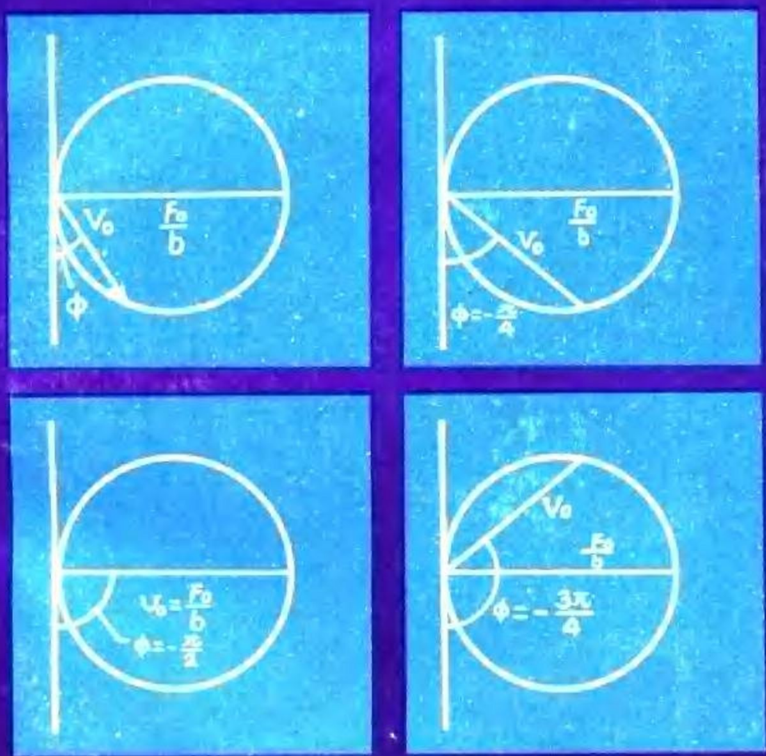
理论力学

沈光平　编



云南大学出版社

责任编辑：张 世 鸾
封面设计：丁 群 亚

理 论 力 学

沈光平　编

*

云南大学出版社出版发行
（云南大学校内）
昆明市龙院印刷所印刷

*

开本：850×1168／32　印张：18.43　字数：414千
1991年4月第1版　1991年4月第1次印刷
印数：1500册
ISBN 7-81025-060-4/O·4　定价：6.60元

前　言

我校函授和夜大学78年恢复以来一直苦于找不到一本适宜于成人业余学习（特别是自学）的理论力学教材．编者参照1980年教育部颁发的《综合大学物理专业（四年制）理论力学教学大纲》（以下简称“大纲”），考虑到成人业余学习的特点，将自己在函授和夜大学物理专业讲授理论力学课程的讲稿修改补充编写成讲义，权且充作教材．经多次使用，现决定正式出版．出版前，编者又作了必要的修改和补充．本书便是在讲义的基础上，经过多次使用修改编写成的．

理论力学是一门基础理论课，它在普通物理力学的基础上，运用高等教学，全面系统地阐述宏观机械运动的基本概念和基本规律．通过本门课程的各个教学环节，应能使学生对力学的基本内容有较完整的认识，并掌握分析和处理力学问题的一般方法，为学习后继的理论物理和相关的工程技术课程打下较坚实的基础．学好本门课程还有助于提高理论分析和抽象思维能力，巩固所学的高等数学知识．

编者希望这本教材既在深度和广度方面符合“大纲”的基本要求，又适宜于成人业余学习（特别是自学）．为此，在编写形式，内容安排，基本概念和基本规律的阐述，例题分析和习题选取等方面，作了一些改革试探．

为了让读者在有限的时间内，“主动有效”地学习，本书的每章、节前都编入了内容提要和目的要求，每章末都给出了与目的要求相一致的小结．

历年来，学生在学习本门课程的过程中反映出来的许多难读的内容，编者都从便于自学的角度作了处理。

"解题难"，这是初学理论力学者的一个共同性问题；业余学习无习题课，解题更难。为了帮助读者减少这方面的困难，本书编有较多的例题。通过例题，对如何应用所学理论来处理实际问题，如何分析和解算习题，都作了较详细的讨论。理论力学习题灵活、多样、很难纳入某几种固定的模式，我们只能尽量将其分为几大类，指出各类习题的共同的特点和求解的一般方法，目的在于帮助读者提高独立分析和解决问题的能力。此外，还将习题分为必做和选做两部分。必做题编在每章之末，都给出了解题提示和答案。要求读者参考提示，独立完成全部作业。选做题编在最后，只给出答案，其中很多是近年来国内外研究生入学试题，供有余力的读者选做。

本书把"大纲"中质点力学一章分为质点运动学和质点动力学两章，这是为了便于函授大学的面授。另外，还将平动参考系的速度和加速度合成问题编入非惯性参考系质点力学，列为第三章。编者试图使两类参考系的质点力学分别集中各形成一个完整的体系，便于对这两种质点力学规律进行分析、对照，减少学生在学习非惯性系力学时常有的一些困难；同时也为阐述质点系力学和刚体力学中的某些问题打下一定的基础。

质点系力学和刚体力学与"大纲"的要求是基本一致的；对非重点内容比一般教科书讲得更略。

分析力学部分只要求学生掌握基本内容，所以，关于拉格朗日方程的重要应用——微振动，只详细讨论两个自由度的问题；关于求解正则方程的理论，重点介绍了泊松括号和

泊松定理，其他理论则只提及一个梗概。

“大纲”中的非基本要求（即可少讲或不讲）的内容，大部分未编入。其中有些内容我们以例题的形式处理，有些内容则指明参考书籍，供有余力的读者查阅。本书中所有打星号部分，只供函授生参考，不要求掌握。

编者希望这本教材既在深度和广度方面符合“大纲”的基本要求，又具有适宜于成人业余学习的特点。但是由于水平有限，错漏和不足之处肯定不少，竭诚欢迎读者和同行专家批评指正。

承蒙我校函授夜大部和出版社对本书的出版给予了大力的支持和帮助，物理系罗耀煌同志就原稿提供了许多宝贵的修改意见，谨致忱谢。

编者　沈光平

1990年6月于云南大学

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第一章　质点运动学

【内容提要】质点运动学仅从现象上描述运动质点的力学特征，不涉及物体间的相互作用（力）和物体的固有属性（质量）。运动学的主要任务是借助数学工具，由某些运动特征量（例如速度），去确定其它运动特征量（例如加速度和位置坐标）。

本章将讨论在各种常用正交坐标系中，描述质点运动的方法，即如何确定运动质点的位置、速度、加速度与时间的关系以及质点运动的轨迹。为了本章及尔后的需要，我们还将介绍矢量微商算符这一重要数学工具。

【目的要求】学完本章后，读者应能熟练掌握描述质点运动的方法。具体要求如下：

1．确切理解位置（运动方程）、位移、路程、速度、加速度等运动特征量的物理意义以及它们之间的关系，熟练掌握在直角坐标系中确定这些特征量和轨迹方程的方法。

2．确切理解径向速度、横向速度、径向加速度和横向加速度的物理意义，熟练掌握在平面极坐标系中确定速度、加速度和轨迹方程的方法。

3．确切理解切向加速度和法向加速度的物理意义，熟练掌握利用自然坐标系确定平面曲线运动中质点的速度和加速度的方法。

4．牢固掌握单位矢量微商和矢量微商算符公式。

§ 1.1 运动方程和轨迹方程

本节将主要讨论位置和轨迹的概念以及在几种常用正交坐标系中确定运动质点的位置、运动方程和轨迹方程的方法。

(一) 运动质点的位置·位置矢量

本章的研究对象（客体）是质点。质点是具有质量的几何点。其主要特征是具有质量和占有空间位置。这是一个理想模型，只有那些仅作平动的或者形状和大小可以忽略不计的客体方能简化为质点。

质点运动学的重要任务之一，就在于确定运动质点的空间位置与时间的关系(运动规律)。普通物理力学已经详述过描述运动必须选取参考系和什么是参考系，现在我们要强调指出的是，质点的位置，与参考系的选择有关。选取不同的参考系，同一质点的位置与时间的关系可能完全不同。所以，研究质点的运动规律，首先必须明确选取何物为参考系。参考系的选择，应由所研究的问题来决定。例如研究人造地球卫星相对于地球的运动，应当选地球为参考系；研究行星相对于太阳的运动，应当选太阳为参考系。

在给定的参考系中，为了定量描述质点的运动，还必须选取恰当的坐标系。固定在某一参考系中的坐标系，具有该参考系的一切运动学性质。所以，在同一参考系中，选用各种不同类型的坐标系，不会改变质点的运动性质。但是，不同参考系中的坐标系（即使是同一种），性质也可能完全不同。因此，为了行文简洁，今后我们选用的坐标系本身也就

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

是参考系。

通常可以这样来选取坐标系：直线运动，选用直线坐标系；平面运动，可以选用平面直角坐标系、平面极坐标系或自然坐标系；空间运动，可以选用三维直角坐标系，柱面坐标系或球面坐标系等。究竟选用何种坐标系为宜，应根据具体问题确定，以方便解决问题为原则。

现在就让我们来讨论如何确定运动质点的位置。设有一运动质点，t 时刻通过空间的 P 点，见图 1.1。假定参考系已经给定(例如是地球)，如何描写该质点在 P 点的位置呢？力学中最常用的方法是在给定的参考系上**选一固定点** O 作为坐标原点，自 O 点画一矢量 $\mathbf{r}$ 到 P 点，用矢量 $\mathbf{r}$ 来确定 P 点的位置。因为 $\mathbf{r}$ 定量地给出了 P 点相对于 O 点的距离和方向。**确定质点位置的矢量** $\mathbf{r}$ 称为"位置矢量"，简称"位矢"。质点在空间连续运动，位矢的大小和方向也随之连续变化，所以，一般地说，位矢是时间 t 的连续函数。通常将位矢记为

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t). \qquad (1.1.1)$$

只要给定位矢与时间的具体函数解析式，运动质点在任意时刻的位置便完全确定了，即确定了质点的运动规律。

为方便数学运算，通常要选择一适当的坐标系，将矢量形式的 (1.1.1) 式分解为坐标分量形式，得到质点在相应坐标系中的位置坐标。位置坐标与时间的函数关系式称为运动方程，它们给出了质点在任一时刻所占据的位置，即质点的运动规律。下面讨论在几种常用坐标系中运动方程的一般表达式。

（二）运动方程的直角坐标形式

最常用的坐标系是直角坐标系，如图 1.1 所示。以定点 O 为原点，取一三维直角坐标系固定在给定的参考系中，分

别用单位矢量 $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$ 表示 x、y、z 三条坐标轴的正向。

显然，位矢 $\mathbf{r}$ 的分量表达式为

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}. \qquad (1.1.2)$$

$\mathbf{r}$ 在三条坐标轴上的分量 x、y、z 便是 P 点的位置坐标。在一般情况下，它们都是时间 t 的函数，通常记为

$$\left.\begin{array}{l} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t). \end{array}\right\} \qquad (1.1.3)$$

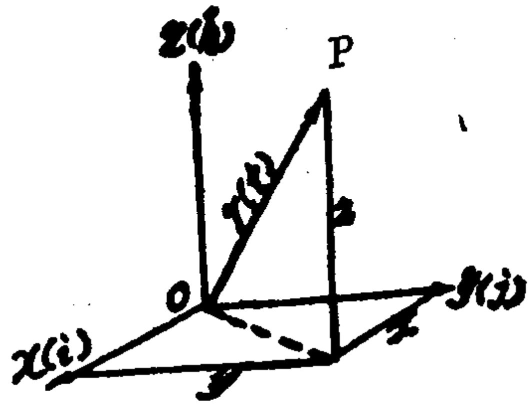


图 1.1

(1.1.2)和(1.1.3)就是质点在三维直角坐标系中的运动方程。一旦 $x(t)$、$y(t)$和 $z(t)$ 的具体解析式给定，质点的运动规律就完全确定了。

如果质点在平面(例如在 xy 平面)上运动，可在(1.1.2)式中令 $z=0$，得

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}. \qquad (1.1.4)$$

在 (1.1.3) 式中令 $z=0$，得

$$\left.\begin{array}{l} x=x(t), \\ y=y(t). \end{array}\right\} \qquad (1.1.5)$$

(1.1.4) 和 (1.1.5) 是质点在平面直角坐标系中的运动方程。在平面曲线运动的情况下，有时选用极坐标系或自然坐标系是很方便的。

（三）运动方程的平面极坐标形式

如果质点在平面内运动，那么图1.1中的位矢 $\mathbf{r}$ 只可能

发生两种变化：r 的大小随时间改变，同时 r 在平面内绕定点 O 旋转（即 r 的方向变化）。因此，用 r 的大小 r 和 r 与某一固定轴的夹角 θ 便能完全确定 P 点的位置。**由 r 和 θ 以及它们的单位矢量构成的坐标系称为平面极坐标系**（见图1.2）。定点O 称为极点，固定轴称为极轴，r 和 θ 是 P 点的极坐标。既然位矢 r 是时间 t 的函数，

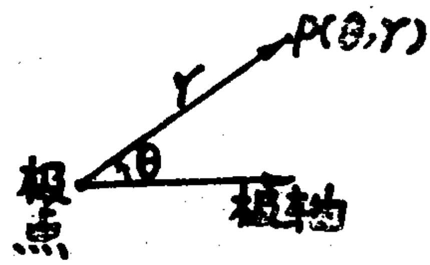


图 1.2

r 和 θ 一般说来也同为时间的函数，通常记作

$$\left.\begin{array}{l} r=r(t), \\ \theta=\theta(t). \end{array}\right\} \quad (1.1.6)$$

(1.1.6) 式就是质点在极坐标系中的运动方程。我们规定自极轴沿逆时针量得的角 θ 为正。

（四）自然坐标系和运动学方程

在平面运动情况下，如果质点的轨迹已知，采用平面自然坐标系来描述运动是很方便的。设质点沿给定曲线 AB 运动（见图1.3），t 时刻位于 M 点，**由质点所在处曲线的切线和法线以及单位切线矢量 t 和单位法线矢量 n 所构成的坐标系，称为平面自然坐标系**。通常规定质点运动的方向为切线的正方向，法线的正向则总是指向曲线的内侧。随着质点运动，自然坐标系的方向不断改变，所以 t 和 n 都是时间的函数。

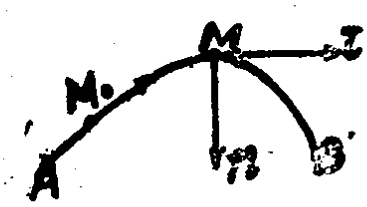


图 1.3

为了确定质点在 t 时刻的位置，可在曲线 AB 上任取一定点 M_0，用弧长 $s=\overset{\frown}{M_0M}$ 来确定质点的位置。弧长 s 称为弧坐标。它也是时间的函数，一般记作

$$s=s(t), \tag{1.1.7}$$

这就是用弧坐标表示的质点的运动方程。

至此，我们应该明白，质点的运动方程，就是在给定坐标系中，以时间 t 为自变量，位置坐标为因变量的函数解析式。但是在某些情况下，时间 t 并不明显地出现在方程中，例如作圆周运动的质点，其位置坐标为

$$x=a\cos\theta, \quad y=a\sin\theta,$$

但是**参变量 θ 是时间 t 的函数**，它们同样是质点的运动方程。总而言之，无论位置坐标等于时间 t 的显函数还是隐函数，都称为质点的运动方程。

在经典力学中，我们所研究的运动质点，在任意给定时刻，只能占据空间某一唯一确定的位置；不可能有两个或两个以上的质点占据同一位置；并且质点不可能由某一位置突然跃变到另一位置。所以说质点的位置是唯一的，位置变化是连续的。这种物理上的客观实际决定了运动方程中的所有函数（无论是矢量还是标量）都是时间 t 的单值、连续函数，而且一般说来都是可微的。

（五）运动方程的求法

在运动学阶段，确定质点的运动方程通常有两种方法：第一，借助质点在任意时刻的位矢 $\mathbf{r}$ 与坐标轴的几何关系，用几何方法写出位置坐标与时间 t 的函数解析式，我们将这种方法称为几何法。第二，如果能由其它条件确定质点的速度与时间的函数关系和初始条件，将速度对时间积分，也能求

得质点的运动方程，我们称这种方法为解析法。

待到第二章，我们还将讨论通过解运动微分方程求质点运动规律的方法。

（六）轨迹和轨迹方程

既然质点的位置是连续变化的，那么把运动质点各时刻的位置连接起来必定是一条连续曲线。这样的曲线称为质点的运动轨迹。轨迹曲线的形状，由所谓“轨迹方程”决定。

求轨迹方程通常有两种方法：

第一，由质点的运动方程消去时间 t 或含 t 的参变量（例如 $\theta=\omega t$），便得到轨迹方程。所以，欲求轨迹方程必先求出运动方程。

第二，如果质点的速度与时间 t 的函数关系给定，也可以由速度分量的微分表达式消去时间的微分因子，得到轨迹微分方程。再将轨迹微分方程积分便直接得到轨迹方程。如果质点的加速度与时间的函数关系已知，由加速度积分一次求出速度后，仍可用此法求轨迹方程。在特殊情况下，还可以用给定的公式求轨迹（详见§2.8）。

〔例1.1〕设椭圆规尺 AB 的端点 A 和 B 沿导槽 ox 和 oy 滑动（见图1.4）．试求 M 点的运动方程和轨迹方程。设 $\overline{BM}=b$，$\overline{AM}=a$。

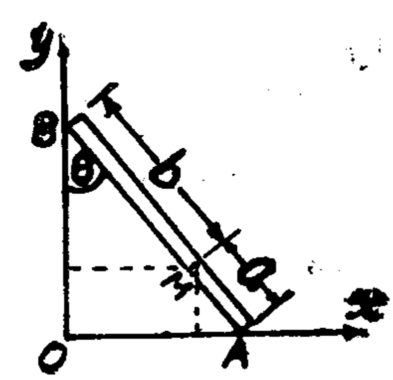


图 1.4

〔解〕(1) 求运动方程

必须把 M 点放在一般位置上，图中标出了 M 点在 t 时刻的位置．设该时刻 $\overline{BA}$ 与 oy 轴的夹角为 θ，显然，θ 是时间 t 的函数。由

图所显示的几何关系得

$$x=b\sin\theta,\quad y=a\cos\theta. \tag{1}$$

这就是 M 点的运动方程。

(2) 求轨迹方程

由运动方程(1)消去 θ（同时消去了时间 t），便得到轨迹方程。将(1)式改写成

$$\frac{x}{b}=\sin\theta,\ \frac{y}{a}=\cos\theta;$$

两式平方相加，得

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1, \tag{2}$$

这就是质点的轨迹方程。显然，M 点沿椭圆轨道运动。

〔例1.2〕半径为 r 的车轮在直线轨道上滚动而不滑动。已知轮心 C 以恒速 v 运动，求轮缘上一点 M 的运动方程。

〔解〕如图 1.5 所示，取一平面直角坐标系，令 ox 轴沿轮滚动方向。由于 oy 轴的位置可以任意选取，我们令 $t=0$ 时轮心 C 位于 oy 轴上，M 点恰与 O 点重合。经过时间 t，M 点的位置坐标为 x、y，M 点移动的路程是弧 $\overset{\frown}{AM}$，轮不滑动，应有 $\overset{\frown}{AM}=\overline{OA}$。由图中显示的几何关系得

$$\left.\begin{aligned}x&=vt-r\sin\varphi,\\ y&=r-r\cos\varphi.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

又有

$$\varphi=\frac{\overset{\frown}{AM}}{r}=\frac{\overline{OA}}{r}=\frac{vt}{r},$$

代入(1)式得

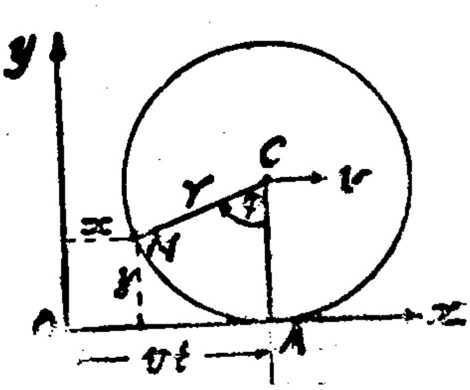


图 1.5

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com