接触到本书的人看来，它所处理的一部分知识似乎取消了许多传统哲学，甚至于很大一部分流行于今日的哲学。然而也就是这种情形以及它与尚未解决的问题的关联，数理逻辑与哲学有关。因为这个原因和题目固有的重要性，将数理

v（页边，第一行旁） vi（页边，“学的一部分”行旁）

逻辑的主要结果在一种既不需要数学知识，也不需要运用数学符号的能力的形式中简单地叙述出来，或许有用。虽然在这里和别处一样，从进一步研究的观点看，方法比结果更重要，但是这种方法在下面这么一本书的框架中不能很好地加以说明。希望一些读者能感到足够的兴趣，继续方法的研究，正是由于方法，数理逻辑可以有助于传统哲学问题的探讨，但是这个题目我们在下面不打算讨论。

B．罗素

编　者　注

着重分别数理哲学与数学之哲学、认为这本书在现在的丛书* vii
中没有地位的人们可以参看作者自己在序言中关于这一点的声明。作者在那里提议：对哲学的领域作一番调整，将类、连续、无穷这样一些问题从哲学中转移到数学中，以便看出下面的定义和讨论对于“传统哲学”的关系，这个提议不必大家都赞同。但是即便哲学家们不能同意将这些范畴的评论贬低到任何特殊的科学中，无论如何，有一点很重要，就是，这些概念在数学中占据了极其重要的地位，哲学家们应该知道数学科学所赋与它们的精确意义。在另一方面，如果有些数学家觉得这些定义和讨论似乎是一种简单事物的雕琢和小题大做，我们最好从哲学那面提醒他们，这里和别处没有两样，表面的单纯可以隐藏复杂。不论对于哲学家还是数学家，或者如本书的作者那样一身二任的人，这种复杂问题的解决是他们的任务。

---

* 本书原来收在 J. H. Muirhead 所编的哲学丛书中。——译者

第一章　自然数串 1

数学这门学问当我们从它的最熟悉的部分开始时，可以沿着两个相反的方向进行。比较熟悉的方向是构造的，趋向于渐增的复杂，如：从整数到分数，实数，复数；从加法和乘法到微分与积分，以至更高等的数学。至于另一方向对于我们比较生疏，它是由分析我们所肯定的基本概念和命题，而进入愈来愈高的抽象和逻辑的单纯；取这种方向，我们不问从我们开始所肯定的东西能定义或推演出什么，却追问我们的出发点能从什么更普遍的概念与原理定义或推演出来。研究进行的方向不同是数理哲学的特点，就是这个特点使数理哲学与普通数学大异其趣。但是我们必须了解这区别不在主题内容，而在研究者的思想状况。早期希腊几何学家从埃及人陆地测量的经验规则，得到了能证明这些规则的普遍命题，并且由这些普遍命题达到欧几里得的公理与公设，按照上面的解释，他们确是从事于数理哲学；但如我们在欧几里得几何中所见，一旦达到公理与公设，它们的演绎的运用却属于普通意义的数 2
学。总之，数学与数理哲学之间的区分取决于激发研究的兴趣上，和研究所达到的阶段上；而不在研究所涉及的命题。

这个区别我们还可以另一种方式叙述。在数学中最明显易知的概念，从逻辑上来说，并不是初始的概念；从逻辑演绎的观点看，它们是出现在中途某处的概念。就如最易见的物体是那些既不甚远，也不很近，既不过大，也不太小的物体；同样，最易把握领会的概念是那些既不过于复杂，也不十分简单（我们用逻辑意义上所谓的“简单”）的概念。并且正如我们需要两种工具，望远镜和显微

镜，以扩大我们的视力一样；我们需要两种工具以扩张我们的逻辑能力：一个能引导我们进到高等数学；一个能带领我们追溯我们在数学中所习用、假定的概念和命题的逻辑基础。由于分析我们的普通的数学概念，追究它们的逻辑基础，我们将发现我们获得了新的见识，新的能力，并且由于在这番探讨后，采取新的前进路线，我们可以获得一种方法以达到完全崭新的数学题材。

本书的目的是简单地、不用专门技巧地解释数理哲学，凡初步讨论所难解说的、不确定的或困难的部分，不予涉及。欲求详尽的研讨，可见«数学原理»(«Principia Mathematica»)一书①。本书的讨论只想作为一个引论。

对于今日受过初等教育的人，数学最明显的出发点就是整数串，

1, 2, 3, 4…等等。

3 或许只有稍具数学知识的人才会想到：整数是从 0 而不是从 1 开始的，但是这一点知识程度我们是要假定的，我们要以如下的数串：

$$0, 1, 2, 3, \cdots, n, n+1, \cdots$$

作为我们的出发点。此后当我们谈到“自然数串”时，我们所指的就是这一串数。

仅仅在文明的高级阶段上，我们方能以这一串数作为我们的起点。发现一对鸡、两昼夜都是数 2 的实例，一定需要很多年代，其中所包含的抽象程度确实不易达到。至于 1 是一个数的发现，也必定很困难。说到 0，这更是晚近加入的，希腊人和罗马人没有这个数字。假使我们曾经从事于早期的数理哲学的研究，我们必得从比自然数串不那么抽象的东西入手，而以自然数串作为在我

① Cambridge University Press, vol. i., 1910; vol. ii., 1911; vol. iii., 1913. Whitehead and Russell 著。

们追溯的探讨中所达到的一个阶段。反之，当我们对数学的逻辑基础逐渐熟悉时，我们可以追溯到比现在所达到的更远的地方，那时我们的出发点将是在分析中比自然数还较后的一个阶段。但是在目前，自然数似乎代表数学中最易知、最熟悉的东西。

我们对于自然数虽是熟悉，却并没有了解。什么是"数"，什么是"0"，什么是"1"，很少人严格解释过，更不用说下定义。不难看出，任何0以外的自然数能够从0开始，由重复地加1得到，但是何谓"加1"，何谓"重复地"，它们的意义是什么，我们必须加以定义。这些问题可并不容易解决。直到最近，人们都相信算术的基本概念中至少有一些由于过于简单和基本而不能定义。因为所有被定义的概念是借助于其它概念来定义的，显然，为了有一个作定义的起点，人类知识必须接受一些易明的，没有定义的概念，以此为满足。至于是否必须有**不能**定义的概念，这一点还不清楚：可能 4
在作定义时，我们由一个定义追溯到在前的一个定义，一直下去，无论我们后退多远，我们总还可以走得更远。另一方面也可能当分析进行得够远时，我们能够达到一些概念，它们实在是简单，因此在逻辑上不容下一种分析的定义。这个问题我们不必解决；为了我们的目的，只须注意，由于人类能力有限，我们所知道的定义必须从某些概念开始，这些概念虽则或许不是永远不能定义，但在当前还不曾定义。

所有传统的纯粹数学，包括解析几何在内，全可以看作是有关自然数的命题所组成。这也就是说，其中的概念可以用自然数来定义，其中的命题可以从自然数的性质推演得出。——当然，在每种情形下，还得加上一些纯逻辑的概念和命题。

很早以前就有人猜测，所有传统的纯粹数学或许都能从自然数推导出来，但是这一点的真正发现，却是非常近的事。从前，毕达哥拉斯相信，不仅数学，就是其它各种事理都能从数演绎出来，