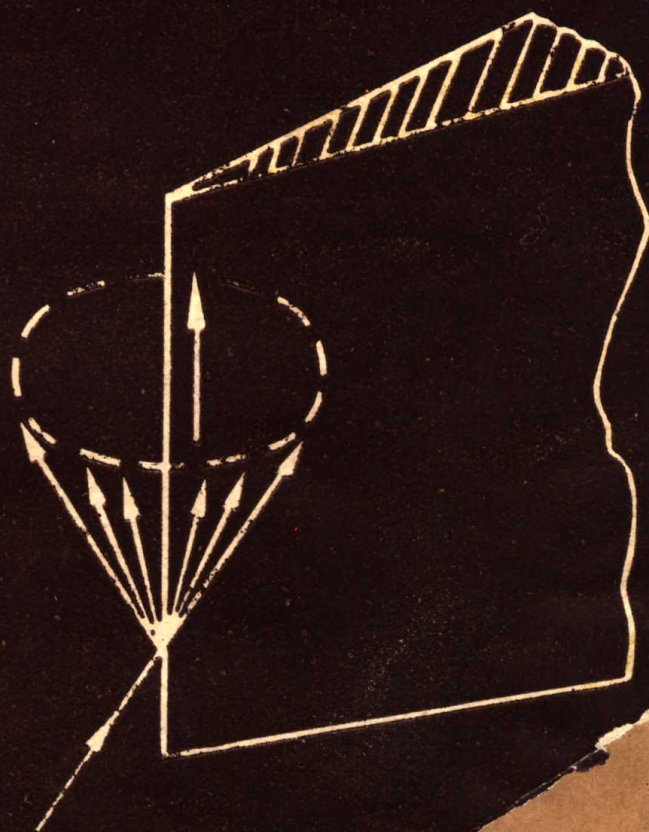


# 口径天线与绕射理论

[加拿大] E·V·泽尔 著

邱文杰 译 谢处方 校



成都

IEEE电磁波丛书第十分册

# 口径天线与绕射理论

[加拿大] E.V.泽尔 著

邱文杰 译

谢处方 校

成都电讯工程学院出版社

• 1987 •

## 内 容 提 要

本书着重介绍口径理论和几何绕射理论的基本知识及其在口径天线中的应用。全书分两部分：第一部分包括口径的平面波、口径图的付里叶变换表达式、近场辐射图、口径增益和口径理论在天线中的应用；第二部分包括具有明显边缘的导体的绕射、边缘的几何绕射理论和几何绕射理论在天线中的应用。

本书内容新颖、取材重点突出、叙述简明扼要、理论联系工程实际。除可作大学电磁场与微波技术专业本科高年级学生及研究生的选修课教材外、亦可供微波通信、雷达、无线电技术等专业的师生和有关工程技术人员参考。

### 口径天线与绕射理论

原著 [加拿大] E.V.泽尔 著

邱文杰 翻译

谢处方 审校

成都电讯工程学院出版社出版

成都市师范学校印刷厂印刷

四川省新华书店经销

开本 850×1168 1/32 印张 7.125 字数 180千字

版次 1987年8月第一版 印次 1987年8月第一次印刷

印数 1—2,800

中国标准书号：ISBN 7—81016—017—6/TN·7

统一书号：15452 21 定价：2.15元

## 序 言

本书取材于作者1964年应邀在丹麦工业大学逗留期间为学生们所作的几次关于口径天线的讲座。口径分析的平面波谱法取材于P.C.克莱矛 (P.C. Clemmow) 和我从前在研究生时的指导教师J.布朗 (J. Brown) 的著作。当时它是一种新的，完全不同于传统的处理方法。大约在同一时期，J.B.凯勒 (J.B. Keller) 参观了实验室，并向我介绍了几何绕射理论，以后，便逐渐发展为一种完全新的，且在大多数场合下能更有效地分析口径天线的方法。本书的这些想法大部分都应归功于他们。

在第二章至第六章中，口径分析的基础实质上是基尔霍夫绕射理论。其余的第七章至第九章中，采用了较新的几何绕射理论。这种分析几乎完全是二维或标量的，并指出推广到三维的情况。在这种方法中，基本概念是用简单的形式表达的。如第二章和第九章的一些例子所表明的那样，许多实际天线都属于二维分析。另外，至少在天线设计的最初阶段，假设二维模型通常是方便的。

为了适应教学的需要，本书在编写时包括了麦克斯韦方程以后的一些基本电磁理论内容。对不了解这些的读者可能是有用的。第二章至第六章的许多内容是在与不列颠哥伦比亚大学 (UBC) 的高年级学生的交谈中得到充实。第六章至第八章的部分内容也曾被用于哥伦比亚大学、卡尔顿 (Carleton) 和奎因 (Queen) 大学的研究生课程。

虽然，最初打算作为教科书，但也希望本书对实际工程师们有所帮助。因此，在涉及到应用问题的各章中都尽可能地同实验进行比较。第六章和第九章的喇叭辐射图的比较便是这样的例子。这些结果的绝大部分是由学生们求得的，而且以前从未发表过。图6.4和图6.6的数值数据是由 K.A. 格雷 (K.A. Grey) 和

S.L.佩格 (S.L.Paige) 小姐得到的, 而图6.5的数值数据是由 P.T.K.琼(P.T.K.Chun) 得到的。A.夏菲-杰齐 (A.Safaa-Jazi) 求得了图9.15和图9.19的几何绕射理论辐射图, 而N.多纳图西 (N.Donatucci) 则求出实验的辐射图。

我在本书中的大部分贡献都是在渥太华国家研究院 (NRC) 电气工程部作出的。本书主要也是在那里写成的。因此, 我感谢研究院的领导J.Y.王(J.Y.Wong) 在本书编写期间慷慨提供的方便和支持。在渥太华国家研究院的许多帮忙者当中P.阿米劳尔特 (P.Amirault) 专门描绘了大部分的图。也感谢B.埃朗德 (B.Enander) 为我在夏季参观斯德哥尔摩皇家技术学院电磁理论部期间提供的方便。同样, 在与同事们的讨论中我也受益不浅。特别是S.普泽兹杰克 (S.Przedziecki) 在一致渐近绕射理论方面对我的帮助。尤其应该感谢的是我的朋友和同事R.A.胡尔德 (R.A.Hurd), 几年前向我介绍了严格的绕射理论, 在我离开岗位, 大部分从事写作的几年期间又为我们的合作进行安排, 并建设性地对原稿作出评议。

E.V.泽尔

1980年11月

# 目 录

## 序 言

## 第一章 绪 论

- 1.1 历史背景..... ( 1 )
- 1.2 本书概要..... ( 4 )

## 第二章 口径的平面波

- 2.1 麦克斯韦方程的平面波解..... ( 8 )
- 2.2 一般的平面波解..... ( 9 )
- 2.3 均匀的和非均匀的平面波..... (10)
- 2.4 平面波谱..... (11)
- 2.5 辐射图..... (13)
- 2.6 三维平面波谱..... (16)
- 2.7 任意极化的口径场..... (20)

## 第三章 口径图的付里叶变换表达式

- 3.1 可分离的口径分布..... (23)
- 3.2 简单的口径分布..... (26)
- 3.3 复合的口径分布..... (28)
- 3.4 移位的口径分布..... (32)
- 3.5 具有线性相位变化的口径场..... (33)
- 3.6 高斯分布..... (34)
- 3.7 圆形口径..... (36)
- 3.8 辐射图的算子算法..... (38)

## 第四章 近场辐射图

- 4.1 近场准则..... (41)
- 4.2 从口径分布求近场图..... (42)
- 4.3 从远场图求近场图..... (45)
- 4.4 测量天线方向性的影响..... (47)

|                    |      |
|--------------------|------|
| 4.5 从近场测量求远场图..... | (51) |
|--------------------|------|

## 第五章 口径增益

|                         |      |
|-------------------------|------|
| 5.1 口径天线的增益.....        | (56) |
| 5.2 有效面积.....           | (58) |
| 5.3 超增益天线和口径的 $Q$ ..... | (59) |
| 5.4 近场和远场轴向增益.....      | (61) |
| 5.4.1 均匀圆形口径.....       | (62) |
| 5.4.2 均匀矩形口径.....       | (63) |
| 5.4.3 均匀和余弦的矩形口径.....   | (65) |
| 5.4.4 轴向增益缩小.....       | (67) |

## 第六章 口径理论在天线中的应用

|                     |      |
|---------------------|------|
| 6.1 近似和极限.....      | (69) |
| 6.2 终端开口的矩形波导.....  | (69) |
| 6.3 角锥喇叭.....       | (72) |
| 6.3.1 口径场.....      | (72) |
| 6.3.2 辐射图.....      | (74) |
| 6.3.3 近场图.....      | (78) |
| 6.3.4 角锥喇叭的增益.....  | (79) |
| 6.4 扇形喇叭.....       | (81) |
| 6.4.1 辐射图.....      | (81) |
| 6.4.2 扇形喇叭的增益.....  | (82) |
| 6.5 抛物面反射器.....     | (86) |
| 6.5.1 几何考虑.....     | (86) |
| 6.5.2 辐射场和轴向增益..... | (87) |
| 6.6 喇叭反射器.....      | (90) |
| 6.6.1 辐射图.....      | (90) |
| 6.6.2 喇叭反射器的增益..... | (93) |

## 第七章 具有明显边缘的导体的绕射

|                       |      |
|-----------------------|------|
| 7.1 导体上和边缘处的边界条件..... | (97) |
|-----------------------|------|

|       |            |       |
|-------|------------|-------|
| 7.2   | 巴比耐原理      | (99)  |
| 7.3   | 二维电磁场      | (100) |
| 7.4   | 导电的半平面的绕射  | (101) |
| 7.4.1 | TE 极化      | (101) |
| 7.4.2 | TM 极化      | (104) |
| 7.5   | 半平面上的斜入射   | (106) |
| 7.6   | 线源在半平面上的绕射 | (108) |
| 7.7   | 楔的绕射       | (112) |
| 7.7.1 | 级数解        | (112) |
| 7.7.2 | 渐近解        | (114) |

## 第八章 边缘的几何绕射理论

|       |             |       |
|-------|-------------|-------|
| 8.1   | 半平面绕射的远场    | (116) |
| 8.2   | 凯勒的边缘几何绕射理论 | (119) |
| 8.3   | 槽的绕射        | (119) |
| 8.3.1 | 单一绕射        | (119) |
| 8.3.2 | 多重绕射        | (121) |
| 8.3.3 | TM极化        | (125) |
| 8.3.4 | 条带的绕射       | (127) |
| 8.4   | 弯曲边缘的绕射     | (128) |
| 8.5   | 圆口径的绕射      | (130) |
| 8.6   | 斜入射和楔的绕射系数  | (132) |
| 8.7   | 一致解         | (133) |
| 8.7.1 | 一致绕射理论      | (133) |
| 8.7.2 | 一致渐近绕射理论    | (136) |

## 第九章 几何绕射理论在天线中的应用

|       |                |       |
|-------|----------------|-------|
| 9.1   | 范围和极限          | (140) |
| 9.2   | 从终端开口的平行板波导的反射 | (141) |
| 9.2.1 | TM 极化          | (141) |
| 9.2.2 | TE 极化          | (150) |

|       |                |       |
|-------|----------------|-------|
| 9.2.3 | 有法兰的波导         | (150) |
| 9.2.4 | 相邻波导间的耦合       | (151) |
| 9.3   | 从终端开口的平行板波导的辐射 | (152) |
| 9.3.1 | TM 极化          | (152) |
| 9.3.2 | TE 极化          | (156) |
| 9.3.3 | 轴向增益           | (158) |
| 9.4   | 电的线源           | (162) |
| 9.4.1 | 条带反射器          | (162) |
| 9.4.2 | 角形反射器          | (166) |
| 9.4.3 | 抛物圆柱面反射器       | (169) |
| 9.5   | 磁的线源           | (172) |
| 9.5.1 | 导电半平面上的槽       | (172) |
| 9.5.2 | 角锥喇叭和扇形喇叭的辐射   | (174) |
| 9.5.3 | 与基尔霍夫解的比较      | (181) |
| 9.5.4 | 二维E面扇形喇叭的增益    | (184) |
| 9.5.5 | E面扇形喇叭的反射      | (190) |

## 附 录

|       |                 |       |
|-------|-----------------|-------|
| A.1   | 付里叶积分和付里叶变换     | (199) |
| A.2   | 积分的驻相法计算        | (201) |
| A.2.1 | 单重积分            | (201) |
| A.2.2 | 双重积分            | (202) |
| A.3   | 汉克尔函数的积分和渐近形式   | (203) |
| A.4   | 半平面绕射的二重积分方程的解  | (208) |
| A.5   | 半平面绕射解简化为夫累涅尔积分 | (212) |
| A.6   | 槽的传输截面          | (215) |
| 参考文献  |                 | (218) |

# 第一章 绪 论

口径天线可用两种方法描述。第一，作为一块其上有辐射场分布的表面区域，区域外表面上的场可忽略不计。第二，作为一块以边缘为界，由源激励的区域。例如，辐射槽，喇叭和反射面等。这两种描述代表本书采用的口径天线分析的两种不同方法。一种是根据口径场辐射，另一种则是根据口径边缘的绕射。两种方法都严格地应用于大口径，因此，槽通常是被排除在外，但是，它们对于尺寸与波长可以比拟的口径还是有用的。看来，它们是互相补充的，某一种方法不行时另一种方法可能成功。

## 1.1 历史背景

最早的实用天线是工作在相当低频率上的金属线结构。根据线上的电流计算它们的辐射场是最方便的。原理上这个方法是精确的，但是，通常电流不能精确地知道，而是取近似值，随着通信频率的提高，采用了更高方向性的天线，例如喇叭和反射器。利用其上的电流分析这些天线不是很麻烦，就是实际上不可能。一般由辐射口径平面上的切向场推导出前向的辐射场。这种方法在原理上虽是精确的，但实际应用时并不精确，因为通常假设口径外面的场可以忽略不计，而口径里面的场则取作来自馈源的入射场。由于这些近似，这种方法实质上是光学法，称作惠更斯-基尔霍夫法(Huygens-Kirchhoff)或简称基尔霍夫法，并且对于精确计算数个波长大的口径的场是令人满意的。

这种方法的来源可追溯到惠更斯的想法，他于1690年在子波以光速径向地扩展的基础上，提出了光传播的几何理论。任意点的光强度为各子波贡献的包络〔参见，例如，贝克尔(Baker)

和柯普森(Copson), 1950]。1818年, 夫累涅尔(Fresnel)用波的绕射理论包括了惠更斯的观点。根据绕射理论, 绕射体起到阻碍入射光的作用, 产生的光强度由阻碍物未阻碍时全部子波的总贡献得到。次级子波之间的干涉得到绕射图和阻碍物后面的光强度。

大约在1804年, 杨(Young)氏已提出了绕射的另一种解释。他认为绕射条纹的位置, 可用无阻地通过口径的直接光波与口径边缘的波间的干涉来说明。这与通常的直觉是一致的, 即阻碍物阴影中的光似乎是由边缘引起的。显然, 杨氏关于光学的观点, 当时没有被普遍接受, 后来, 由于夫累涅尔用实验证明, 绕射边缘的形状对绕射图无明显影响, 他才放弃了他的绕射理论而支持夫累涅尔的理论。

杨氏的观点的定论似乎是由: 1882年, 基尔霍夫以对准确解释光学实验的夫累涅尔原理作数学加工得到解的巨大成功而确定下来。基尔霍夫的解满足光在空间全部点的标量波动方程, 但是难于看出, 杨氏的观点怎样才能对入射波必然中断的阴影边界作出数学上的恰当说明。所有这些问题的有意义的解释已由鲁宾诺维兹(Rubinowicz, 1957)给出。

关于平面波在半平面上的绕射, 索末菲尔德(Sommerfeld, 1896)得到了第一个精确的绕射解。索末菲尔德的无限薄理想导电屏对光学上的实验工作者没有多大吸引力是并不意外的, 这些实验工作者总想坚持基尔霍夫的理论, 但是, 它是无线电科学较新领域的一个里程碑。在离边缘足够远的距离上, 总场的索末菲尔德解分为几何光学波和似乎是起源于边缘的绕射波。施瓦兹希尔特(Schwarzschild, 1902)在考虑构成槽的两个半平面间的连续相互作用求索末菲尔德解的基础上, 得到了一个无限长槽的平面波绕射解, 对于分得很开的两个半平面, 绕射图变成直接平面波和从口径边缘绕射的柱面波之间的干涉图。

绕射解的渐近形式严格地满足标量的波动方程和边界条件,

从而证实了杨氏关于绕射观点的正确性。此外，还表明，有可能将由口径上的基尔霍夫面积分得到的场分成一个入射波和一个沿口径边缘的线积分，这个线积分在远区产生绕射波（鲁滨诺维兹，1924）。这表示夫累涅尔和杨氏的绕射解释之间的等效性。

最近几十年，由于高频绕射理论发展的结果，杨氏观点的采用才得到了真正的发展。这些发展主要出现在美国和苏联。在美国，杰出的支持者是凯勒（1953），他将经典的几何光学和渐近绕射理论相结合，提出了几何绕射理论。假设绕射是一种局部发生的效应，当入射的几何光线碰到边缘时，就会以类似于产生反射线的方式产生绕射线。由适当绕射问题的严格解的渐近形式确定绕射线的场。绕射线可以再次被绕射，总的场为入射的、反射的和绕射的全部射线的贡献之和。这个方法的数学基础，以它的简单、清晰以及凯勒在推广和促进这个观点的工作得到了公认。凯勒和汉森（Hansen, 1965）总结了这些研究成果，从而产生了几何绕射理论。

苏联在渐近绕射理论方面的研究集中在单个个人的比美国少。苏联的广泛并给人以深刻印象的文献，总的说来，比较善于运用西方文献，反之，我们不太善于运用他们的文献。大约在与凯勒法同一时间研究的，并且与之有密切关系的乌菲姆采夫（Ufimtsev, 1962）的边缘波法，或物理绕射理论也广泛地用于高频绕射场的计算。波罗维可夫（Borovikov）和金伯尔（Kinber, 1974）对苏联文献的有益的综述也包括天线应用。

渐近绕射理论应用于口径天线的分析在六十年代早期就开始了。从此以后不断发展，直到现在，几何绕射理论或它的等效方法已成为分析大尺寸（以波长计）天线的主要方法。以计算机为基础的数值法，目前主要是对小天线，对于大的结构就变得不易运用和花钱太多。在计算机技术非凡发展并正进入高频领域的同时，几何绕射理论的卓越概念和数学的简单性保证了它在口径天线的分析和设计当中的生命力。

## 1.2 本书概要

第二章至第六章，口径天线分析的方法，基于基尔霍夫绕射和付里叶变换理论。第二章用平面波谱表示场的推理是传统方法的一个较新的起步。较早的推理通常是从区域内的一点上的场和包含口径的边界面上的场之间的积分表示式开始的。由于假设除表面外的场处处可以忽略不计，所以积分简化为沿口径本身积分。例如，斯特拉顿(Stratton, 1941, p.464)用表面上的场给出了场的矢量表示式。此外，标量绕射理论，例如，由贝克尔和柯普森(1950)所描述的可应用于矢量场的每一个分量。然后，任何一种近似方法，例如，用于物理光学的近似方法，通常是要求将得到的积分变成可以由此计算其场的形式。正如席尔佛(Silver, 1949)的推导所表明的那样，在推导绕射积分的冗长过程中，物理概念是模糊的。

对于平面口径，第二章的推导在用图说明消失口径场的作用和清楚地表示口径场之间的付里叶变换关系是特别有利的。它的根据是：任何场都可以用幅度由口径平面内的切向电场或磁场计算的平面波的迭加来表示。场的平面波谱表示法已被克莱矛(1966)大量应用于绕射解中。在口径天线的分析中它的优点在许多文章和书中，象柯林(Collin)，楚克尔(Zucker, 1969, 第三章)和鲁兹(Rhodes, 1974)的书，日益明显地意识到。

第三章举例说明了采用付里叶变换和设计口径天线的基本特性。给出了简单的、复合的和相位偏移的口径分布的辐射图分析，并指出了辐射图的综合方法。叙述了一种辐射图分析的运算方法。

第四章讨论近场或夫累涅尔区的影响。随着口径加大，波长缩短，这些问题经常是难于避免的。这里给出了简单口径分布的近场解析解。平面波谱场表示法很方便地把测量天线方向性的影响包括在内。还讨论了目前颇为感兴趣的一个课题，即由测量近

场预估远场辐射图。在平面的近场表面上测量辐射图的付里叶变换是最简单和最通用的方法。这里叙述了由在圆柱表面上测量近场辐射图的模系数来计算远场辐射图。由于计算机、数值技术和测试设备改进的结果，现在还可以实现球面扫描。

第五章从熟悉的口径增益和有效面积的概念开始，然后继续讨论不太轻松的超增益和口径带宽的概念。在描述口径的有功功率和无功功率时，再次表明了平面波谱法是方便的。谱函数或辐射图原则上也可确定天线阻抗，鲁兹(1974)对平面偶极子证实了这一点。他的口径 $Q$ 的定义，带宽的倒数，已被证明适用于这种结构，但其普遍应用的实际性仍值得怀疑。

第五章用推导具有均匀和余弦分布的圆形和矩形口径的近场轴向增益来结束。由于矩形口径的表示式与后面遇到的角锥喇叭基本上相同，所以介绍涉及的函数并制成表格是方便的。

第六章给出了应用基尔霍夫绕射理论的少数实际天线。置于导电平面上的终端开口波导的简单例子表明，只要口径平面的边界条件完全得到满足，即使口径小（以波长计）这个方法也是可用的。相当详细地讨论了角锥和扇形喇叭。角锥喇叭恐怕是最早的微波天线形式，而且，仍被广泛采用，但是，用基尔霍夫法一般得不到预测其辐射图的精确证据。这里给出的结果表明，即使对于远离波束轴线的角度，标准喇叭也有很高的精度。这些喇叭的近场图可用远场图表达式中各参量的小量变化来逼近。谢尔库诺夫(Schelkunoff)关于轴向增益的可靠结果是由矩形口径轴向近场增益的表示式简单地得到的。当我们考察 $E$ 面辐射图和增益的表示式时，窄口径尺寸对其精度的影响很明显，普通的增益方程误差严重，提出了一种更好的计算公式。

第六章介绍了抛物面反射器，但只讨论到指出如何应用上述方法为止。这有助于后面喇叭反射器的分析，它也是一种广泛用于微波通信的天线。

读者可从第六章得到结论：基尔霍夫法用于计算口径前方的

场通常是合适的。对于侧面和后方的场,假设绕射是边缘,而不是口径的影响是方便的。几何绕射理论便是这样的,并且作为其基础,第七章概括地阐述了尖边形导体的严格绕射理论。对于半平面的平面波绕射,主要标准解的完整描述详细地给在附录中。推广到斜入射,提出了局部源和楔形。因此,集中了最后几章的工具。

虽然几何绕射理论被广泛采用,但写在书里的却不多。受欢迎的新贡献是柯泳坚(Kouyoumjian, 1975)和琼斯(Jones, 1979)的一些章节,詹姆斯(James, 1976),以及玻罗维可夫和金伯尔(1978)的几本俄文书。第八章的内容限于与本书的主题相一致的尖边形导体,按照凯勒(1957)的例子,用槽的绕射说明这个方法,并用圆口径作为曲边缘的例子。在这些解中阴影边界的奇异点,凯勒法的主要困难,恰巧自相抵消了。在更为一般的情况下克服这个困难的方法在本章最后叙述。它们包括一致性几何绕射理论和一致性渐近绕射理论,各有其优点和限制。

第九章给出了几何绕射理论的应用。为了便于对照严格解来检查这种方法,开始选择的是终端开口的平行板波导“天线”。叶(Yee)氏和费尔森(Felsen, 1968)从这个口径的反射和辐射的射线光学分析提供了高阶边缘相互作用的重要性的衡量。射线光学法实质上就是近似考虑了阴影边界奇异点的凯勒法。作出了与精确的一致渐近理论解的比较。与严格解的数值比较表明,严格规定用于大口径的射线光学法,对于TEM模入射的小到零点几波长的口径宽度和正好大于TE<sub>1</sub>模截止的口径宽度的精度也是可以的。

第九章的其余部分,为了避免直接应用几何绕射理论时所固有的阴影和反射边界的奇异点,采用了平行且靠近导电半平面边缘的线源的远场表示式。这个表示式在远场中是精确的,应用时比一致性渐近理论更简单。第一个例子是最简单的反射器天线——导电条带前的偶极子。已被证明,几何绕射理论在提供它的完整的H面辐射图方面特别有效。按照欧巴(Ohba, 1963)的分

析同样导出了有限角形反射器天线的 $H$ 面场。由于抛物圆柱面反射器的前向辐射图比较容易,并且通常尽可能用基尔霍夫法得到,这里只推导侧向和后向 $H$ 面的场。

角锥喇叭的 $E$ 面辐射图分析也证实了特别适合用几何绕射法。采用罗梭(Russo)等人(1965)的模式,用磁的线源代替波导馈源,并且按余(Yu)氏等人(1966)的分析进行。数值和实验结果间的比较表明,喇叭边缘及其内表面间的相互作用,在计算喇叭前面的辐射图时通常可予以忽略,因此,采用基尔霍夫的结果是可以的,因为结果几乎相同。仅在求侧面和后面的场时需要几何绕射理论。在那里,对刚好大于背向辐射通常电平的一阶边缘的相互作用是必须考虑的。

由于角锥喇叭作微波增益标准,希望能高精度地预测其增益。在这一增益预测中,误差的主要来源是口径边缘和喇叭内表面之间的相互作用。大部分相互作用发生在 $E$ 平面,并且可用几何绕射理论来估计。这将在接近第九章的末尾解决。最后,计算了 $E$ 面扇形喇叭的复反射系数。不出所料,如果喇叭口径足够大,波导馈源足够小,这些结果是合适的。

附录包括求解半平面绕射的细节所采用的某些数学技术的简要说明及口径传输截面的推导。

## 第二章 口径的平面波

### 2.1 麦克斯韦方程的平面波解

在自由空间, 把电场强度 $\mathbf{E}$ 和磁场强度 $\mathbf{H}$ 的空间和时间变化联系在一起的麦克斯韦方程为

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 (\partial \mathbf{H} / \partial t) \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 (\partial \mathbf{E} / \partial t) \quad (2.2)$$

和 
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (2.3)$$

式中 $\epsilon_0$ 和 $\mu_0$ 为自由空间的介电常数和导磁率。合并并消去 $\mathbf{H}$ 得到

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 (\partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2) = 0 \quad (2.4)$$

同样可得 $\mathbf{H}$ 。由任何 $\mathbf{E}$ 或 $\mathbf{H}$ 的场解, 便可用 $\mathbf{E}$ 代替 $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H}$ 代替 $-\mathbf{E}$ 和 $\epsilon_0$ 代替 $\mu_0$ 来得到另一个场解。

在笛卡尔坐标中, 方程(2.4)为

$$\nabla^2 E_x - \mu_0 \epsilon_0 (\partial^2 E_x / \partial t^2) = 0 \quad (2.5)$$

同样可得 $E_y$ 和 $E_z$ 。如果 $E_x$ 只随 $z$ 变化, 我们有

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad (2.6)$$

假设场为时谐变化①。如果所有的场都随时间 $t$ 作 $\exp(j\omega t)$ 变化, 这里 $\omega = 2\pi f$ 是角频率, 则 $\partial/\partial t$ 可用 $j\omega$ 代替。则方程(2.6)的解为

①任意时间变化的场 $E_x(t)$ , 都可表示为时谐变化的付里叶级数和, 每个谐波的幅度为 $a(\omega)$ 。于是

$$E_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

式中 
$$a(\omega) = 1/(2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} E_x(t) \exp(-j\omega t) dt$$