

成人高等教育教材

# 地磁学简明教程

倪永生 编

地震出版社



# 地磁学简明教程

倪永生 编

地震出版社

1990

## 内 容 提 要

本书是地球物理专业的一本简明教程，扼要、系统地介绍了地磁学的基本内容，其中包括地磁场的高斯分析法、基本磁场、变化磁场、磁异常场、古地磁场、地磁测量和测量仪器等基础知识，并述及地球电磁感应、地磁-地震关系、地磁起源研究。书末的两个附篇，扼要介绍天体的磁场和地磁场对生物的影响。本书侧重于基本概念的阐述，力求易懂，便于自学。

本书可供地学专业的师生、地学工作者及对地磁场知识有兴趣的读者参考。

## 地磁学简明教程

倪永生 编

责任编辑：张晓梅

责任校对：李 珊

---

北京出版社 出 版

北京复兴路63号

朝阳区小红门印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

全国 各 地 新 华 书 店 经 售

---

850×1168 1/32 11.375印张 304 千字

1990年8月 第一版 1990年8月 第一次印刷

印数 0001—1000

ISBN 7-5028-0254-1/G·6

(642) 定价：2.00元

## 前　　言

地球具有磁场。地磁学乃是研究地球磁场和地球介质磁性质的一门科学，它属于地球物理学的一个分支。地磁学的研究无论是在理论价值上还是在实用方面，都具有重要的意义。通过对地磁场的研究，有助于弄清地球内部介质的物性、组成和运动状况，有助于了解地球的演化历史，有助于认识日地关系。在实用方面，通过对地磁场在地面上分布的详细研究，为找矿和揭示地质构造提供依据。另外，还可望通过对地磁场变化的仔细观测来预报地震和火山喷发。

本书作为地球物理专业的一本简明教材，试图以尽可能易懂的方式系统地介绍有关地磁场观测和研究的基本知识。

尽管已仔细地考虑到本教材的适用对象，在编写过程中尽量少用数学，而致力于基本概念的阐述，但是地磁学既然作为一门定量的物理学科，要想完全避免数学计算是不可能的。特别地，作为地磁场空间分布的数学表达式——高斯级数，是不能不引入的，本书第一章着重介绍这一问题。也许有些读者不太熟悉球谐函数等有关的数学知识，但是只要理解到高斯级数无非是用一些三角函数的组合来逼近一个球面分布的场，那么在接受这一章时不应有太大的困难。在第一章中还择要地叙述了普通物理学中有关磁场的基本知识，它们在后面的各章中都要用到。

一般认为，地表实测的地磁场是由三种不同来源的成分构成的，即：基本磁场、变化磁场和磁异常，它们分别来自地核、地外空间和地壳中的磁源。

第二章在全面介绍了基本磁场的空间分布和时间变化特点之后，用一节的篇幅简要介绍了关于基本磁场起源的一些研究状况。基本磁场起源问题至今尚未完全解决，它已成为近年来地磁

学研究中最活跃的一个领域，但由于它涉及较多的数学知识，考虑到本教材的性质，这里的介绍只能是很粗浅的。

第三章介绍地球变化磁场，其中包括变化磁场的时空分布规律、它的起源、地磁活动性与太阳活动性的关系。由于地球介质具有一定的导电性能，所以当地磁场变化时，在地球介质中将要发生电磁感应现象。研究这一现象，可以获得关于地壳和地幔的电导率分布的信息。由于它的巨大的理论和实用价值，这方面的研究现在越来越受到人们的普遍重视。但是，出于前述同样的理由，本教材关于这一部分的介绍也仅限于一些概括性的描述。第三章最后一节就是关于这一内容的。

第四章讨论地磁场的局部异常，实际上主要介绍进行局部磁异常正反演的基本方法。由于局部磁异常一般是地壳浅部的某些磁性矿物或岩石造成的，所以研究局部磁异常的空间分布，就可以推断地下岩石的磁性强弱。利用这一原理来找矿和研究地质构造，称为磁法勘探，它在生产实际中正获得日益广泛的应用。观测还发现，有时，一个局部地区的地磁场会出现异常的随时间变化，这很可能是由于地下应力、地下水或地热的局部变化引起的，因此人们试图寻找地磁局部异常变化与地震、火山等自然现象之间的联系，探讨用地磁方法来预报地震。不过这方面的研究目前还没有取得令人满意的结果。第四章的最后一节介绍了这方面研究的状况。

人类利用仪器来系统地测量地磁场，只有几百年的历史。但是地球基本磁场随时间的变化却是相当缓慢的，因此要想对地磁场的活动规律获得全面的了解，仅靠这几百年的观测资料是远远不够的。幸运的是，研究发现，在地表的岩石中保存有古代地球磁场的信息。这一发现使得人们有可能通过对天然岩石剩余磁性的测量来研究在漫长的地质年代中地磁场的演变历程。这方面的研究现在已构成了地磁学的一个极为重要的分支——古地磁学。在最近的三十多年中，古地磁研究取得了丰硕的成果，并且对整个地球科学产生了巨大的影响。本书的第五章全面地介绍了古地

磁的研究方法、现有结果和应用价值。

本书的最后一章介绍地磁测量和常见测量仪器的工作原理。需要说明的是，几种现代的精密磁测仪器：核旋仪、光泵磁力仪和超导磁力仪，其工作原理涉及原子物理和超导理论等知识，有些读者在阅读这部分内容时或许会由于缺少必要的预备知识而感到困难，那么只好暂时放弃而满足于对仪器的性能和用途的一般了解。

地磁学研究正处于迅速进展之中，因此，本教程除着重阐述基本原理和基本方法，还力求反映最新的研究动向。

在正文的六章之后，还有两个独立的附篇，分别介绍地球以外的其他天体的磁场和地磁场对地球上生命的影响，供有兴趣的读者参考。研究天体的磁场会给地磁场起源研究带来启发，而刚刚开始的关于地磁场生物效应的研究则可能结出意料不到的科学之果。

本书全文承蒙郭自强教授审阅，谨致谢意。

# 目 录

<b>第一章 地磁场的高斯分析</b> .....	(1)
§ 1.1 磁的基本知识 .....	(1)
一、磁场 .....	(1)
二、介质的磁化 .....	(3)
三、麦克斯韦方程组 .....	(4)
四、磁标势 .....	(5)
五、磁荷与磁偶极子 .....	(6)
六、磁荷观点与分子电流观点的等效性 .....	(9)
七、单位制 .....	(12)
§ 1.2 地磁场的高斯级数 .....	(13)
一、地磁要素 .....	(13)
二、近地空间磁标势的基本方程 .....	(15)
三、拉普拉斯方程的通解 .....	(16)
四、磁标势的高斯级数 .....	(17)
五、地磁三分量的高斯级数 .....	(21)
六、高斯系数的确定 .....	(23)
<b>第二章 地球基本磁场</b> .....	(27)
§ 2.1 基本磁场 .....	(27)
一、地磁场的构成 .....	(27)
二、基本磁场的高斯级数 .....	(28)
三、国际地磁参考场 .....	(30)
四、地磁图 .....	(36)
§ 2.2 地心偶极子场 .....	(44)
一、地心偶极子 .....	(45)
二、地磁坐标 .....	(49)
三、偶极子磁场的重要特点 .....	(51)
§ 2.3 非偶极子场 .....	(53)

一、非偶极子场的地面分布形态	(53)
二、非偶极子场的数学模拟	(58)
三、场源深度的分析	(62)
§ 2.4 基本磁场的长期变化	(65)
一、长期变化现象	(65)
二、长期变化的特征	(70)
§ 2.5 基本磁场起源问题	(76)
一、对地磁起源理论的基本要求	(76)
二、关于地磁起源的若干假说	(77)
三、液核发电机理论	(78)
<b>第三章 地球的变化磁场</b>	(89)
§ 3.1 变化磁场的分类	(90)
一、平静变化与干扰变化	(90)
二、干扰变化的分类	(91)
§ 3.2 地磁活动性与地磁指数	(96)
一、地磁指数	(96)
二、磁静日与磁扰日	(100)
三、地磁活动性及其与太阳活动性的关系	(101)
§ 3.3 太阳静日变化 $S_i$	(105)
一、 $S_i$ 的提取	(105)
二、 $S_i$ 的调和分析	(107)
三、 $S_i$ 的时空分布规律	(109)
四、 $S_i$ 的球谐分析	(111)
五、 $S_i$ 的电流体系	(115)
六、电离层简介	(119)
§ 3.4 磁暴与地磁脉动	(121)
一、磁暴的形态	(121)
二、磁暴的时空分布规律	(122)
三、磁暴时变化的球谐分析	(123)
四、磁暴形成的物理机制	(124)
五、地磁脉动	(127)
六、磁层简介	(129)

§ 3.5 地球电磁感应	.....	(130)
一、地球电磁感应问题的基本原理	.....	(131)
二、地球内部的电导率分布	.....	(134)
三、电导率异常及海洋的影响	.....	(136)
<b>第四章 磁异常场</b>	.....	(142)
§ 4.1 矿物和岩石的磁性	.....	(143)
一、物质磁性	.....	(143)
二、铁磁质的磁化特性	.....	(145)
三、矿物和岩石的磁性	.....	(149)
§ 4.2 磁异常的正演	.....	(152)
一、简化条件	.....	(152)
二、坐标系的设立	.....	(153)
三、磁体磁场的普遍公式	.....	(154)
四、几种常见的规则形体的磁场	.....	(157)
五、复杂形体的正演方法	.....	(164)
§ 4.3 实测磁异常资料的处理和转换	.....	(167)
一、资料的匀滑	.....	(167)
二、地形校正	.....	(168)
三、解析延拓	.....	(169)
四、导数换算	.....	(171)
五、磁异常各分量间的换算	.....	(172)
六、磁异常的频谱计算	.....	(174)
七、磁异常在频率域中的处理和转换	.....	(175)
§ 4.4 磁异常的反演	.....	(178)
一、反演的定性分析	.....	(178)
二、反演的定量计算	.....	(181)
三、频率域中的磁异常反演	.....	(185)
§ 4.5 地磁场的局部变化	.....	(187)
一、压磁效应	.....	(190)
二、感应磁效应	.....	(193)
三、利用空间相关分析辨认地磁局部异常变化	.....	(197)
<b>第五章 古地磁</b>	.....	(200)

§ 5.1 岩石天然剩余磁化强度	(201)
一、天然剩磁的形成机制	(201)
二、剩磁的稳定性	(205)
§ 5.2 剩磁测量与稳定性检验	(207)
一、岩石标本的采集	(208)
二、坐标系转换	(209)
三、磁清洗	(211)
四、剩磁稳定性与原生性检验	(213)
§ 5.3 古地磁场的测定	(219)
一、古地磁场强度的测定	(219)
二、古地磁场方向的求得及其精度评定	(225)
三、古地磁场的虚偶极矩与虚地磁极的计算	(228)
§ 5.4 古地磁场	(230)
一、地磁场偶极矩的变化	(230)
二、地心轴向偶极子场假定	(234)
三、地磁场漂移	(236)
四、关于非偶极场	(237)
五、地磁场倒转	(239)
§ 5.5 古地磁研究成果的应用	(247)
一、大陆漂移和板块运动的古地磁证据	(247)
二、海底扩张的古地磁证据	(252)
三、古地磁学的其他应用	(257)
四、岩石磁各向异性及其在构造分析中的应用	(260)
<b>第六章 地磁测量和磁测仪器</b>	(263)
§ 6.1 地磁场测量	(264)
一、地磁台址的选择和台站观测	(264)
二、野外观测	(267)
三、海洋磁测、航空磁测和卫星磁测	(269)
四、井中磁测	(270)
§ 6.2 地磁经纬仪和水平强度扭力磁力仪	(271)
一、偏角磁力仪	(271)
二、地磁感应仪	(274)

三、高斯绝对法测地磁场水平强度.....	(276)
四、水平强度扭力磁力仪.....	(281)
<b>§ 6.3 磁变仪和磁秤.....</b>	<b>(284)</b>
一、偏角磁变仪.....	(285)
二、水平强度磁变仪.....	(289)
三、垂直强度磁变仪.....	(292)
四、磁变仪的基值与格值.....	(295)
五、磁秤.....	(296)
<b>§ 6.4 磁通门磁力仪、核旋仪和光泵磁力仪.....</b>	<b>(298)</b>
一、磁通门磁力仪.....	(298)
二、核旋仪和核旋分量仪.....	(304)
三、光泵磁力仪.....	(308)
<b>§ 6.5 岩石磁性测量仪器.....</b>	<b>(313)</b>
一、磁秤法测量岩石的磁性.....	(314)
二、用无定向磁力仪测量岩石剩余磁化强度.....	(316)
三、测量岩石剩磁的旋转磁力仪.....	(318)
四、超导磁力仪.....	(319)
五、磁化率仪.....	(320)
<b>附篇一 天体磁场简介 .....</b>	<b>(323)</b>
一、恒星磁场.....	(323)
二、太阳磁场.....	(326)
三、行星和月球的磁场.....	(331)
四、行星级和星际空间磁场.....	(333)
<b>附篇二 地磁生物学 .....</b>	<b>(336)</b>
一、地磁场对生命活动的影响.....	(336)
二、人工磁环境下的生物实验.....	(341)
三、地磁场与生物进化.....	(344)
<b>参考文献 .....</b>	<b>(348)</b>

# 第一章 地磁场的高斯分析

地磁场是一个复杂的磁场，它在空间上的分布是复杂的，它随时间的变化也是复杂的。要想对地磁场进行详细的研究，必须用一定的数学形式表达它。数学家同时又是地磁学家的高斯（K.F.Gauss）提出，可采用球谐级数的形式来描述近地空间地磁场的时空分布。他的这种分析方法，称为地磁场的高斯分析。至今，这仍是地磁场研究的最基本的方法。

本章先复习一下有关磁学的基本知识，然后介绍地磁场的高斯级数以及如何确定高斯系数。

## § 1.1 磁的基本知识

### 一、磁场

磁场是一种客观的物理实在。空间某区域内是否存在磁场，归根结底，可以通过测量运动电荷的受力情况来确定。描述磁场的最基本的物理量是磁感应强度 $B$ ，它可用下式来定义：

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (1-1-1)$$

这里 $\mathbf{F}$ 是运动电荷所受的磁力， $\mathbf{v}$ 为电荷的运动速度， $q$ 为电荷的带电量。上式通常称为洛伦兹力公式。

如果将一根载有直流电流 $I$ 的导线 $L$ 置入磁场中，由于导线中的自由电子作定向运动，从而受到洛伦兹力作用，自由电子通过与晶格上的原子实的碰撞而将力传给了导线，从而载流导线也要受到磁场所的作用。由式（1-1-1）可以导出，置于磁场 $B$ 中的一段载流导线所受作用力为：

$$\mathbf{F} = \int_L I dl \times \mathbf{B}. \quad (1-1-2)$$

式中  $Idl$  常称为电流元（参见图 1-2）。此式称为安培力公式，它在历史上实际是从安培的一些实验结果导出的。

理论和实验都证明，在运动电荷、通电导线及磁性物体周围都存在有磁场。一个速度为  $v$  ( $v \ll c$ ,  $c$  为光速) 的匀速运动电荷  $q$  所激发的磁场可由下式确定：

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

(1-1-3)

式中  $r$  为电荷所在点至空间某点  $P$  的距离矢量（图 1-1）， $\mathbf{B}$  即为  $P$  点的磁感应强度， $\mu_0$  为真空磁导率。

一段载流导线  $L$  所激发的磁场由下式确定：

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{Idl \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (1-1-4)$$

式中  $r$  为电流元  $Idl$  至场点  $P$  的距离矢量（图 1-2），此式称为毕奥-萨伐尔定律。

通常采用磁感应线来形象地描绘磁场的空间分布，磁感应线在空间某点的切线方向即为该点的磁场方向，磁感应线越密的地方的磁场越强。磁感应线总是闭合曲线。

为了后续课程的需要，这里要特别提及一个载流小线圈所激发的磁场。由式 (1-1-4)，可以算出一个平面载流圆线圈在其轴线上很远的地方所激发的磁场为：

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{IS}{r^3}. \quad (1-1-5)$$

式中  $S$  为线圈的面积矢量，它的方向由右手螺旋法则确定（见图



图 1-1 场点与运动电荷的相对位置

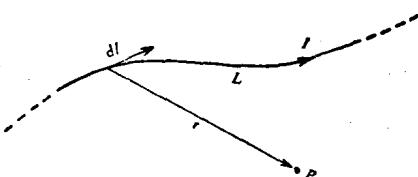


图 1-2 场点与电流元的相对位置

1-3)。

常记

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S}. \quad (1-1-6)$$

$\mathbf{m}$ 称为这个载流线圈的磁矩。于是，式(1-1-5)可以写成：

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mathbf{m}}{r^3}.$$

(1-1-7)

## 二、介质的磁化

在物质分子中，电子的绕核运动，或由于其他原因导致的环形运动，也将形成一种环形电流，称之为分子电流，相应的磁矩称为分子电流磁矩。分子电流也要激发磁场。

如果将一块介介质置于磁空间中，则介质中的分子电流将受到磁场作用，其结果是导致介质呈现出磁化现象。磁化的强弱程度用磁化强度 $\mathbf{M}$ 来表示， $\mathbf{M}$ 定义为单位体积内各分子电流磁矩 $\mathbf{m}$ 的矢量和，即 $\mathbf{M} = \Sigma \mathbf{m}/\Delta V$ 。

为研究方便，常引入一个辅助的磁学量 $\mathbf{H}$ ， $\mathbf{H}$ 称为磁场强度，它的定义为：

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \quad (1-1-8a)$$

或：

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}. \quad (1-1-8b)$$

$\mathbf{M}$ 与 $\mathbf{H}$ 之间存在一定的函数关系，记为：

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}. \quad (1-1-9)$$

这里 $\chi_m$ 称为介质的磁化率。

实验表明，对于各向同性介质， $\chi_m$ 是与 $\mathbf{H}$ 无关的常数；对于均匀介质， $\chi_m$ 在介质中处处相等。

如果令

$$\mu_r = 1 + \chi_m, \quad (1-1-10)$$

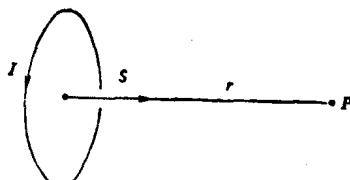


图1-3 载流线圈的面积矢量

$$\mu = \mu_0 \mu_r, \quad (1-1-11)$$

则式 (1.1.8 b) 又可写成:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}, \quad (1-1-12)$$

这里  $\mu_r$  称为介质的相对磁导率,  $\mu$  称为介质的磁导率。

对于真空而言, 因  $M = 0$ , 故取  $\chi_m = 0$ ,  $\mu_r = 1$ ,  $\mu = \mu_0$ , 从而在真空中,

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (1-1-13)$$

磁场中有能量, 单位体积内的磁能称为磁能密度  $\omega$ , 它等于:

$$\omega = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}. \quad (1-1-14)$$

### 三、麦克斯韦方程组

关于电磁场的最普遍的规律是麦克斯韦方程组。

麦克斯韦方程组的积分形式为:

$$\left\{ \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \iiint \rho_f dv, \quad (1-1-15 \text{ a}) \right.$$

$$\left\{ \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}, \quad (1-1-15 \text{ b}) \right.$$

$$\left\{ \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad (1-1-15 \text{ c}) \right.$$

$$\left\{ \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint \left( \mathbf{j}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s}. \quad (1-1-15 \text{ d}) \right.$$

在连续介质内部 (真空也视为一种“介质”), 麦克斯韦方程具有如下的微分形式:

$$\left\{ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f, \quad (1-1-16 \text{ a}) \right.$$

$$\left\{ \nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1-1-16 \text{ b}) \right.$$

$$\left\{ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1-1-16 \text{ c}) \right.$$

$$\left\{ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (1-1-16 \text{ d}) \right.$$

在两种介质的分界面上，电磁场量往往发生跃变，并具有如下的边值关系：

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_f; & (1-1-17 \text{ a}) \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0; & (1-1-17 \text{ b}) \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0; & (1-1-17 \text{ c}) \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{a}_f. & (1-1-17 \text{ d}) \end{array} \right.$$

上述各式中， $\mathbf{E}$ 为电场强度， $\mathbf{D}$ 为电位移矢量， $\partial \mathbf{D} / \partial t$ 为位移电流密度， $\rho_f$ 为自由电荷体密度， $\mathbf{j}_f$ 为传导电流体密度， $\sigma_f$ 为自由电荷面密度， $\mathbf{a}_f$ 为面传导电流密度， $\mathbf{n}$ 为界面法向单位矢量， $n$ 从介质1指向介质2。

式(1-1-15 a)与(1-1-15 c)分别称为电和磁的高斯定理，式(1-1-15 b)即为法拉第电磁感应定律，式(1-1-15 d)称为修正的安培环路定律。

麦克斯韦方程组是处理一切电磁现象的根本出发点，当然也是处理地磁与地电现象的根本出发点。

对于各向同性的线性介质， $\mathbf{D}$ ， $\mathbf{E}$ ， $\mathbf{j}_f$ 之间还存在如下的本构方程：

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (1-1-18)$$

$$\mathbf{j}_f = \sigma \mathbf{E}. \quad (1-1-19)$$

这里 $\epsilon$ 为介电常数， $\sigma$ 为电导率。

式(1-1-19)即微分形式的欧姆定律，式(1-1-18)则与式(1-1-12)相当。并且，类似于式(1-1-11)，有：

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r. \quad (1-1-20)$$

这里 $\epsilon_0$ 为真空介电常数， $\epsilon_r$ 为介质的相对介电常数。

#### 四、磁标势

原则上，根据一定的边界条件求解微分方程组(1-1-16)，就可以获得电磁场的分布规律。但是实际上，直接求解这个方程组是困难的。因此，人们常常采用一些数学手段，在适当的条件下，将它们转化为标量的微分方程，这样解起来要容易得多。

现在考虑这样一个空间区域，在此区域内，不存在传导电流

$j_f$ , 也不存在位移电流  $\frac{\partial D}{\partial t}$ , 或位移电流很小以至于可以忽略不计, 则方程 (1-1-16 d) 简化为:

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0. \quad (1-1-21)$$

如果这个区域又是单连通的, 则根据数学中的矢量场理论, 一定可以找到一个单值标量函数  $W$ , 使得:

$$\mathbf{H} = -\nabla W. \quad (1-1-22)$$

这个标量函数  $W$ , 在磁学中称为磁标势。在直角坐标系、柱坐标系和球坐标系下, 式 (1-1-22) 可分别写成:

$$\mathbf{H} = -\left(\frac{\partial W}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial W}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial W}{\partial z}\mathbf{e}_z\right), \quad (1-1-23 a)$$

$$\mathbf{H} = -\left(\frac{\partial W}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial \lambda}\mathbf{e}_\lambda + \frac{\partial W}{\partial z}\mathbf{e}_z\right), \quad (1-1-23 b)$$

$$\mathbf{H} = -\left(\frac{\partial W}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta}\frac{\partial W}{\partial \lambda}\mathbf{e}_\lambda\right). \quad (1-1-23 c)$$

这里  $(x, y, z)$ 、 $(\rho, \lambda, z)$ 、 $(r, \theta, \lambda)$  分别代表空间一点的直角坐标、柱坐标与球坐标。 $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ 、 $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\lambda, \mathbf{e}_z)$ 、 $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\lambda)$  分别为三种坐标系下的基矢量。

对于线性介质或真空, 可将式 (1-1-22) 代入式 (1-1-12), 得:

$$\mathbf{B} = -\mu \nabla W. \quad (1-1-24)$$

再将此式代入式 (1.1.16 c), 对于真空与均匀介质, 得:

$$\nabla \cdot \nabla W = 0,$$

或记为

$$\nabla^2 W = 0. \quad (1-1-25)$$

式 (1-1-25) 就是磁标势所满足的微分方程。这个方程称为拉普拉斯方程。关于它的解法, 在数学上已有详细的研究。解出这个方程得磁标势  $W$  的表达式, 进而由式 (1-1-24) (对于真空, 取  $\mu = \mu_0$ ), 就可得到磁场  $\mathbf{B}$ 。

## 五、磁荷与磁偶极子