线性代数与复变函数

王日爽　张福润

工程数学

中央广播电视大学出版社

工 程 数 学
线性代数与复变函数
王日爽　张福渊　编
*
中央广播电视大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
一 二 〇 一 工 厂 印 刷
*
开本 787×1092　1/32　印张 9.875　千字205
1986年12月第1版　1987年3月第1次印刷
印数　1—38,000
书号：13300·52　　定价：1.45 元

前　言

本书是为中央广播电视大学1984级机电类和管理专业准备的教材. 为了能在很少的学时内掌握最基本的教学内容, 笔者按照电视大学的教学要求, 参照1980年制订的高等工业学校工程数学教学大纲(草案), 并且结合多年的教学经验, 编写了这本书. 全书由两个部分组成. 第一篇线性代数由王日爽编写; 第二篇复变函数与拉氏变换由张福渊编写.

第一篇线性代数包括: 行列式, 向量空间, 矩阵, 线性方程组, 二次型, 线性变换及线性空间. 其中以消元法(即初等变换)为主线, 贯穿绝大部分内容. 并且每节都有与内容密切配合的例题, 而所附的习题是正文内容的深化和补充. 最后一章为整篇内容的完整性所编, 写得扼要而未展开, 可作选学内容.

第二篇复变函数与拉氏变换包括: 复数与复平面, 解析函数, 复变函数的积分, 留数, 拉氏变换及其应用. 每章都配有相当数量的例题和习题, 可以帮助读者理解基本概念和基本理论、掌握基本方法.

在内容的选择上, 笔者既要保留本学科的基本概念、基本理论和方法, 同时又考虑到学以致用的目的. 在编写方法上, 笔者力图使本书深入浅出、精练而又通俗易读. 以便使本书可作为一般工科大专学校的教材, 也可作为一本自学入门书. 由于笔者水平有限, 缺点错误在所难免, 恳请读者批评指正.

本书编写过程中, 得到了中央广播电视大学数学组和北京航空学院数学教研室的大力支持. 特别是北航徐兵同志仔细审阅了第一篇, 中央电大冯泰、王晴云、梁映森等同志仔细看了书稿, 提出了许多极为宝贵的意见; 特在此向他们致以衷心的感谢.

编　者

一九八四年九月

于北京航空学院

目　录

第一篇　线性代数

第二篇　复变函数与拉氏变换

第一篇 线性代数

引 言

线性代数是数学中的一个古老分支，它同微积分有着同样的地位、同等重要．这不仅是因为它在实际中有着许多直接的应用，而且还因为它常被间接地引用，为数学的其它许多分支以及别的学科所借鉴．因此，学好线性代数就能为学好专业打好基础，就能掌握一种非常有用的数学工具．

其实，对线性代数我们并不陌生，在中学数学中就已接触过．例如，解二元一次联立方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = c_1 & (1) \\ a_{21}x + a_{22}y = c_2 & (2) \end{cases}$$

在解析几何中我们知道，方程(1)与(2)在 xOy 坐标平面上各代表一条直线．一般地说，这两条直线有唯一的交点．用二阶行列式可以把交点的坐标写出来，即

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \\[2ex] y = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{12} & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \end{cases}$$

其中 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$．但是，在系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

的情形下，情况就不那么简单了．此时，从几何上看，由方程(1)和(2)所代表的两条直线平行或重合．何时平行？何时重合？这可分别由所给的两个方程的系数及常数项之间的关系来判别：在

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

的情形下，两条直线平行，从而无交点，也就是说方程组(1)－(2)无解；在

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{c_1}{c_2}$$

的情形下，两条直线重合，说明方程组(1)－(2)有无穷多组解，即重合的直线上的所有点的坐标都是解．

兹再举一例：已知 xOy 坐标平面上有三点(x_1, y_1)，(x_2, y_2)和(x_3, y_3)，欲通过这三点作一条对称轴平行于 y 轴的抛物线，问此抛物线的方程如何？

我们知道，这种抛物线方程的一般形式为

$$y = ax^2 + bx + c \tag{3}$$

而所要求的抛物线，就是在满足问题的条件下，确定出方程(3)中的系数 a, b 和 c．为此，将已知的三点代入(3)式，即有

$$\begin{cases} y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \\ y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c \end{cases} \tag{4}$$

现在把 a, b 和 c 视作未知数，由(4)式的改写形式，即三元一次联立方程组

$$\begin{cases}x_1^2a+x_1b+1\cdot c=y_1\\x_2^2a+x_2b+1\cdot c=y_2\\x_3^2a+x_3b+1\cdot c=y_3\end{cases}\tag{5}$$

中解出来(也就是待定系数). 我们引用三阶行列式解方程组(5)的法则, 有

$$a=\frac{\begin{vmatrix}y_1&x_1&1\\y_2&x_2&1\\y_3&x_3&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x_1^2&x_1&1\\x_2^2&x_2&1\\x_3^2&x_3&1\end{vmatrix}}$$

$$b=\frac{\begin{vmatrix}x_1^2&y_1&1\\x_2^2&y_2&1\\x_3^2&y_3&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x_1^2&x_1&1\\x_2^2&x_2&1\\x_3^2&x_3&1\end{vmatrix}}\tag{6}$$

$$c=\frac{\begin{vmatrix}x_1^2&x_1&y_1\\x_2^2&x_2&y_2\\x_3^2&x_3&y_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x_1^2&x_1&1\\x_2^2&x_2&1\\x_3^2&x_3&1\end{vmatrix}}$$

其中方程组(5)的系数行列式

$$\begin{vmatrix}x_1^2&x_1&1\\x_2^2&x_2&1\\x_3^2&x_3&1\end{vmatrix}\neq0\tag{7}$$

我们指出，将不难证明：如果给定的三点(x_1, y_1)，(x_2, y_2)和(x_3, y_3)不共(直)线，当它们的x坐标互不相等时，即(7)式成立，那么过这三点有唯一的一条抛物线(3)，其系数a, b和c分别由(6)式给出，当它们的x坐标有相等的时，(7)式将不成立，即

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

那就没有过这三点而对称轴平行于y轴的抛物线存在；如果给定的三点共(直)线，且它们的x坐标互不相等时，那么方程组(5)中的第一个未知数$a=0$，此时方程(3)退化成直线方程，从而通过这三点的抛物线也不存在，当给定的三点中有两点以上重合时，则有无数条抛物线合乎要求．从几何上看，这些情况都是十分明显的．

以上介绍的实例都是线性代数中经常遇到的最基本课题．换句话说，解n元一次联立方程组，以下简称为线性方程组，是线性代数中最普遍的内容之一．同时我们强调，学习线性代数必须着重于几何直观背景，这是以后学好比较抽象的线性代数的一条主要途径．

习　　题(引　言)

1．试用行列式解下列线性方程组，并在xOy坐标平面上用直线表示各方程，用点表示方程组的解：

(1) $\begin{cases}2x-3y=1\\4x+y=9\end{cases}$　　　(2) $\begin{cases}2x-3y=0\\4x+y=0\end{cases}$

2. 试证：

(1) $$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)$$

(2) $$\begin{vmatrix} y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2-y_1 & x_2-x_1 \\ y_3-y_1 & x_3-x_1 \end{vmatrix}$$

并由此说明：当以上两式右端的值为0时，(1)与(2)的几何意义。

第一章 行列式

§1·1 二、三阶行列式的复习

我们已经学过二阶行列式和三阶行列式，为了能把它们推广到更一般的情形，首先对它们进行复习是有必要的。然后我们从中找出规律，引出 n 阶行列式。

二阶行列式和三阶行列式的一般形式可分别记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

和

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

其中 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, \cdots$ 称为行列式的元素。这样的记法有好处，

例如，一看 a_{32} 就知道它处在行列式中的第 3 行、第 2 列的位置. 我们应记住：在行列式中横的称为行，竖的称为列，带有两个下标的元素，其第 1 个下标表示所在的行序号，第 2 个下标表示所在的列序号.

我们早已知道，二、三阶行列式定义的是一个数值，它们是：
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

以及
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

并且不难直接验证以下诸性质（以三阶行列式为例）：

1° 转置行列式其值不变，即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2° 交换任意两行其值改变符号，即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

3° 在任一行中可以提取公因子，即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

4° 任两行成比例，其值为零，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{vmatrix}=0$$

特别是，当行列式中有两行相同，或有一行为零，则其值为零.

5° 某一行是两项的和，可拆成两个行列式的和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

6° 一行乘以一数加到另一行，其值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{31} & a_{22}+ka_{32} & a_{23}+ka_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

由性质 1°易见，性质 2°—6°对列也成立.

有了这些性质，我们将能简化行列式的计算.

例 1　三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}$$

这可由三阶行列式的定义得知，此行列式称为上三角行列式；还有所谓下三角行列式，它是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

例 2 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{第 1 列、第 2 列分别乘以 1 加到第 1 列}} \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{由第 1 列提取公因子 6}} 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{第 1 行乘以(−1)分别加到第 2、3 行}}$$

$$6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{第 2 行乘以 1 加到第 3 行}} 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{由例 1}} 6[1 \times 1 \times (-3)] = -18$$

习 题(1.1)

1. 由三阶行列式的定义，断定下列行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix}$

2. 由行列式的性质，断定下列行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ k\cdot d & k\cdot e & k\cdot f \\ d & e & f \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{31} & a_{31}+a_{22} \end{vmatrix}$

3. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

4. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}$

5. 试证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

§1·2　n阶行列式

回顾二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

及三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

我们发现它们有两个特点:

(1) 二阶行列式是 $2!=2$ 项的代数和，其中每一项是取自不同行、不同列的两个元素的乘积;三阶行列式是 $3!=6$ 项的代数和，其中每一项是取自不同行、不同列的三个元素的乘积.

(2) 代数和中每一项的符号,取决于各元素所在的位置,即行和列的下标. 以三阶行列式为例说明之: 一般项

$$a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$$

这里(i_1, i_2, i_3)表示列的下标，它是数码$(1, 2, 3)$的一个全排列. 我们规定以自然数顺序为序,若在一个全排列(i_1, i_2, i_3)中,从左至右有数码违反自然顺序的次数,则称此次数为逆序数. 当逆序数为偶数时，就称它为偶逆序；当逆序数为奇数时,就称它为奇逆序. 例如$(3, 1, 2)$的逆序数为 2，是偶逆序,

(3, 2, 1)的逆序数为3，是奇逆序。于是我们可以说，一般项 $a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$ 中列下标的全排列 (i_1, i_2, i_3) 为偶逆序时，此项在代数和中取"+"号，(i_1, i_2, i_3) 为奇逆序时，此项在代数和中取"－"号。例如 $a_{13}a_{21}a_{32}$ 取"+"号，$a_{13}a_{22}a_{31}$ 取"－"号。

根据以上两点，我们又可把二、三阶行列式分别记作：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{1i_1}a_{2i_2}$$

和

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}.$$

其中"+"、"－"号的选取，分别取决于全排列 (i_1, i_2) 和 (i_1, i_2, i_3) 的逆序是偶数还是奇数，偶数逆序取"+"号，奇逆序取"－"号。读者不妨与前述的定义印证之。

推而广之，我们可以定义 n 阶行列式如下：

定义 n^2 个数排成 n 行、n 列，以

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

记之，称为 n 阶行列式。它代表一个数，此数是取自上表示式中的不同行、不同列的 n 个元素乘积的代数和，此代数和共有 $n!$ 项，每项的符号取决于一个全排列 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 的奇、偶逆序，奇者为"－"，偶者为"+"。即有