

高等学校试用教材

概率论与数理统计

周概容 编

高等教育出版社

高等学校试用教材

概率论与数理统计

周概容 编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是根据教育部颁发的综合性大学数学专业《概率论与数理统计教学大纲》编写的教材,由两大部分组成:

第一部分是概率论基础知识:概率空间,随机变量及其函数的概率分布,随机变量的数字特征和特征函数,大数定律和中心极限定理;

第二部分是数理统计初步:样本空间,随机样本及其函数的概率分布,参数估计理论和统计假设检验,最后简介有重要应用的线性统计模型。

本书可作为综合性大学数学系的试用教材。

本书由戴永隆、杨维权主审,经数学、力学教材编委会概率统计编审小组委托梁之舜编委复审,同意作为高等学校试用教材出版。

高等学校试用教材 概率论与数理统计 周概容 编

*

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京印刷三厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 22.375 字数 540,000

1984 年 3 月第 1 版 1984 年 9 月第 1 次印刷

印数 00,001—24,000

书号 13010·0983 定价 3.45 元

前 言

概率论与数理统计是研究大量随机现象的规律性的数学学科。它已广泛地用于自然科学、社会科学、工程技术、军事和工农业生产中,并且与其它数学学科互相渗透或结合。因此,概率论和数理统计已经成为数学专业学生必修的一门基础课。通过本课程的教学,要使学生掌握研究随机现象的基本思想和方法,并且具备一定的分析问题和解决问题的能力。

本书是根据教育部颁发的综合性大学数学专业《概率论与数理统计教学大纲》编写的教材,以介绍概率论与数理统计的基本知识和方法为主,同时注意它的直观背景和实际意义。全书由两大部分组成:

第一部分(第一章—第六章)是概率论的基础知识,包括概率空间,随机变量及其函数的概率分布,随机变量的数字特征和特征函数,大数定律和中心极限定理。

第二部分(第七章—第十章)是数理统计初步,介绍数理统计最基本的概念和问题,包括样本空间,随机样本及其函数的概率分布,参数估计理论和统计假设检验,最后简单介绍在实际中有重要应用的线性统计模型。

此外,在每章之后配有一定数量习题,读者可以在教师的指导下选做。不过,有些习题本身是正文的补充和一些有趣的命题,对于那些想深入学习概率论和数理统计的读者,这些习题也有助于他们进一步掌握有关理论内容。

阅读本书一般并不要求读者具备实变函数论的知识,只在个

别地方引用某些熟知的概念和结果(例如,关于在积分号下取极限的勒贝格控制收敛定理,关于变更积分顺序的富比尼定理)。书中的定理、引理和性质一般都有严格的证明。在那些用到较高深数学知识的地方,只着重讲解离散型和连续型两种重要情形。对于一般情形也给出了严格的证明,只有个别定理的证明引用了有关文献。这些地方一般标有*号。对于初学者,凡是标有*号的地方,可以不讲或只作简单介绍。

根据大纲,概率论与数理统计课为每周五学时,其中讲授为四学时,习题课为一学时。如果只准备讲概率论部分,则每周为四学时。这时,第一章—第六章的部分内容可以从简(例如,第四章§3.2—§3.3;第五章§3等)。

本书是在王梓坤教授的直接指导下编写而成的,并且在南开大学数学系的数学、计算和自控专业几经讲授和修改。王梓坤教授对全书及其细节都提出了许多宝贵意见。南开大学概率论教研室的部分同志曾对本书的初稿进行了讨论,提出了许多宝贵的修改意见,特别是朱成熹、吴荣和杨振明等同志,对于本书的编写和改进帮助尤大。在此,特向这些老师表示谢意。

梁之舜教授、戴永隆同志和杨维权同志审阅了本书的全部手稿,并提出了许多重要的改进意见。谨此向三位老师表示衷心感谢。

由于编者水平所限,书中定有许多不妥之处,恳请读者批评指正。

编 者

1983年10月

目 录

第一部分 概 率 论

第一章 概率空间	1
§ 1. 随机现象和随机试验	1
1.1. 概率论和数理统计的研究对象	1
必然现象和随机现象(1) 产生随机性的原因(2) 随机现象的统计规律性(2) 概率论和数理统计的研究对象(3)	
1.2. 随机试验	3
随机试验(4) 随机试验的例(4)	
1.3. 随机事件和随机变量	6
§ 2. 事件的关系和运算·基本事件空间	7
2.1. 事件的关系和运算	7
2.2. 事件运算的简单性质	10
2.3. 基本事件空间	12
§ 3. 事件的概率	13
3.1. 古典型概率	14
古典型随机试验(14) 古典型概率的定义(15) 古典型概率的性质(17)	
3.2. 几何型概率	18
几何型随机试验(18) 几何型随机试验的事件(18) 几何型随机试验中事件的概率(19) 几何型概率的性质(21)	
3.3. 频率和概率	22
事件的频率(22) 频率的稳定性和概率(23) 频率的性质(24)	
§ 4. 事件 σ -代数·可测空间	25
4.1. 事件 σ -代数	26
σ -代数的简单性质(26) σ -代数的例(27)	

4.2. 含给定集系的最小 σ -代数·波莱尔 σ -代数	28
含给定集系的最小 σ -代数(28) 波莱尔 σ -代数和波莱尔集(29)	
4.3. *集合 σ -代数和单调集合类	30
§ 5. 概率的公理化定义·概率空间	33
5.1. 概率的公理化定义·概率空间	33
5.2. 概率的性质	36
5.3. *概率测度的开拓	41
定义在集合代数上的概率测度(41) 概率测度的开拓定理(42)	
§ 6. 事件的条件概率	42
6.1. 直观背景	42
古典型(42) 几何型(44) 条件频率(44)	
6.2. 条件概率的定义和性质	45
6.3. 和条件概率有关的基本公式	46
乘法公式(46) 全概率公式(47) 贝叶斯公式(49)	
§ 7. 事件的独立性	52
7.1. 二事件的独立性	52
定义(52) 独立事件的性质(54)	
7.2. 多个事件的独立性	55
7.3. 事件列的独立性	57
§ 8. *计算事件概率的例	59
8.1. 组合分析的基本公式	59
基本法则(59) 排列(60) 组合(60) 基本性质(61)	
8.2. 随机取样	61
8.3. 分配问题	63
8.4. 例	64
习题	76
第二章 一维随机变量及其概率分布	85
§ 1. 一维随机变量的定义及其分布函数	85
1.1. 随机变量的数学定义	85

1.2. 随机变量产生的事件	88
1.3. 随机变量的分布函数	91
1.4. 离散型和连续型随机变量	97
§ 2. 离散型随机变量	98
2.1. 离散型随机变量的概率分布和分布函数	98
离散型随机变量的概率分布(99) 离散型随机变量的分布函数(99)	
2.2. 退化分布	100
2.3. 二项分布和负二项分布	101
伯努利试验(101) 多重伯努利试验(101) 伯努利试验中的概率分布;	
伯努利分布(102) 二项分布(102) 负二项分布(107) 几何分布(108)	
2.4. 超几何分布	109
超几何分布的二项分布逼近(110) 负超几何分布(112)	
2.5. 泊松分布	112
泊松分布的最可能数和概率的最大值(112) 伯努利试验列中的稀有事件(114) 泊松事件流(118) 随机质点的空间分布*(125)	
§ 3. 连续型随机变量	126
概率密度的性质(127) 连续型随机变量的概率分布(128)	
3.1. 均匀分布	129
3.2. 指数分布	130
泊松流中的等待时间(130) 指数分布的无后效性(131)	
3.3. 正态分布	132
正态分布的性质和特点(133) 标准正态分布(134) 正态分布在理论和实际中的地位(138) 产生正态分布的一般条件(142)	
3.4. 对数正态分布	143
3.5. Γ -分布	144
指数分布(144) 厄兰分布(145) χ^2 -分布(145)	
3.6. B -分布	146
F -分布与 B -分布(147) 二项分布和负二项分布与 B -分	

布(148)	
§ 4. 一维随机变量的概率分布	150
4.1. 一维随机变量的概率分布	150
4.2. 分布和分布函数	152
分布和分布函数的一一对应关系(152) 分布函数的性质和分	
类*(155) 分布函数为给定函数的随机变量的存在性*(157)	
4.3. 随机变量之概率分布的分析表达式	158
离散型(158) 连续型(158) 一般情形(159)	
习题	159
第三章 随机向量及其函数的分布	164
§ 1. 随机向量及其概率分布	164
1.1. 随机向量及其分布函数	164
随机向量之分布函数的性质(168)	
1.2. 离散型和连续型随机向量	169
离散型随机向量(169) 连续型随机向量(172)	
1.3. 随机向量的边缘分布函数	178
一般情形(178) 连续型(179) 离散型(181)	
1.4. 随机向量的概率分布	182
随机向量的概率分布(183) n 维分布和 n 元分布函数(183) 随	
机向量之概率分布的分析表达式(185)	
§ 2. 随机变量的独立性	186
2.1. 一维情形	186
离散型随机变量独立的充分必要条件(187) 连续型随机变量	
独立的充分必要条件(188) 一般情形(189)	
2.2. 独立随机向量	192
§ 3. 随机变量的条件分布	193
3.1. 随机变量关于已给事件的条件分布函数	193
3.2. 一随机变量关于另一随机变量的条件分布函数	194
条件密度(195) 离散型随机变量的条件分布(198)	
3.3. 条件分布的简单性质	199
§ 4. 随机向量的函数	201

4.1. 随机向量的函数	202
波莱尔函数(202) 独立随机向量的函数的独立性(203)	
4.2. 随机向量的函数的分布	204
一般情形(204) 随机向量的函数的密度(207)	
4.3. 随机变量之和(差)及商(积)的分布	216
二随机变量和的分布(216) 二随机变量差的分布(222) 二随机变量商的分布(222) 二随机变量积的分布(224)	
4.4. 三个重要分布	224
χ^2 -分布(225) t -分布(228) F -分布(230)	
习题	232
第四章 随机变量的数字特征	238
§ 1. 随机变量的数学期望	239
1.1. 离散型随机变量的数学期望	239
频率平均值(239) 定义(240) 离散型随机变量数学期望的性质(242)	
1.2. 随机变量的数学期望(一般情形)	245
定义(245) 非负随机变量数学期望的性质(247) 数学期望的性质(一般情形)(249)	
1.3. 勒贝格-司梯阶积分	251
1.4. 随机变量的函数的数学期望	252
一维情形(252) 多维情形(257) 车贝晓夫不等式(259) 独立随机变量函数的数学期望(260)	
§ 2. 随机变量的方差和矩	260
2.1. 随机变量的方差	261
定义(261) 方差的基本性质(262)	
2.2. 随机变量的矩	268
矩的计算公式(269) 原点矩和中心矩的换算(270)	
2.3. 关于矩的一些重要不等式	274
马尔科夫不等式和车贝晓夫不等式(274) 柯西-布尼亚科夫斯基不等式(274) 赫尔德不等式*(275) 明科夫斯基不等式*(276) 詹森不等式*(277) 李亚普诺夫不等式*(278)	

§ 3. 随机向量的数字特征	278
3.1. 二随机变量的协方差和相关系数	278
协方差的基本性质(280) 相关系数的性质(280) 二随机变 量的相关性(283)	
3.2. 随机向量的数学期望和方差	284
记号(284) 定义(286) 数学期望的性质(286) 方差的性 质(288) n 维正态分布的数学期望和方差(289)	
3.3. *二随机向量的协方差	291
协方差的性质(291) 不相关随机向量(292)	
§ 4. 条件数学期望	292
4.1. 随机变量关于事件的条件数学期望	292
全数学期望公式(295) $E(\xi B)$ 的基本性质(296)	
4.2. 一随机变量关于另一随机变量的条件数学期望	297
随机变量 η 关于 $\{\xi=x\}$ 的条件数学期望(297) 随机变量 η 关 于随机变量 ξ 的条件数学期望(301) 条件数学期望 $E(\eta \xi)$ 的 性质(302)	
4.3. *最优回归函数	303
习题	305
第五章 特征函数	313
§ 1. 随机变量的特征函数的定义和基本性质	314
1.1. 定义	314
1.2. 基本性质	315
§ 2. 特征函数和分布函数的对应关系	322
2.1. 特征函数和分布函数	323
2.2. 特征函数和分布函数对应的唯一性	323
2.3. 特征函数和分布函数对应的连续性	331
分布函数列的弱收敛(331) 连续性定理(337)	
2.4. 极限分布函数连续的情形	341
§ 3. *随机向量的特征函数	342
3.1. 定义	342
3.2. 基本性质	344

3.3. 随机向量的特征函数与分布函数的对应关系	350
对应的唯一性(350) 对应的连续性(352) 随机向量独立的 充要条件(353)	
3.4. *多维正态分布	355
习题	360
第六章 独立随机变量列的极限定理	364
§ 1. 随机变量列的收敛性	364
1.1. 以概率 1 收敛	365
1.2. 依概率收敛	368
1.3. 依分布收敛	370
1.4. r -阶收敛	372
1.5. 四种收敛性的关系	373
§ 2. 大数定律	374
2.1. 问题的提法	374
2.2. 大数定律	376
2.3. 强大数定律	379
波莱尔强大数定律(379) 柯尔莫戈洛夫准则*(380) 独立同 分布随机变量列的强大数定律*(384)	
2.4. *应用大数定律的例	387
§ 3. 中心极限定理	392
3.1. 中心极限定理的提法	393
独立随机变量之和(393) 独立随机变量的规范化和(394) 记 号(395) 定义(395)	
3.2. 同分布情形	396
列维-林德伯格定理(397) 棣莫佛-拉普拉斯积分定理(397)	
3.3. 林德伯格定理	401
3.4. 李亚普诺夫定理	410
习题	412

第二部分 数理统计

第七章 数理统计的基本概念	418
----------------------	-----

§ 1. 样本空间	419
1.1. 总体和表征总体的随机变量	419
统计特征(419) 表征总体的随机变量(420) 总体的分布和	
数字特征(421) 具体总体和抽象总体(421)	
1.2. 简单随机取样和简单随机样本	422
1.3. 样本空间	424
1.4. 随机样本的概率分布	425
1.5. 统计量	425
§ 2. 经验分布函数和随机样本的数字特征	427
2.1. 经验分布函数	427
2.2. 样本数字特征	428
2.3. 样本数字特征的概率分布	430
样本均值与样本方差的分布和独立性(430) t -分布(433)	
样本方差比的概率分布(435)	
§ 3*. 顺序统计量	436
3.1. 顺序统计量及其概率分布	436
3.2. 样本极差及其概率分布	439
3.3. 极值分布	440
§ 4. 数理统计的基本问题	441
4.1*. 采集样本	441
抽样技术(441) 试验设计(442)	
4.2. 统计推断的基本问题	443
统计估计问题(443) 统计假设检验(444)	
习题	445
第八章 参数估计理论	448
§ 1. 参数估计问题的提法	448
1.1. 一般提法	449
1.2. 未知参数的点估计	449
1.3. 未知参数的区间估计	450
§ 2. 参数的点估计	451
2.1. 选择估计量的原则	451

2.2. 克拉美-罗不等式·有效估计量·····	453
费歇信息量(454) 克拉美-罗不等式(456) 有效估计量和估计量的效率(458)	
2.3. 建立估计量的方法·····	459
矩估计法(459) 矩估计量的性质(461) 最大似然估计法(463) 最大似然估计量的求法·似然方程(464) 最大似然估计量的性质(470)	
2.4. *随机向量分布参数的点估计·····	480
§ 3. 参数的区间估计·····	483
3.1. 置信区间和置信度·····	484
3.2. 建立置信区间的方法·····	484
3.3. 正态分布参数的区间估计·····	485
习题·····	489
第九章 统计假设检验 ·····	493
§ 1. 统计假设和假设检验的基本概念·····	494
1.1. 统计假设·····	494
参数假设和非参数假设(494) 简单假设和复合假设(495) 基本假设和对立假设(495)	
1.2. 统计假设的检验·····	496
§ 2. 统计假设的显著性检验·····	497
2.1. 小概率原则·显著性水平·····	497
2.2. 统计假设显著性检验的一般过程·····	498
2.3. 关于正态分布参数假设的显著性检验·····	499
检验假设 $\mu = \mu_0$ (499) 检验假设 $\mu_1 = \mu_2$ (502) 检验假设 $\sigma = \sigma_0$ (505) 检验假设 $\sigma_1 = \sigma_2$ (507) 检验假设 $r = 0$ (509)	
2.4. 似然比检验·····	512
似然比检验的基本思想(512) 似然比检验的一般过程(514)	
§ 3. *管理图·····	519
3.1. 问题的提出·····	519
3.2. 什么叫管理图·····	520
3.3. 建立管理图的原则· 3σ -管理图·····	522

3 σ -管理图(522)	未知参数的估计(526)
§ 4. 最大功效检验	530
4.1. 统计假设检验的两类错误和功效	530
检验准则(531)	检验的两类错误(531)
检验的功效函数(532)	
一致最大功效检验(532)	α -水平一致最大功效检验(532)
4.2. 奈曼-皮尔逊基本引理	536
4.3. 一致最大功效检验的例	541
4.4. *一致最大功效无偏检验的概念和例	546
无偏检验(546)	一致最大功效无偏检验(546)
4.5. 正态分布参数检验表	548
§ 5. 非参数假设的 χ^2 -检验	550
5.1. 分布拟合检验	551
χ^2 -检验(551)	统计量 χ_n^2 的极限分布·皮尔逊定理(552)
皮尔逊定理的推广(555)	
5.2. *独立性的检验	560
二事件独立性的检验(560)	二随机变量独立性的检验(562)
5.3. *齐一性的检验	565
5.4. *其它非参数检验	568
习题	568
第十章 线性统计模型初步	575
§ 1. 线性回归	575
1.1. 一元正态线性回归的数学模型	575
问题的提法(575)	数学模型(577)
1.2. 未知参数的估计	578
正规方程·回归系数的点估计(578)	参数 σ^2 的点估计(580)
估计量 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ 和 $\hat{\sigma}^2$ 的分布(581)	未知参数 β_0, β_1 和 σ^2 的区间估计(583)
1.3. 线性关系的显著性检验	584
1.4. 利用回归方程进行预测和控制	585
预测(585)	控制(588)
1.5. 一元线性回归模型的推广	589
1.6. 例	589

§ 2. 方差分析	594
2.1. 一种方式分组的方差分析模型	594
单因素试验 (594) 数学模型 (596) 统计推断的基本问题 (596)	
方差分析法 (597)	
2.2. 变动平方和的分解	597
变动平方和的分解 (597) 变动平方和的概率分布 (599)	
2.3. 未知参数的估计	600
点估计 (600) 区间估计 (600)	
2.4. 基本假设的显著性检验	601
§ 3*. 一般线性模型	603
3.1. 一般线性模型和例	604
样本的线性结构 (604) 线性模型的例 (605)	
3.2. 未知参数的估计·最小二乘法	612
最小二乘估计 (612) 最小二乘估计的性质 (617) σ^2 的估计 (620)	
正态线性模型的估计问题 (621) 带约束线性模型的估计问题 (626)	
3.3. 线性假设的检验	630
线性假设的一般形式 (630) 线性假设的显著性检验 (632)	
例 (637)	
习题	643

附 录

I. 常见概率分布表	648
1. 离散型概率分布 (648);	
2. 连续型概率分布 (649);	
3. 多维概率分布 (654).	
II. 习题答案	655
III. 常用数理统计表	680
附表 1. 标准正态分布函数值表 (680)	
附表 2. 标准正态分布双侧分位数 (u_α) 表 (681)	
附表 3. 泊松分布概率值表 (682)	

附表 4. 泊松分布累计概率值表 (683)	
附表 5. χ^2 -分布上侧分位数 ($\chi^2_{\alpha, \nu}$) 表 (684)	
附表 6. t -分布双侧分位数 (t_{α}) 表 (686)	
附表 7. F -分布上侧分位数 (F_{α}) 表 (687)	
附表 8. 样本相关系数的临界值 (r_{α}) 表 (691)	
附表 9. s/σ 的数学期望和标准差、 $3\sigma-s$ 管理图系数表 (692)	
附表 10. $3\sigma-\bar{\bar{x}}$ 管理图系数表 (693)	
附表 11. R/σ 的数学期望和标准差、 $3\sigma-R$ 管理图系数表 (693)	
IV. 书中人名英-俄-汉对照	694
V. 参考书目	697